2016 / 2017 學年教學設計獎勵計劃

參選編號：C093

科目：數學

適合年級：高中回歸

簡介

數列是高中年級的一個重要課題,有着較為廣泛的實際應用。如衣物、鞋子的尺寸需要按等級分成若干等級時,常按等差數列進行分級,又如銀行儲蓄的利息計算問題,都會用到等比數列來計算,所以數列在整個中學教學內容當中,處於一個知識滙集點的地位,很多知識都與數列有密切的聯繫,之前所學過的數、式、方程、函數、簡易邏輯等知識在這一章有着充分應用,亦為之後所學的數列與函數的極限等內容作鋪墊作用,所以要學好數列這一門內容,為日後所學的新知識打好一定基礎。

目次

教學進度表

課節	課題	課題內容	授課時間	課時
第 1~2 課節	數列	1. 數列的概念 2. 數列的遞推公式 3. 數列的通項公式	2017-02-20	2
第 3~5 課節	等差數列	1. 等差數列的概念 2. 等差數列的通項公式 3. 等差數列的中項公式 4. 等差數列的性質	2017-02-23	3
第 6~8 課節	等差數列的前 n 項和	1. 等差數列的前 n 項和公式	2017-02-27	3
第 9~11 課節	等比數列	1. 等比數列的概念 2. 等比數列的通項公式 3. 等比數列的中項公式 4. 等比數列的性質	2017-03-02	3
第 12~13 課節	等比數列的前 n 項和	1. 等比數列的前 n 項和公式	2017-03-06	2

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

1. 理解數列的概念,了解數列的通項公式的意義,能根據數列的通項公式求出數列的前 n 項;

2. 理解兩種常用的數列(等差數列、等比數列)的概念,掌握其通項公式與前 n 項和公式,并能運用公式解決簡單的實際問題。

二、主要內容

1. 數列
2. 等差數列
3. 等差數列的前 n 項和
4. 等比數列
5. 等比數列的前 n 項和

三、設計創意和特色

1. 以問題為主的教學
2. 數學故事引入課題
3. 培養學生推導思想
4. 建構學生的數學思維
5. 將數學結合生活例子

四、教學課時

數列用 2 節課時,等差數列用 6 節課時,等比數列用 5 節課時,共 13 節課時。

貳、教案

一、數列

1. 數列(第一節)

<table>
<tr><td colspan="2">單元名稱:第三章 數列
第一節 等差數列
3.1 數列(一)</td><td>教材來源:
人民教育出版社
數學 第一冊(上)</td></tr>
<tr><td>教學
目標</td><td colspan="2">1.了解數列的定義、項、有窮數列和無窮數列;
2.理解數列的通項公式;
3.應用通項公式找出數列的第 n 項;</td></tr>
<tr><td colspan="3">重點: 理解數列的通項公式</td></tr>
<tr><td>時間
分配</td><td colspan="2">教學活動過程</td></tr>
<tr><td>15 分鐘</td><td colspan="2">課題引入:
拍賣遊戲:拿一些物品出來拍賣,請五位同學出來進行叫價,每位同學有 100 元,可以不叫價,最後投得最多物品的同學便能勝出遊戲。最後把五位同學最後的出價紀錄在白板。
(示範)活動開始:現在有請 5 位同學出來進行一個遊戲。
(1)現在拍賣一個全新水壺,底價 5 元,誰有興趣出價
同學 1:我出價 10 元
同學 3:我出價 15 元
同學 2:我出價 18 元
同學 1:我出價 20 元
老師:有沒有誰比同學 1 出價更高,沒有的話水壺便是同學 1。
然後紀錄:
<table>
<tr><td>同學</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>出價</td><td>20</td><td>18</td><td>15</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>
(2) 現在拍賣一個全新花瓶,底價 10 元,誰有興趣出價
<table>
<tr><td>同學</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>出價</td><td>11</td><td>14</td><td>18</td><td>15</td><td>16</td></tr>
</table>
(3) 現在拍賣一個全新拖鞋,底價 20
<table>
<tr><td>同學</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>出價</td><td>25</td><td>28</td><td>0</td><td>30</td><td>0</td></tr>
</table>
(4) 現在拍賣一個全新模型,底價 50 元,誰有興趣出價
<table>
<tr><td>同學</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	| 出價 | 80 | 75 | 52 | 65 | 70 | 同學 1 投得 2 件物品，所以勝出的是同學 1。 帶出主題：現在我們看看剛才的每次拍賣的結果。 同學 1：20, 11, 25, 80. 同學 2：18, 14, 28, 75. 同學 3：15, 18, 0, 52. 同學 4：0, 15, 30, 65. 同學 5：0, 16, 0, 10. 我們把四次拍賣出價結果，把同學每次出價的金額順序地排序，每位同學四次出價的金額可以看成一個**數列**，即五位同學就有五個**數列**。
5 分鐘	總結定義： 數列：按照一定的順序排成的一列數叫做**數列**。而數列中每一個數都叫做這個數列的**項**。各項依次叫做這個數列的第 1 項(首項)，第 2 項，…，第 n 項… 像剛才 20, 11, 25, 80. 這個數列第 1 項是 20, 第 2 項是 11, 第 3 項是 25, 第 4 項是 80. 一般地，數列的一般形式可以寫成 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 其中a_n是指數列的第 n 項. 有時我們會把上面的數列簡寫記作$\{a_n\}$ 如果數列$\{a_n\}$的第 n 項a_n與 n 之間的關係可以用一個公式來表示，那麼這個公式就叫**通項公式**。 就如數列 2, 4, 6, 8, 10, … ，這個數列也是 2 的倍數，我們能用 2n 來表示第 n 項a_n，則這個數列的通項公式就是$a_n = 2n$. 我們也可以用這個通項公式求出這個數列的各項。 如：第二項：$a_2 = 2 \times 2 = 4$；第十四項：$a_{14} = 2 \times 14 = 28$. 有窮數列：項數有限的數列叫做**有窮數列**。 如：(1) 1, 3, 5, 7, 9, …101；(2) 1000, 901, 802, 666, 777, …, 195 無窮數列：項數無限的數列叫做**無窮數列**。 如：(1) 1, 3, 5, 7, 9, … (2) 1000, 901, 802, 666, 777, … 歸納出有窮數到是有最尾一項，而無窮數列是沒有最尾一項。
14 分鐘	例：根據下列數列$\{a_n\}$的通項公式，寫出它的前 5 項 (1)$a_n = \frac{n}{n+1}$ (2)$a_n = (-1)^n \cdot n$ 題目分析：題目給了通項公式，根据通項公式的定義，我們只要把前 5 項序號代入通項公式的 n，然後把值求出，便能把它的前 5 項找出來。 (1) $a_n = \frac{n}{n+1}$ 解：$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

	$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ $a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$ $a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$ $a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$ ∴這個數列的前 5 項是：$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{4}{5}$和$\frac{5}{6}$. (2)$a_n = (-1)^n \cdot n$ 解：$a_1 = (-1)^1 \cdot 1 = -1$ $a_2 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$ $a_3 = (-1)^3 \cdot 3 = -3$ $a_4 = (-1)^4 \cdot 4 = 4$ $a_5 = (-1)^5 \cdot 5 = -5$ ∴這個數列的前 5 項是：-1、2、-3、4 和 -5. 練習： 求數列$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+2}$ 的前 5 項. 解：$a_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{1+2} = -\frac{1}{3}$ $a_2 = (-1)^2 \cdot \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$ $a_3 = (-1)^3 \cdot \frac{3}{3+2} = -\frac{3}{5}$ $a_4 = (-1)^4 \cdot \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$ $a_5 = (-1)^5 \cdot \frac{5}{5+2} = -\frac{5}{7}$ ∴這個數列的前 5 項是：$-\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$-\frac{3}{5}$、$\frac{2}{3}$和$-\frac{5}{7}$
1 分鐘	總結： 數列：按照一定的順序排成的一列數叫做**數列**。而數列中每一個數都叫做這個數列的**項**。 如果數列$\{a_n\}$的第 n 項a_n與 n 之間的關係可以用一個公式來表示，那麼這個公式就叫**通項公式**。 有窮數列：項數有限的數列叫做**有窮數列**。

	無窮數列：項數無限的數列叫做**無窮數列**。 **有窮數列**是**有**最尾一項，而**無窮數列**是**沒有**最尾一項。

2. 數列(第二節)

