2016/2017 學年教學設計獎勵計劃

指數函數與對數函數
資訊科技教學實踐

參選編號：C041

適合程度：高一

學科名稱：數學

目錄

簡介

指數函數和對數函數是基本初等函數中最重要的兩個函數，如何讓學生充分掌握這部份的知識，是一個很值得研究的課題。學習這兩類函數，最重要的方法是數形結合，學生要動手畫圖，通過描點，建立函數圖形，從而研究函數的一系列性質。

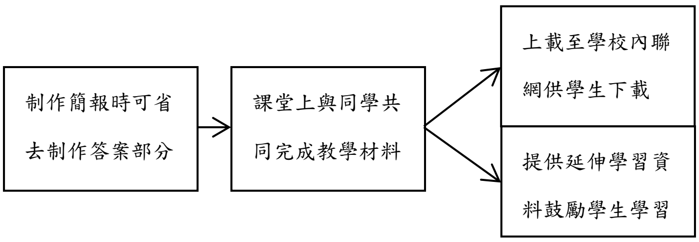
美國教育學家 Prof. Walter Arno Wittich 在他的著作<< Instructional Technology, Its Nature and Use >>一書中提到，要提升學習效果，就要選用合適的教學媒體，在現今資訊科技盛行的年代，學生的學習方法是多元的，我們身為教師，要與時並進，利用合適的軟件和電腦輔助工具，可以很大程度上激發學生的學習欲望，提高學生在課堂上的投入度，因此，本單元在函數的教學實踐中，充分把資訊科技合適地融入教學中，使學生無論在知識的理解應用，以及綜合、分析和評價的方面，都有較以往更佳的學習成效。

本單元的設計特色：

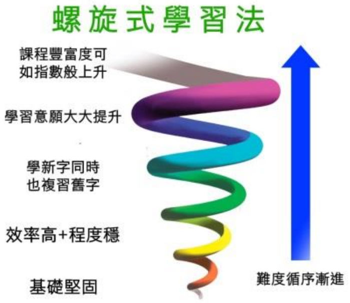
1. 使用 MICROSOFT SURFACE PRO 4 平板電腦及 WIFI 同屏投影機轉接器, 在教學的過程中實時投影及紀綠, 教學後可上傳課堂筆記等資料, 讓學生在課後仍能輕易獲取上課成果。

2. 利用平板電腦的攝影技術及對應軟件, 讓學生的筆記成為課堂的一部分, 解決傳統教學方面學生參與度不足問題。

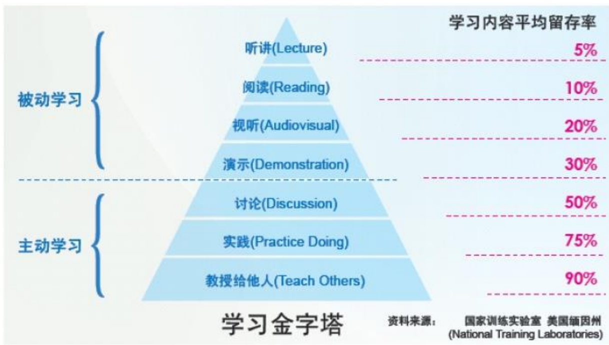
3. 教導學生透過網絡尋找資源, 在家也能自主學習並發現更多與函數有關的知識，提升學生的自學動機, 培養自強不息的學習精神。



本單元的設計共用九個課時，第 1~3 課時介紹指數函數，探索圖像性質和推廣至複合類型，第 4~6 課時介紹對數函數，探索圖像性質和推廣至複合類型，第 7 課時作測驗前學生分組系統式複習，老師給予評價，第 8~9 課時進行測驗。

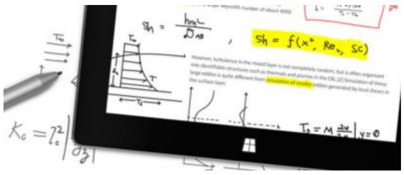


教學新知時均先複習已學知識，由已學知識引入新知，並在題目的設計上參考美國教育心理學家傑羅姆·布魯納(Jerome S. Bruner)的《教育過程》一書中所提倡的螺旋式課程，除了利用新知解決問題外還常常加插一些需要用到過去已學知識才能解決的問題，讓學生在學習新知時仍能隨時鞏固已學知識。



我校為一所偏向注重學生學業成績的學校，故此測考的次數較多，為了減輕學生的測考壓力，本學年本班學生取消了小測，取而代之的是在測驗前一天的測驗複習課，由學生按強弱分組來帶領其他同學進行複習。具體做法是由老師在測驗前派發一張測驗複習紙，每次測驗複習課的第一部分輪流讓學生負責題目的講解，由老師在課堂上指導，而第二部分則是鼓勵學生在家完成題目，交老師拍照並投影給全班同學一起判斷對錯，並對「獻題」的學生作出獎勵。讓學生的學習方式貼近於由埃德加·戴爾（Edgar Dale）提出的「學習金字塔」（Cone of Learning）理論的底層，即討論、實踐和教授給他人。