單元名稱:第三章 數列 第一節 數列 3.1 數列(二)		教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊（上）
教學目標	1.從數列中找出數列的通項公式 2.理解數列的遞推公式	
重點: 理解數列的遞推公式		
時間分配	教學活動過程	
5 分鐘	回顧： 數列：按照一定的順序排成的一列數叫做**數列**。而數列中每一個數都叫做這個數列的**項**。 如果數列$\{a_n\}$的第 n 項a_n與 n 之間的關係可以用一個公式來表示，那麼這個公式就叫**通項公式**。 練習： (1)已知一個數列的通項公式是$a_n = 2n$，寫出它的前 5 項 解：$a_n = 2n$ $a_1 = 2 \times 1 = 2$ $a_2 = 2 \times 2 = 4$ $a_3 = 2 \times 3 = 6$ $a_4 = 2 \times 4 = 8$ $a_5 = 2 \times 5 = 10$ ∴這個數列的前 5 項是 2、4、6、8 和 10. 有窮數列：項數有限的數列叫做**有窮數列。** 無窮數列：項數無限的數列叫做**無窮數列**。 **有窮數列**是**有**最尾一項，而**無窮數列**是**沒有**最尾一項。	
10 分鐘	例題講解： 例 1：找出數列 2, 5, 8, 11, 14 的通項公式. 題目分析：要找數列的通項公式，先要把數列的各項化成以 n 表示的形式。即是找出各項不變的部分和與 n 項對應 n 的部分。 解：$a_1 = 2 = 3 \times 1 - 1$； $a_2 = 5 = 3 \times 2 - 1$	

	$a_3 = 8 = 3 \times 3 - 1$； $a_4 = 11 = 3 \times 4 - 1$ $a_5 = 14 = 3 \times 5 - 1$ ∴數列的通項公式是$a_n = 3n - 1$. 練習：找出數列 4, 8, 12, 16, 20 的通項公式。 解：$a_1 = 4 = 4 \times 1$； $a_2 = 8 = 4 \times 2$ $a_3 = 12 = 4 \times 2$； $a_4 = 16 = 4 \times 4$ $a_5 = 20 = 4 \times 3$ ∴數列的通項公式是$a_n = 4n$.
9 分鐘	課題引入：遞推公式 一個數列的通項公式$a_n = 2^n$。 寫出它的前 5 項，並試找出這個數列項與項之間的特點。 根据通項公式，我們很快便得出這個數列的前 5 項是 2, 4, 8, 16, 32. 顯而易見，由第二項開始，每一項都是前一項的兩倍。 即$a_1 = 2$ $a_2 = 4 = 2 \times 2 = 2a_1$ $a_3 = 8 = 2 \times 4 = 2a_2$ $a_4 = 16 = 2 \times 8 = 2a_3$ $a_5 = 32 = 2 \times 16 = 2a_4$ 若果把這個數列按照這個方式寫下去，則有 $a_1 = 2$，$a_n = 2a_{n-1}$ 除了通項公式外，根據上面數列的第 1 項，以及項a_n和a_{n-1}之間的關係式，我們也可以寫出這個數列的各項。 像這樣，如果已知數列$\{a_n\}$的第 1 項(或前幾項)，且任一項a_n與它的前一項a_{n-1}(或前幾項)間的關係可以用一個公式來表示，那麼這個公式就叫做這個數列的**遞推公式**。 遞推公式也是給出數列的一種方法。
10 分鐘	例題講解： 例：已知數列$\{a_n\}$的第 1 項是 1，以后的各項由公式$a_n = 2(a_{n-1})^2 - 4$ 給 出，寫出這個數列的前 5 項。 題目分析：已知數列的第 1 項和這個數列的遞推公式，可以先從a_1求出a_2，再用a_2求出a_3，如此類推。最後求出a_5。 解：$a_1 = 1$ $a_2 = 2(a_1)^2 - 4 = 2 \times (1)^2 - 4 = -2$ $a_3 = 2(a_2)^2 - 4 = 2 \times (-2)^2 - 4 = 4$ $a_4 = 2(a_3)^2 - 4 = 2 \times (4)^2 - 4 = 28$

	$a_5 = 2(a_4)^2 - 4 = 2 \times (28)^2 - 4 = 1564$ ∴這個數列的前 5 項是 1, -2, 4, 28, 1564. 練習： 已知數列$\{a_n\}$的第 1 項是 2，以后的各項由公式$a_n = 4a_{n-1} - 2$給出寫出這個數列的前 5 項。 解：$a_1 = 2$ $a_2 = 4a_1 - 2 = 4 \times 2 - 2 = 6$ $a_3 = 4a_2 - 2 = 4 \times 6 - 2 = 22$ $a_4 = 4a_3 - 2 = 4 \times 22 - 2 = 86$ $a_5 = 4a_4 - 2 = 4 \times 86 - 2 = 342$ ∴這個數列的前 5 項是 2, 6, 22, 86, 342.
1 分鐘	總結： 如果已知數列$\{a_n\}$的第 1 項(或前幾項)，且任一項a_n與它的前一項a_{n-1}(或前幾項)間的關係可以用一個公式來表示，那麼這個公式就叫做這個數列的**遞推公式**。

二、等差數列

1. 等差數列(第一節)

單元名稱:第三章 數列 第二節 等差數列 3.2 等差數列(一)	教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊(上)
教學目標	1.了解等差數列的定義; 2.掌握等差數列的通項公式; 3.應用等差數列的通項公式找出等差數列的第 n 項;
重點:掌握等差數列的通項公式	
時間分配	教學活動過程
4 分鐘	回顧和課題引入: 回顧: 數列:按一定次序排成的列數,記作$\{a_n\}$ 項:數列中的一個數都叫做這個數列的項。 先說出下列數列的項: (1) {1, 2, 3, 4, 5}　　(2) {20, 40, 60, 80, 100} (3) {15, 20, 25, 30, 35}　　(4) {9, 13, 17, 21, 25} 然後讓學生觀察以上四個有窮數列,找出他們之間的共同點: 他們的共同點:四個數列中,它們相鄰的項相差的數也是一樣的。 引入新課題:我們稱這樣的數列為"等差數列"
8 分鐘	讓學生觀察等差數到的特點,總結定義。 等差數列:一般地,一個數列從第二項起,每一項與它的前一項的差等於一個常數,那麼這個數列就叫**等差數列**。這個常數就叫做**公差**,記作通常用字母 d 來表示。 探討等差數列,推出通項公式。 由等差數列的定義我們可以得到, $a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d, \dots\dots, a_n - a_{n-1} = d$ 由上可得 $a_2 = a_1 + d$ $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$ $a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$ …… $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$ 因此,等差數列的通項公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$

	我們若果知道一個等差數列的**公差**和**首項**，便能利用等差數列的**通項公式**找出這個等差數列的各項。
22 分鐘	例題講解： 例 1：一個等差數列$\{a_n\}$的公差是 2，首項是 7，求這個等差數列的前 5 項。 題目分析，已知等差數列的公差和首項，我們可以利用等差數列的通項公式找出這個等差數的前 5 項。(同時亦可以提示學生可以用等差數列的定義來找) 解：$a_1 = 7, d = 2$ $a_2 = a_1 + (2-1)d = 7 + 2 = 9$ $a_3 = a_1 + (3-1)d = 7 + 4 = 11$（或$a_2 + d = 9 + 2 = 11$） $a_4 = a_1 + (4-1)d = 7 + 6 = 13$（或$a_3 + d = 11 + 2 = 13$） $a_5 = a_1 + (4-1)d = 7 + 8 = 15$（或$a_4 + d = 13 + 2 = 15$） 答：這個等差數到的前 5 項是 7、9、11、13 和 15。 練習：一個等差數列$\{a_n\}$的公差是 3，首項是 5，求這個等差數列的前 5 項。 解：$a_1 = 5, d = 3$ $a_2 = a_1 + (2-1)d = 5 + 3 = 8$ $a_3 = a_1 + (3-1)d = 5 + 6 = 11$（或$a_2 + d = 9 + 2 = 11$） $a_4 = a_1 + (4-1)d = 5 + 9 = 14$（或$a_3 + d = 11 + 2 = 13$） $a_5 = a_1 + (4-1)d = 5 + 12 = 17$（或$a_4 + d = 13 + 2 = 15$） 答：這個等差數到的前 5 項是 5、8、11、14 和 17。 例 2：一個等差數列 8、5、2⋯，求它的第 7 項。 題目分析：要求等差數列的第 7 項，可以利用等差數列的通項公式找出，要先把首項和公差找出，首項從題目可以直接得出，而公差可以通過第二項和第一項得出，有首項和公差便能得到這個等差數列的通項公式，從而把第 7 項求出來。 解：$a_1 = 8$ ，$d = a_2 - a_1 = 5 - 8 = -3$ $a_7 = a_1 + (7-1)d = 8 + 6 \times (-3) = -10$ 答：這個等差數列的第 7 項是-10。 從上題可知，等差數列的公差不一定是正數，公差是正數的等差數列是**遞增**，而公差是負數的等差數列是**遞減**。 練習：一個等差數列 12、7、2⋯，求它的第 13 項。 解：$a_1 = 12$ ，$d = a_2 - a_1 = 7 - 12 = -5$ $a_{13} = a_1 + (13-1)d = 12 + 12 \times (-5) = -42$ 答：這個等差數列的第 13 項是-42。

1 分鐘	總結： ● 等差數列：一般地，一個數列從第二項起，每一項與它的前一項的差等於一個常數，那麼這個數列就叫**等差數列**。這個常數就叫做**公差**，記作通常用字母 d 來表示。 ● 等差數列通項公式：$a_n = a_1 + (n-1)d$

2. 等差數列(第二節)

單元名稱:第三章 數列 第二節 等差數列 3.2 等差數列(二)		教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊（上）
教學目標	1. 掌握等差數列的定義； 2. 應用等差數列的通項公式；	
重點:應用等差數列的通項公式		
時間分配	教學活動過程	
10 分鐘	回顧： 等差數列：一般地，一個數列從第二項起，每一項與它的前一項的差等於一個常數，那麼這個數列就叫**等差數列**。這個常數就叫做**公差**，記作通常用字母 d 來表示。 讓學生判斷下列有窮數列是否等差數列。(口答) 1. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$　　2. $\{1, 3, 5, 9, 11\}$ 3. $\{9, 5, 1, -3, -7\}$　　4. $\{2, -4, 6, -8, 10\}$ 解答：1, 3 是等差數列，因為第二項起，每一項與它的前一項的差都等於一個常數。2, 4 不是等差數列，在 2 中，第四項和第三項的差與其餘每一項和它前一項的差不相同。同時強調等差數列必須要每相鄰兩項都要符合每一項與前一項的差等於一個常數，才是等差數列。 等差數列通項公式：$a_n = a_1 + (n-1)d$ 其中a_1是首項，n是第n項，d是公差。	
24 分鐘	例題講解： 例 1：-401 是不是等差數列-5, -9, -13, ……的項，如果是，是第幾項? 題目分析：若果-401 是這個等差數列的項，則-401 在這個等差數列的通項公式成立，先找出這個等差數列的公差和首項，繼而得到通項公式，最後把-401 代進這個通項公式，然後把 n 算出，若果 n 是正整數，則它是這個等差數列的項，否則則不是。	

	解：$a_1 = -5$， $d = a_3 - a_2 = -9 - (-5) = -4$ 得通項公式：$a_n = -5 - 4(n-1)$ 把-401 得： $-401 = -5 - 4(n-1)$ $4(n-1) = -5 + 401$ $4n - 4 = 396$ $4n = 400$ $n = 100$ ∵$n = 100$是正整數 ∴-401 是這個等差數列的項，是第 100 項。 練習：-16 是不是等差數列 2, 4, 6, ……的項，如果是，是第幾項? 解：$a_1 = 2$， $d = a_3 - a_2 = 6 - 4 = 2$ 得通項公式：$a_n = -5 - 4(n-1)$ 把-401 得： $-16 = 2 + 2(n-1)$ $-2(n-1) = 2 + 16$ $-2n + 2 = 18$ $-2n = 16$ $n = -8$ ∵$n = -8$不是正整數，與數列定義矛盾 ∴-16 不是這個等差數列的項。 例 2：在等差數列$\{a_n\}$中， (1)已知$a_1 = 2, \mathrm{d} = 3, \mathrm{n} = 10,$ 求a_n； (2)已知$a_1 = 12, a_6 = 27,$ 求 d； (1)題目分析，已知a_1,d,n，可以直接用通項公式算出$\{a_n\}$ 解：$a_1 = 2, \mathrm{d} = 3, \mathrm{n} = 10$ $a_{10} = 2 + 3(10-1) = 2 + 27 = 54$ ∴a_{10}是54. (2) 題目分析，已知a_1,a_6，可以把a_6與a_1代入通項公式從而算出d。 解：$a_1 = 12, a_6 = 27,$ $a_6 = a_1 + (6-1)d$ $27 = 12 + 5d$ $-5d = 12 - 27$ $d = 3$ ∴d是 3 練習：在等差數列$\{a_n\}$中， (1)已知$a_1 = 3, a_n = 21, \mathrm{d} = 2,$ 求n； (2)已知$d = -2, a_7 = 8,$ 求a_1；

	(1)解：$a_1 = 3, a_n = 21, \mathrm{d} = 2$ $a_n = a_1 + (n-1)d$ $27 = 3 + 2(n-1)$ $n = 13$ $\therefore n$是 13. (2)解：$d = -2, a_7 = 8,$ $a_7 = a_1 + (7-1)d$ $8 = a_1 + 6 \times (-2)$ $a_1 = 20$ $\therefore a_1$是 20.
1 分鐘	總結： ● 等差數列：一般地，一個數列從第二項起，每一項與它的前一項的差等於一個常數，那麼這個數列就叫**等差數列**。這個常數就叫做**公差**，記作通常用字母 d 來表示。 ● 等差數列通項公式：$a_n = a_1 + (n-1)d$ ● 判斷一個數是否這個等差數列的項，我們可以把這個數代入這個等差數列的通項公式，然後把 n 求出，若 n 是**正整數**，則這個數是這個等差數項的項，若果不是，則這個數不是這個等差數列的項。

3. 等差數列(第三節)

單元名稱:第三章 數列 第二節 等差數列 3.2 等差數列(三)		教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊（上）
教學 目標	1.認識等差中項的定義； 2.應用等差中項的公式； 3.結合等差中項公式和等差數列通項公式解決問題；	
重點: 應用等差中項的公式		
時間 分配	教學活動過程	
4 分鐘	回顧： 等差數列：一般地，一個數列從第二項起，每一項與它的前一項的差等於一個常數，那麼這個數列就叫**等差數列**。這個常數就叫做**公差**，記作通常用字母 d 來表示。 等差數列通項公式：$a_n = a_1 + (n-1)d$	

	其中a_1是首項，n是第n項，d是公差。
10 分鐘	提出問題：如果在兩個數中間插入一個數，使這三個數成為等差數列，那麼這個數需要滿足甚麼條件呢? 假設：這兩個數為a和 b，插入的數為 A，則把這三個數排成 a，A，b。根据等差數列的定義，要使這三個數成等差數列，我們有 $\mathrm{A}-a=b-\mathrm{A}$ 化簡得 $2\mathrm{A}=b+a$ $\mathrm{A}=\dfrac{a+b}{2}$ 反過來看，若果我們有 $\mathrm{A}=\frac{a+b}{2}$，則$\mathrm{A}-a=b-\mathrm{A}$，即 a，A，b 成等差數列。我們稱這個插入的數 A 為**等差中項**。 給出定義： 等差中項：一般地，如果 a，A，b 成等差數列，這個 A 叫做 a 和 b 的**等差中項**。
10 分鐘	例題講解： 例 1：求下列各題中兩個數的等差中項。 (1)100 和 180； (2)-2 和 6； 題目分析：我們能直接用等差中項公式求兩個數的等差中項 (1)$\mathrm{A}=\frac{100+180}{2}=140$ ∴這兩個數的等差中項是 140 (2)$\mathrm{A}=\frac{-2+6}{2}=2$ ∴這兩個數的等差中項是 2 例 2：在等差數列$\{a_n\}$中，已知$a_3=4$，$a_5=14$，求a_1、d. 題目分析：在等差數列$\{a_n\}$中，因為a_1和a_3相差了$2d$，而a_3和a_5也相差了$2d$。因此我們可以把a_1、a_3和a_5看成等差數列，而a_3便是a_1和a_5的等差中項，所以我們可以把a_3和a_5代進等差中項公式，從而把a_1求出，再透過等差數列通項公式把 d 求出。 解：$a_3=\frac{a_1+a_5}{2}$　　　$a_3=a_1+2d$ $4=\frac{a_1+14}{2}$　　　$4=-6+2d$ $8=a_1+14$　　　$2d=10$

	$a_1 = -6$ $d = 5$ $\therefore a_1$是-6、d是 5.
10 分鐘	練習： 例 2：在等差數列$\{a_n\}$中，已知$a_2 = 12$，$a_6 = -8$，求a_4、d. 解： $a_4 = \frac{a_2+a_6}{2} = \frac{12+(-8)}{2} = 2$ $a_4 - a_2 = 1 - 10$ $a_1 + 3d - (a_1 + d) = 2 - 10$ $2d = -8$ $d = -4$ $\therefore a_4$是2、d是-4。
1 分鐘	總結： ● 等差中項：一般地，如果 a，A，b 成等差數列，這個 A 叫做 a 和 b 的**等差中項**。 ● 等差中項公式：$A = \frac{a+b}{2}$

三、等差數列的前 n 項和

1. 等差數列的前 n 項和(第一節)

單元名稱:第三章 數列 第三節 等差數列前 n 項和 3.3 等差數列前 n 項和(一)		教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊(上)
教學目標	1. 從數學問題探究求和公式 2. 理解等差數列求和公式 3. 應用等差數列求和公式解決簡單等差數列求問題	
重點: 從數學問題探究求和公式		
時間分配	教學活動過程	
7 分鐘	回顧和課題引入: 等差數列:一般地,一個數列從第二項起,每一項與它的前一項的差等於一個常數,那麼這個數列就叫**等差數列**。這個常數就叫做**公差**,記作通常用字母 d 來表示。 等差數列通項公式:$a_n = a_1 + (n-1)d$ 其中a_1是首項,n是第n項,d是公差。 從故事引入: “在十八、十九世紀,德國有位天才數學家名叫高斯。在他還未三歲的時候,他父親在工廠當工頭,正為他的工人算薪水時,好不容易才算出的總數,高斯一聽便搖搖頭:父親,你算錯了,總數是……。結果父親再算真的是高斯說出的總數。 在高斯上學後,有一天,老師給了他一道難題試算出“1+2+3+……+99+100” 。” 然後給 2 分鐘時間,給學生算出。 	
18 分鐘	公式推導 讓學生公布答案,然後問學生怎樣算出,再把高斯的算法告訴他們。 解:$1+2+3+\cdots\ldots+99+100$ $=(1+100)+(2+99)+(3+97)+\cdots+(50+51)$ (每個組合的和都是 101) $=50\times101$ (有 50 個這樣的組答)	

	$= 5050$ 然後提問學生： 高斯的老師問了高斯一個怎樣的問題?(1+2+3+⋯+100) 追問：1 到 100 可以看成一個數列嗎?(可以) 這個數列是甚麼數列?(等差數列) 這個數列有多少項?首項是甚麼?公差是甚麼?末項是甚麼? ($n = 100$、$a_1 = 1$、$d = 1$、$a_n = 100$) 高斯怎樣算出這個答案? (首項與末項相加，第二項與尾二項相加，如此類推，這樣的組合 得到相同結果的和，共可以配出 50 個這樣的組合) 再提出問題： 若果把上述偶數項去掉，即”1+3+5+⋯⋯+97+99”。然後與學生一起用高斯的方法算出答案。 解：$1 + 3 + 5 + \cdots + 99$ $= (1 + 99) + (3 + 97) + (5 + 95) + \cdots + (49 + 51)$ (每個組合的和都是 100) $= 25 \times 100$ (共有 25 個這樣的組答) $= 2500$ 追問：為甚麼還能用高斯的方法求出答案?(因為它還是等差數列) 那麼它有多少項?首項是甚麼?公差是甚麼?末項是甚麼? ($n = 50$、$a_1 = 1$、$d = 2$、$a_n = 99$) 嘗試用文字表示高斯的方法：$總和 = \frac{項數}{2} \times (首項 + 末項)$ 提出問題：是否所有等差數列求和也可以用高斯的方法來算? 若果把上述序數是偶數的項去掉，即”1+5+⋯⋯+97”。然後與學生一起用高斯的方法算出答案。 解：$1 + 5 + \cdots + 97$ $= (1 + 97) + (3 + 93) + (5 + 89) + \cdots + (45 + 53) + 49$ 好像用不了高斯的方法，多了一項。 追問：這個數列是否等差數列?有多少項?為甚麼多了項? (是，共有 25 項，所以只能配出 12 對，還有一項不能配對) 這項是第幾項，該項是多少，並且和首項和末項有甚麼關係? (這項是第十三項，讓項是 49，正正就是首項和末項的等差中項)

	雖然項數是奇數，但其實用高斯的方法也可以求到等差數列的和。 $\because 1+5+\cdots+97$ $=12\times(1+97)+49$ 又 49 是首項和末項的等差中項 $=12\times(1+97)+\frac{(1+97)}{2}$ $=\frac{24(1+97)}{2}+\frac{(1+97)}{2}$ $=\frac{(24+1)(1+97)}{2}$ $=\frac{25(24+1)}{2}=\frac{項數(首項+末項)}{2}$ 所以到最後還是可以把它化成高斯的方法。 我們把等差數列前 n 項和、項數、首項和末項記作S_n、n、a_1、a_n，則有 $$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$
9 分鐘	例題講解 例 1：一個等差數列$\{a_n\}$的首項是 2，第 13 項是 70，求前 13 項的總和。 題目分析：已知首項、第 13 項，求前 13 項的和即第 13 項就是末項，而項數是 13，所以可以用等差數列求和公式來求前 13 項的和 解：$S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=\frac{13(2+70)}{2}=436$ ∴前 13 項的總和是 436。 練習： 在等差數列$\{a_n\}$中，$a_1=5$，$a_7=-35$，求S_7。 解：$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(5-35)}{2}=-105$ ∴前 7 項的總和是-105。
1 分鐘	等差數列求和公式： $$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

2. 等差數列的前 n 項和(第二節)

單元名稱:第三章 數列 第三節 等差數列前 n 項和 3.3 等差數列前 n 項和(二)		教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊(上)
教學目標	1. 掌握等差數列求和公式(1) $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 2. 透過等差數列求和公式(1) $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 推導出 等差數列求和公式(2) $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$ 3. 應用等差數列求和公式(2)解決等差數列求和問題	
重點:透過等差數列求和公式(1) $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 推導出 等差數列求和公式(2) $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$		
時間分配	教學活動過程	
6 分鐘	回顧和課題引入: 等差數列通項公式:$a_n=a_1+(n-1)d$ 其中a_1是首項,n是第n項,d是公差。 等差數列求和公式: $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 練習: 在等差數列$\{a_n\}$中,$a_9=45$,$S_9=225$,求a_1。 解:$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}$ $225=\frac{9(a_1+45)}{2}$ $50=a_1+45$ $a_1=5$ $\therefore a_1$是5.	

16 分鐘	提出問題： 在等差數列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$d=-2$，求s_9。 題目分析：題目已知a_1和d，要求s_9，根等差數列求和公式，我們要求s_9必須先求出a_9，可以透過a_1和d求出a_9，然後把它代入求和公式求出s_9。 解：$a_9=a_1+(9-1)d=3+8\times(-2)=13$ $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(3-13)}{2}=-45$ $\therefore S_9$是-45. 提出問題：是否每次遇到這樣的題目也要把末項求出才能把前n項的和求出? 我們不妨試試把通項公式$a_n=a_1+(n-1)d$代進 求和公式$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 看看有甚麼結果? $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ $S_n=\frac{n[a_1+a_1+(n-1)d]}{2}$ $S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ $S_n=\frac{2na_1+n(n-1)d}{2}$ $S_n=\frac{2na_1}{2}+\frac{n(n-1)d}{2}$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$ 所以以後我們不知道末項，但知首項、公差和項數也可以用這公式求出等差數列前 n 項和 $$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$$
12 分鐘	例題講解： 例 1：等差數列-10, -6, -2, 2, …前多少項的和是 54? 題目分析：由題目得知a_1和S_n，要求n。我們能用等差數列前n項和公式去求，因為不知道末項a_n的值。而公差d我們能夠用第二項與第一項相減求出，所以我們能用剛才推出的等差數列前 n 項和公式(2)來求n。

	解：根据題意：$a_1=-10$、$d=a_2-a_1=-6-(-10)=4$、$S_n=54$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$ $54=-10n+\frac{n(n-1)4}{2}$ $54=-10n+2n(n-1)$ $54=-10n+2n^2-2n$ $2n^2-12n-54=0$ $n^2-6n-27=0$ $(n-9)(n+3)=0$ $\therefore n=9$ 或 $n=-3$(不合，捨去) 答：該等差數列的前 9 項和是 54。 練習： 等差數列-5, -1, 3, 7, …前多少項的和是 72? 解：根据題意：$a_1=-5$、$d=a_2-a_1=-1-(-5)=4$、$S_n=72$ $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$ $72=-5n+\frac{n(n-1)4}{2}$ $72=-5n+2n(n-1)$ $72=-5n+2n^2-2n$ $2n^2-7n-72=0$ $(n-8)(2n+9)=0$ $\therefore n=8$ 或 $n=-\frac{9}{2}$(不合，捨去) 答：該等差數列的前 8 項和是 72。
1 分鐘	等差數列求前 n 項的和： ● 有首項，末項和項數，用公式(1) $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ ● 有首項，公差和項數，用公式(2) $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$

3. 等差數列的前 n 項和(第三節)

單元名稱:第三章 數列 第三節 等差數列前 n 項和 3.3 等差數列前 n 項和(3)	教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊(上)

教學目標	1. 掌握等差數列求和公式(1) $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 和 公式(2) $S_n=\mathrm{n}a_1+\frac{n(n-1)d}{2}$ 2. 應用等差數列求和公式(1)和公式(2)解決實際等差數列求和問題
重點: 應用等差數列求和公式(1)和公式(2)解決實際等差數列求和問題	
時間分配	教學活動過程
9 分鐘	回顧和課題引入: 等差數列通項公式:$a_n=a_1+(n-1)d$ 其中a_1是首項,n是第n項,d是公差。 等差數列求和公式(1): $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 等差數列求和公式(2): $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$ 回顧練習: 在等差數列$\{a_n\}$中 (1)$a_1=5$,$a_7=19$,求S_7 (2)$a_1=13$,$\mathrm{d}=-2$,求S_{12} 解:(1) $S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(5+19)}{2}=84$ (2) $S_{12}=12a_1+\frac{12(12-1)d}{2}=12\times13+\frac{12(12-1)(-2)}{2}=24$

25 分鐘	例題講解： 例 1：一個等差數列的第 6 項是 5，第 3 項與第 8 項的和也是 5. 求這個等差數列前 9 項的和。 題目分析：要求等差數列前 9 項的和，就要用等差數列求和公式，求和公式需要a_1、a_9或a_1、d。題目給了a_6、a_3+a_8，這兩個條件也和a_1、d 有關，我們可以利用它們把a_1、d 求出，然後把a_1、d 代入求和公式(2)把S_9求出。 解：据題意得： $a_6=a_1+5d=5$ 、$a_3+a_8=a_1+2d+a_1+7d=2a_1+9d=5$ $\begin{cases}a_1+5d=5--\ (1)\\2a_1+9d=5--(2)\end{cases}$ 把$(1)\times 2$得 $2a_1+10d=10---(3)$ 把$(3)-(2)$得 $2a_1+10d-(2a_1+9d)=10-5$ $d=5------(4)$ 把(4)代入(1) $a_1+5\times 5=5$ $a_1=-15$ $S_9=9a_1+\dfrac{9(9-1)d}{2}=9\times(-15)+\dfrac{9\times8\times5}{2}=45$ ∴這個等差數列前 9 項的和是 45。 練習： 一個等差數列的第 3 項是 7，第 4 項與第 6 項的和是 26. 求這個等差數列前 10 項的和。 解：据題意得： $a_3=a_1+2d=7$ 、$a_4+a_6=a_1+3d+a_1+5d=2a_1+8d=26$ $\begin{cases}a_1+2d=7--\ (1)\\2a_1+8d=26--(2)\end{cases}$ 把$(1)\times 2$得 $2a_1+4d=14---(3)$ 把$(2)-(3)$得 $2a_1+8d-(2a_1+4d)=26-14$ $4d=12$ $d=3----(4)$ 把(4)代入(1) $a_1+2\times 3=7$ $a_1=1$ $S_{10}=10a_1+\dfrac{10(10-1)d}{2}=10\times1+\dfrac{10\times9\times3}{2}=145$ ∴這個等差數列前 10 項的和是 145。 例 2：一個劇場設置了 20 排座位，第一排有 38 個座位，往後每一排都

	比前一排多 2 個座位。這個劇場一共設置了多少個座位？ 題目分析：根據題意，我們可以把劇院座位數看成一個等差數列，第一排可看成為首項是 38，因為每一排都比前一排多 2 個座位，所以公差是 2，共有 20 排，即這個等差數列共有 20 項，要求所有座位即是要求這個等差數列的前 20 項和。 解：設這個劇場一共設置了S_{20}個座位。 $S_{20}=20a_1+\frac{20(20-1)d}{2}=20\times 38+\frac{20\times19\times2}{2}=1140$ 答：這個劇場一共設置了 1140 個座位。
1 分鐘	等差數列求前 n 項的和： ● 有首項，末項和項數，用公式(1) $s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ ● 有首項，公差和項數，用公式(2) $s_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$

四、等比數列

1. 等比數列(第一節)

單元名稱:等比數列(第一節)	教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊(上)
教學目標	1. 掌握等比數列的定義; 2. 掌握等比數列的通項公式及推導。
重難點	重點:等比數列的定義及通項公式。 難點:等比數列的通項公式的靈活運用。

時間分配	教學活動過程

約 5 分鐘

一. 複習回顧

在學習等差數列時,我們知道該數列的每一項與前一項的差值都是一個常數,亦即是數列每一項都會根據着某種要求變化所得,本節課將會學習另一種有「規律」的數列。

二. 創設情境,透過數學小故事激發學生興趣

在古印度流傳著一段古老的傳說:印度國王讚賞 64 格西洋棋的娛樂性,決定重賞鼓勵發明人希薩。希薩要求印度國王賞給他麥子,只要在棋盤的第一小格放置一粒,第二小格放置兩粒,第三小格放置四粒……,依此類推,每一小格內的麥子數都是前一格的 2 倍,直到放滿每一小格為止,國王認為棋盤只有 64 小格,便答應了要求,請問同學們,你認為國王能滿足希薩的要求嗎?

約 10 分鐘

三. 解決問題

1. 問題 1:承上述故事所述,第七小格應該要放多少粒麥子?

答:由題意知,第一小格放一粒,第二小格放兩粒,第三小格放置四粒……,每一小格內都麥子數都是前一格的 2 倍,則第七小格應該要放 $2^6=64$ 粒麥子。

問題 2:國王可以解決希薩提出的要求嗎?

答:不妨將每一個格子所需要的麥子數目看作成一列數列表示,則有

第 1 格	第 2 格	第 3 格	第 4 格	第 5 格	第 6 格	…	第 64 格
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	…	a_{64}
1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	…	2^{63}

經計算可知 $a_{64}=2^{63}=9223372036854776000$,而這個數字已經遠遠超過整個印度倉庫裡的所有麥子總數,甚至當時全球麥子的總收獲,都不夠獎賞給希

<table>
<tr><td>約 5
分鐘

約 10
分鐘

約 5
分鐘</td><td>薩。

2. 探究: 在計算每一格的麥子數目時, 同學們能想出合理、快捷的計算方法嗎?(公比與序號之間的關係)譬如說, 第十格所需的麥子數目是多少?(小組討論、計算)

3. 等比數列的定義:
若數列 $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ 中從第二項起, 每一項與前一項的比都是一個常數, 這個常數稱為公比, 常用 q 表示。

4. 等比數列的公式
根據等比數列的定義可得: $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$
則 $a_2 = a_1 q$
$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$
$a_4 = a_3 q = a_1 q^3$
……
由此推得, 數列的通項公式為
$a_n = a_{n-1} q = a_1 q^{n-1}$
5. 思考: 利用通項公式求數列中其中一項需要知道甚麼條件?(學生回答)
探究中的問題可根據通項公式解決:
第十格的所需的麥子數目是: $a_{10} = a_1 q^9 = 512$
6. 問題 3: 探究中的問題, 我們可以透過問題 1 的結論去解決嗎?
答: 因為 $a_7 = 64,$
$a_8 = a_7 q$
$a_9 = a_8 q = a_7 q^2$
$a_{10} = a_9 q = a_7 q^3 = 512$
7. 引導學生歸納:
一般地, 等比數列的通項公式可表示為: $a_n = a_m q^{n-m} (m \le n)$

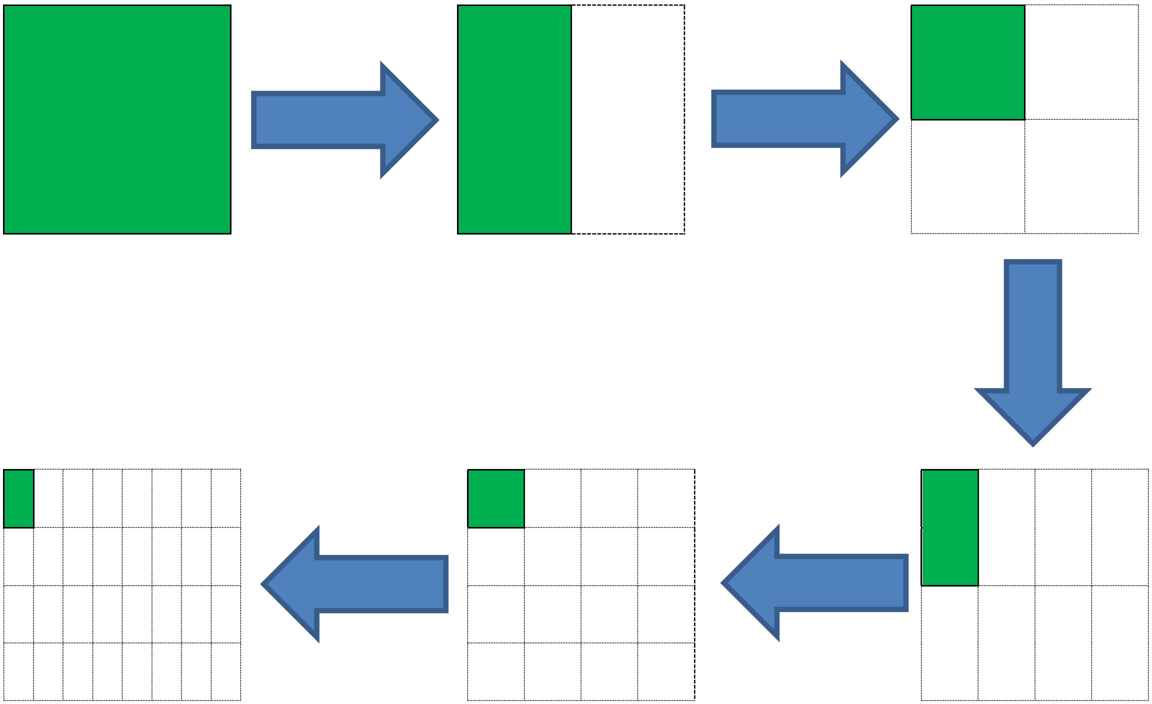
四. 小結
1. 等比數列的定義
2. 等比數列中公比的公式、通項公式

五. 課後練習
1. 求下面等比數列的第 4 項與第 5 項:
(1). $5, -15, 45, \cdots;$
(2). $1.2, 2.4, 4.8, \cdots;$</td></tr>
</table>

	(3). $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{8},\cdots$; (4). $\sqrt{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2},\cdots$.

2. 等比數列(第二節)

單元名稱:等比數列(第二節)		教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊(上)
教學目標	1. 掌握等比數列的定義; 2. 掌握等比數列的通項公式。	
重難點	重點:等比數列的定義及通項公式。	
	難點:等比數列的通項公式的靈活運用。	
時間分配	教學活動過程	
約 1 分鐘 約 12 分鐘	一. 複習回顧 上節課學習了等比數列的定義及其通項公式, 現在作個簡單回顧。 等比數列的定義: 若數列 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ 中從第二項起, 每一項與前一項的比都是一個常數, 這個常數稱為公比, 常用 q 表示。 等比數列的公比公式: $q=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 通項公式: $a_n=a_1q^{n-1}$ 或 $a_n=a_mq^{n-m}(m\le n)$ 二. 例題講解 例 1. 一個等比數列的第 3 項與第 4 項分別是 12 與 18, 求它的第 1 項與第 2 項。 解: 由等比數列的公比公式得: $q=\frac{a_4}{a_3}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$, 再由等比數列的通項公式得: $a_3=a_2q\Rightarrow a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{12}{\frac{3}{2}}=8$, $a_2=a_1q\Rightarrow a_1=\frac{a_2}{q}=\frac{8}{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$. 答:該數列的第一項是 $\frac{16}{3}$,第二項是 8. 例 2. 一個等比數列的第五項是 $\frac{4}{9}$,公比是 $-\frac{1}{3}$, 求它的第一項。	

約 12 分鐘	解：由等比數列的通項公式得：$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow a_1 = \dfrac{a_5}{q^4} = \dfrac{\frac{4}{9}}{(-\frac{1}{3})^4} = 36$ 答:該數列的第一項是 36. 解題要點:從上述兩道例題不難發現,在等比數列(等差數列同樣適用)中,若知道 3 個條件(數列中任何兩項、公比)中的其中 2 個條件,則數列中的任何一項都可由通項公式求得。 三. 習題鞏固 1. 在等比數列$\{a_n\}$中, (1). 已知$a_1 = 1, q = 3$,求a_5。 (2). 已知$a_3 = 8, q = \dfrac{3}{2}$,求$a_6$。
約 8 分鐘	四. 變式訓練 試想一想:將一張手工紙對摺六次,其面積會是原本的幾倍? 解:將手工紙每對摺一次其面積如下圖所示。  可以設手工紙面積為 1,則對摺一次其面積為$\dfrac{1}{2}$,…,如此類推,面積的數值是一個首項為 1,公比為$\dfrac{1}{2}$的等比數列,則$a_6 = a_1 q^5 = 1\times(\dfrac{1}{2})^5 = \dfrac{1}{32}$,所以對摺六次後的面積是原面積的$\dfrac{1}{32}$倍。
約 2	五. 小結 1. 等比數列的定義

分鐘	2. 等比數列中公比的公式、通項公式 六. 課後練習 1. 在等比數列$\{a_n\}$中, (1). 已知$a_2=16, a_4=64,$ 求q。 (2). 已知$a_2=12, a_3=16,$ 求a_7。

3. 等比數列(第三節)

單元名稱:等比數列(第三節)		教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊(上)
教學目標	1. 掌握等比數列的性質; 2. 掌握等比數列的中項公式。	
重難點	重點:等比數列的性質及中項公式。	
	難點:等比數列的性質的靈活運用。	

時間分配	教學活動過程
約 1 分鐘	一. 複習回顧 我們知道等差數列和等比數列都是一種有特殊規律的數列, 數列中每兩相鄰項都有着特殊的關係, 而數列中任意一項都可以根據通項公式來解決, 現在來探討一下等比數列中各項之間有甚麼的連繫。 二. 探究新知
約 15 分鐘	1. 觀察下列等比數列 (1). $1,2,4,8,16,\cdots;$ 不難發現將第 1 項與第 5 項相乘的結果是 16, 而第 2 項與第 4 項相乘的結是亦是 16, 這是巧合嗎?再看下一組數列. (2). $1,-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots;$ 同理$1\times\frac{1}{81}=(-\frac{1}{3})\times(-\frac{1}{27})$, 這又是巧合嗎?(這裡老師給學生一些思考時間,並提問學生, 能舉例出另外兩組數相乘的結果亦是相等嗎?如$1\times8=2\times4$等) 2. 將上述兩組數列可以寫成一般形式: 即$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots;$又因為等比數列可表示為: $a_1,a_1q,a_1q^2,a_1q^3,a_1q^4,\cdots;$ 則$a_1\cdot a_5=a_1\cdot a_1q^4=a_1^2q^4$, 又$a_2\cdot a_4=a_1q\cdot a_1q^3=a_1^2q^4$, $\therefore a_1\cdot a_5=a_2\cdot a_4$. 這說明了等比數列$\{a_n\}$中, 若$m+n=p+q$, 則$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$, 這就是等比數列的性質.

	特別地, 等比數列中有 3 項 a_i, a_j, a_k, 若 $i+k=2j$ 時, 則 $a_j^{\ 2}=a_i \cdot a_k$ 或 $a_j=\pm\sqrt{a_i \cdot a_k}$, 其中 a_j 稱為 a_i 與 a_k 的等比中項.
約 5 分鐘	三. 例題講解 在等比數列 $\{a_n\}$ 中, 已知每一項均為正數, 且 $a_3=9, a_9=4$, 求 a_6. 解: 由等比數列的性質得, $a_6^{\ 2}=a_3 \cdot a_9=9\times4=36$, 由於數列中每一項均為正數, 所以 $a_6=\sqrt{36}=6$.
約 12 分鐘	四. 習題鞏固 1. (1). 求 45 與 80 的等比中項; (2). 求 $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ 與 $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ 的等比中項. 2. 在等比數列 $\{a_n\}$ 中, $a_5=4, a_7=6$, 求 a_9.
約 2 分鐘	五. 小結 1. 等比數列的性質 2. 等比數列的中項公式
	六. 課後練習 1. (1). 求 $7+3\sqrt{5}$ 與 $7-3\sqrt{5}$ 的等比中項; (2). 已知 b 是 a 與 c 的等比中項, 且 $abc=27$, 求 b.

五、等比數列的前 n 項和

1. 等比數列的前 n 項和(第一節)

<table>
<tr><td colspan="3">單元名稱:等比數列的前n項和(第一節)</td><td>教材來源:
人民教育出版社
數學 第一冊(上)</td></tr>
<tr><td colspan="2">教學
目標</td><td colspan="2">1. 掌握等比數列的前n項和公式及公式的推導;
2. 能用等比數列的前n項和公式解決等比數列的相關問題。</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">重難點</td><td colspan="2">重點:等比數列的前n項和公式。</td></tr>
<tr><td colspan="2">難點:等比數列的前n項和公式的靈活運用。</td></tr>
<tr><td>時間
分配</td><td colspan="3">教學活動過程</td></tr>
<tr><td>約 1
分鐘

約 15
分鐘</td><td colspan="3">一. 複習回顧
回想一下學等比數列之前所提到西洋棋盤的小故事, 裡面所講的是一個以首項為 1, 公比為 2 的等比數列前 64 項求和的問題, 現在來探討一下求和的一些技巧。

二. 探究新知
承上題, 將前 64 項的和表示為: $S_{64}=1+2+4+8+...+2^{62}+2^{63}$, 事實上, 我們可以將數列的每一項先計算, 再計算總和, 但這樣太過煩瑣, 現在不妨回想起, 在學習等差數列的前n項和公式時用到首尾項相加的證明方法, 能不能運用到求等比數列前n項和公式的推導呢?
1. 試驗 1
將該數列的第 1 項與第 64 項相加: $1+2^{63}$
第 2 項與第 63 項相加: $2+2^{62}$
...
第 32 項與第 33 項相加: $2^{31}+2^{32}$
顯然, 在計算總和的技巧上並沒有幫助, 這是由於等差數列中任意兩項的差都是公差的倍數, 而在等比數列中, 任意兩項的商都是公比的平方數, 所以用分組加法並不適合。

2. 試驗 2
將該數列的總和乘上公比得: $2S_{64}=2+4+8+16+...+2^{63}+2^{64}$
對比原數列的總和: $S_{64}=1+2+4+8+...+2^{62}+2^{63}$
我們會發現兩個數列的總和的式子中有一些數是重複出現, 如下列所示:

$2S_{64}=\ \ 2+4+8+16+...+2^{63}+2^{64}$</td></tr>
</table>

$$S_{64}=1+2+4+8+...+2^{62}+2^{63}$$

兩式相減得: $(2-1)S_{64}=2^{64}-1$ 整理得 $S_{64}=\dfrac{2^{64}-1}{2-1}$,可以將這個求和方法推廣到一般情況, 即一個等比數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 $S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$,可以用上述的方法得到 $S_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}$,即在求和時就有個明確有效的方法。

3. 等比數列的前 n 項和公式

當 $q\neq 1$ 時

(1). $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$

(2). $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

當 $q=1$ 時

(1). $S_n=na_1$

即求等比數列的前 n 項和時, 只需知道 4 項條件 a_1,a_n,q,n 中其中 3 項就可根據上述公式求得。

三. 例題講解

約 5 分鐘

1. 求等比數列 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},...$ 的前 8 項的和.

解: 由 $a_1=\dfrac{1}{2},q=\dfrac{1}{4}\div\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2},n=8,$ 得

$$S_8=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}$$

四. 習題鞏固

約 12 分鐘

1. 根據下列各題中的條件, 求相應的等比數列 $\{a_n\}$ 的 S_n:

(1). $a_1=3,q=2,n=6;$

(2). $a_1=8,q=\dfrac{1}{2},a_n=\dfrac{1}{2};$

2. 求等比數列 $1,2,4,...$ 從第 5 項到第 10 項的和;

五. 小結

1. 等比數列的前 n 項和公式

當 $q\neq 1$ 時

(1). $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$

當 $q=1$ 時

(1). $S_n=na_1$

約 2

分鐘	(2). $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 六. 課後練習 1. 求等比數列$\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{8},\ldots$從第 3 項到第 7 項的和; 2. 在等比數列$\{a_n\}$中, 已知$a_1=-1.5, a_4=96$, 求$q$與$S_4$.

2. 等比數列的前 n 項和(第二節)

單元名稱:等比數列的前n項和(第二節)		教材來源: 人民教育出版社 數學 第一冊(上)
教學目標	1. 掌握等比數列的前n項和公式; 2. 能用等比數列的前n項和公式解決等比數列的相關問題。	
重難點	重點:等比數列的前n項和公式。	
	難點:等比數列的前n項和公式的靈活運用。	

時間分配	教學活動過程
約 3 分鐘 約 15	一. 複習回顧 回想一下等比數列中所學到的公式和性質: 1. 等比數列的公比公式: $q=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ 通項公式: $a_n=a_1q^{n-1}$或$a_n=a_mq^{n-m}(m\le n)$ 2. 性質: 若$m+n=p+q$, 則$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$; 若$i+k=2j$時, 則$a_j=\pm\sqrt{a_i\cdot a_k}$, 其中$a_j$稱為$a_i$與$a_k$的等比中項. 3. 等比數列的前$n$項和公式 當$q\neq1$時 (1). $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$ (2). $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 當$q=1$時 (1). $S_n=na_1$ 二. 例題講解 1. 近日一個帶有新型流感的患者進入一個城市, 患者一天後會將這種病傳染

分鐘	給與他接觸的最初四個人(暫不討論患者會再度傳染的可能性),如此類推,問 七天後這個城市會有多少人受感染? 分析:因為一個患者會將病菌傳染給四個人,而這四個人又分別將病菌傳染給另外四個人,這屬於一個幾何增長的問題,可以將這道題定義為一個等比數列求和的問題. 解:設第一日的感染者人數為a_1,即$a_1=1$,根據題意得 $a_2=4,a_3=4^2,\ldots a_7=4^6,n=7,q=4$,則所求的七天後所感染的患者人數是: $S_7=\frac{1\times(1-4^7)}{1-4}=5461.$ 答:七天後這個城市共有 5461 個患者.
約 12 分鐘	三. 變式訓練 1. 承接上題,亦是一個患者進入一個城市,現在不知道一個患者一天後會傳染給多少人,只知道第 5 天的患者人數是 81 人,5 天後總的患者人數是 121 人,試求出一名患者一天後會傳染給多少人? 解:設一名患者一天後會傳染給q人,第一日的感染者人數為a_1,即$a_1=1$,根據題意得$S_5=121,n=5$,則$S_5=\frac{a_1-a_5q}{1-q}=\frac{1-81q}{1-q}$,計算得$q=3$. 答:一名患者一天後會傳染給 3 人.
約 5 分鐘	四. 小結 1. 等比數列的前n項和公式 五. 課後練習 1. 在等比數列$\{a_n\}$中: (1). 已知$a_1=2,S_3=26$,求q與a_3. (2). 已知$a_3=1\frac{1}{2},S_3=4\frac{1}{2}$,求$q$與$a_1$.

叁、試教評估與反思建議

【數列】

- 數列是這個單元的第一個課題，學生必須弄清楚數列並不是單純的一組數字，數列更強調次序，沒有次序的一組數字就不是數列，所以數列中的每一個數字都有它的序號。經試教後發覺這點必須要強調，否則學生會跟先前集合中的列舉法搞亂，對第 n 項的概念比較含糊。

- 從數字到字母，把數列用字母表示，學生會有點難吸收，需要跟他們講清楚$\{a_n\}$的概念，回歸教育的學生特點是基礎較差，面對數字會很容易理解，但變成字母可能需要講得更清析，他們才能理解。a_1，a_2，…代表著第一項、第二項…， 而a_n代表第 n 項，必須讓學生搞清楚a_n，才可以繼續講通項公式。

- 在通項公式中，學生未有意識知道a_n的 n 就是通項公式中的 n，這點教師很容易忽略，因為看似理所當然，但其實基礎差的學生沒有這個意識，需要強調。就好像是題目有要寫出前 5 項，學生很容易知道 n 就是由 1 到 5。但當題目要求a_5，學生就不知原來通項公式中的 n 就是 5。

- 找出數列的通項公式，有利於培養學生的逆向思維、還原的思巧能力。因為要從一個結果把它還原成過程，是初中階段很少接觸的層面，對學生來說是困難的。先讓學生觀察數列各項之間的特點，再把數列的各項慢慢化成相似的形式，逐步找出常數部分和變數 n 的部分，最後得出通項公式，每個學生的想法和過程也不一樣，但最終也能找到相同的答案。老師可以從中灌輸數學思路並不是唯一的，只要能解出題目的就是好方法，老師給出的只是老師覺得學生比較容易理解的思路。

- 在遞推公式中，必須清楚講解a_{n-1}就是第 n 項的前一項，而a_{n-2}就是第 n 項的前兩項因為生沒有這個概念，講授時他們明白遞推公式就是某項和它的前一項之間的關係，透過a_1和前一項(或前幾項)去找出該項的公式。但一變到a_{n-1}他們就不明白了。在做題方面，學生很容易以為a_{n-1}是a_n的

值減 1，這些亦都需要強調學生a_{n-1}的意義。

- 總括來說，這個課題不需要讓學生學習很深的內容，但卻要讓學生把基礎和概念弄清楚，每個細節位都需要講得很清晰。因為對於高一學生來說，這個課題是一個全新的課題。一開始若果能夠把基礎理解得清晰和透徹，對下一個課題等差數列和等比數列都會較容易接受。尤其實每個字母所代表的意思，必須講清楚，數列這單元出現的字母也有很多，學生很容易搞亂，這也是對回歸教育的學生的一個難題。

【等差數列】

- 學生已有數列的概念，從而引入特殊的數列—等差數列。等差數列是日常生活中較為常見的一種數列，可以用來解決一些生活上的問題。從數列到等差數列，先從一些簡單的數列作引入，再讓學生從簡單的數列找出等差數列的通項公式。從特殊到一般，在這過程中，能增強學生對數學的信心，增強學習動機，訓練學生的歸納能力。
- 等差數列的通項公式和一般數列的通項公式不同，多了兩個元素，分別是首項a_1和公差 d。公差的概念需要跟學生講清楚，學生了解公差 d 的概念便能理解只要有相鄰的兩項，就要以找出公差 d。
- 如題目：-16 是不是等差數列 2,4,6,……的項，如果是，是第幾項?
- 學生普遍遇到的問題，不知道題目需要怎樣做，怎样判斷。但他們能夠從題目找出公差和首項。經指引後他們知道如何做，還是有些不理解為甚麼 n 不是正整數這個-16 就不是這個數列的項。這個地方可以跟他們探討，討論一些文字題我們要懂得判斷答案是否合理，這些從初中階段也是有遇過的問題。探討過程中能讓他們知道學數學要靈活變通，要與實際情況符合。
- 等差中項是等差數列中特有的一個性質，這一概念能活化學生的思維，可以跟學生探討一些有趣的問題。如：把等差數列的奇數項拿掉，它還是等差數列嗎?等差中項亦能體現等差數列的各項的序號的重要性。能夠通過序號便能找出各項之間的隱藏關係，讓學生在決解問題時更加靈活，開發學生的思考能力。老師亦可以再安排練習題時出一些一題多解的題目，讓學生多思考，從而讓學生明白數學的決題方法不是唯一的。

- 在等差數列中，a_1、a_n、d 和 n 這四個元素的關係必須要讓學生理解清楚，因為這是組成等差數列的基本元素，若果能讓學生掌握這四個元素的關係，便能解決等差數列的大部分問題，最終可以達到舉一反三的結果，所以可以讓學生多練練有關這四個元素給出的題目，能增強他們對等差數列的數感。
- 總括來說，這個課題對回歸教育的學生來說並不是太困難，基本上也能跟

得上，因為這個課題對於初中基礎的要求並不是很高，所以大部分也能接受，學起來也比較熱情，更加有信心。

【等差數列】

- 從高斯的求和故事作引入能讓學生更加投入學習，因為故事是發生在高斯的童年，學生會認為這個問題是簡單的，更加努力去嘗試，增強了信心。透過思考高斯的問題結合 Polya 解難的四階段(理解問題 (understanding the problem)、設計解題策略 (devising a plan)、按步解題 (carrying out the plan)、回顧解答 (looking back))讓學生建立數學知識之間的關聯，從而達到關聯性的理解。這樣的教學法對於回歸教育的學生是一種新嘗試，普遍來說他們是接受的，可能引導的問題對於他們來說比較困難，所以他們聽起上來比較吃力，若再用類似方面，在引導問題方面要把問題轉化成更加容易理解和回答的問題，這樣讓他們更容易吸引知識。
- 等差數列前 n 項求和公式有 2 條供給學生使用，要使他們了解甚麼情況下才用哪條公式來算，對於回歸教育的學生來說，這也是一個難題。所以在講解公式時不妨嘗試做一個簡單的例子再告訴學生，為甚麼在這種情況下用這條公式而不用那條。一個實例能讓學生有更深刻的印象。
- 如題：在等差數列{a_n}中，$a_1 = 5$，$a_7 = 19$，求S_7
- 可以先試用試一次用$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$來解這道題，可以讓學生清楚知道
- 如果用這個公式來算，會把問題變得復習很多，然後再用$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$來解
- 這道題，學生就能明確清楚兩條公式的分別和選擇公式的重要性。
- 求和概念需要重新跟他們講解，因為有部分同學未能理解”和”的意思，可能日常生活比較少用，所以能夠用”相加得出的結果”來轉化這個”和”能讓學生更易理解。從本質上，等差數列前 n 項和用字母S_n來表示，很多學生對於這個字母未能看得出是數列的前 n 項相加，所以需要跟學生說請楚求和概念。
- 把等差數列的通項公式和求和公式結合使用，讓學生解決等差數列的實際問題，讓學生了解等差數列在現實生活中隨處可見，提高學習的動機。此外，對於回歸教育的學生來說，應用題題目文字的理解是很困難的，因此我們必須細心跟他們講解應該如何分析題目，讓他們知道如何理解題目。

最能結合公式解決等差數列實際問題。

- 總括來說，對於學生來說這個課題應該是等差數列中最難的一個課題，因為它結合了等差數列的所有性質和公式，所以學生要把前面幾課書也搞懂才會把這個課題搞懂。有時候遇上學生聽不懂的時候也只能停下來跟他們鞏固基礎。對回歸教育的學生來說，在每堂上課前重新講解該堂需要的前置知識，那怕是很簡單的，也最好說一次，這樣便能使他們更容易接受課堂的內容。

- **【等比數列篇】：**

- 在學習等比數列時,為了提高學生的興趣,會用一個古老的數學故事作為引入,並推導出通項公式,整個過程都是老師帶着學生進行,老師並不斷向學生提出問題,讓學生參與其中,並讓學生分組討論,相信學生能理解這一個通項公式的推導過程並掌握這條公式。

- 接着是通項公式和性質的應用,學生最容易將 a_n 和 n 渾淆,如題目要求第 n 項的值,學生就求出項數,又如性質常常誤以為 $a_1 \cdot a_2 = a_3$ 。

- 建議:老師應適當對學生進行檢測,並及時指正錯誤,以免學生在往後學習新知識是將錯誤知識渾淆在一起。
- 在學習前 n 項和公式時,因為這個公式的推導過程太有技巧,學生比較困難去掌握,這節課估計會障礙重重,所以這節課的重點應放在總和公式的應用上,避免在推導的過程中佔用太多時間。
- 建議:老師教導新知識前一定要做好準備,先讓學生對新知識形成一個初步概念,而知識點若是比較難以說明時,應避重就輕,免得學生陷入困惑當中,影響到教學進度。

參考文獻

人民教育出版社中學數學室（2003）。數學 第一冊(上) 人民教育出版社
陳表宣 楊象富 (1998)。高中必備題庫 數學,上海遠東出版社
黃逸恆 教師雜誌 教育暨青年局
陸思明 高中新數學教室系列 7 數列與級數 建弘出版社
數學(2015)。暨南大學出版社 廣州.
數學—同步練習冊(2015)。 暨南大學出版社 廣州.