教學中所使用的硬體介紹

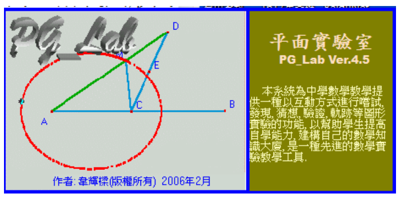
1. Microsoft surface pro 4 平板電腦，Surface Pro 4 搭載 Windows 10，不僅可從平板電腦變成具備完整功能的膝上型電腦，還能執行所有的桌上型電腦軟體。因此並不需要因為更改了電子設備而重新適應，並能優化已往已完成的課件。	
2. Surface 手寫筆，以數位元方式書寫、繪圖或標記檔，一端是書寫功能，另一端是橡皮擦功能，能在 PDF 上寫上文字，或是設定成螢光筆劃重點。	
3. 市面上有非常多種類的 WIFI 投影機轉接器，配合上面所提到的平板電腦，可以實現在許多學校均已裝配好但並不配備 wifi 投影功能的投影機，而本文所使用的投影轉接器為於淘寶商城購入的 “Miracast 推送寶 airplay 投影高清轉出器”。	

教學中使用的軟件介紹

除了比較常用的 Microsoft Power Point 外，本次教學設計還應用了下列軟件:

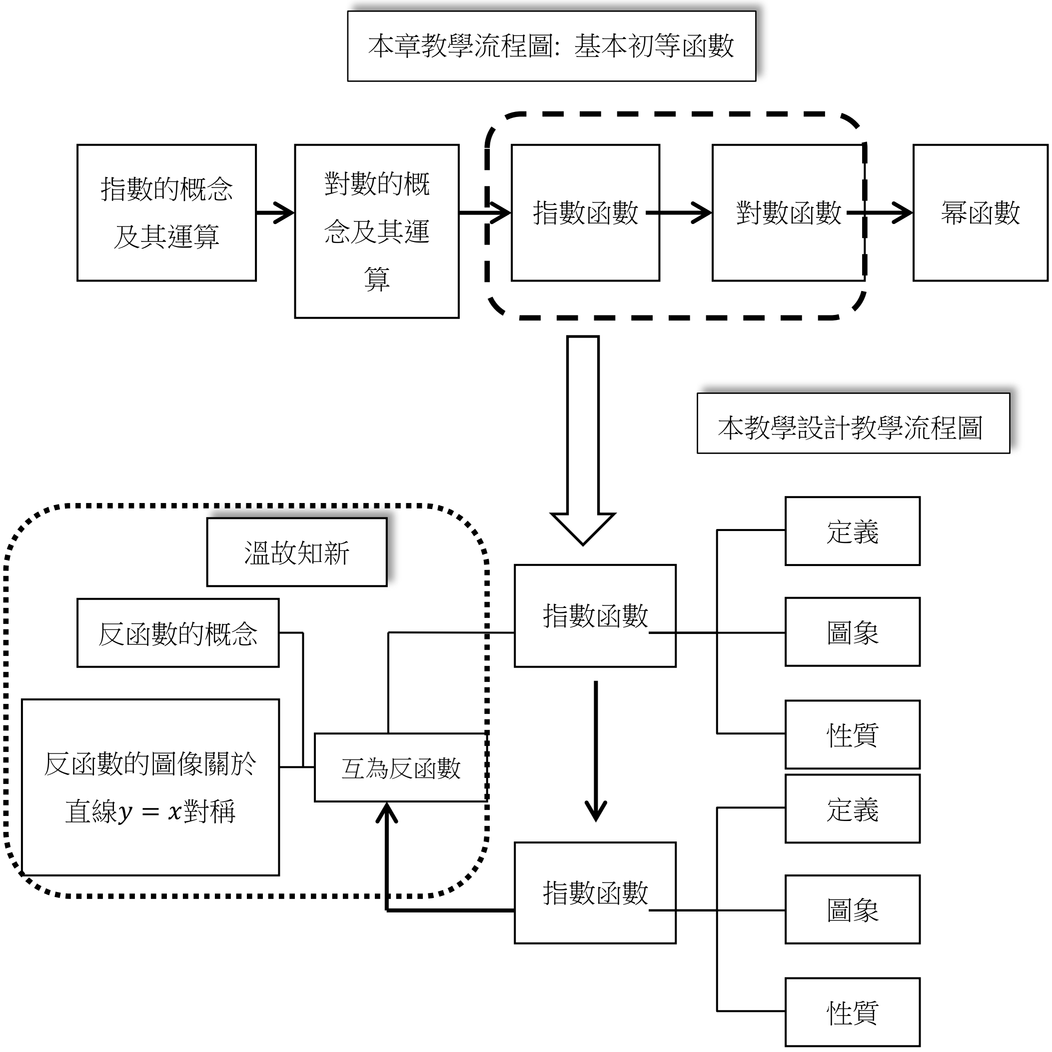
1. GeoGebra 是一款動態數學軟件，符合大部分初高中教學的繪圖要求，而且繪製圖形對使用者幾何知識有一定的要求，故此不單是極大地方便了教學們製作教學材料，更能讓學生在使用軟件時能鞏固其幾何知識。

2. PG_Lab (平面幾何實驗室)是由澳門培道中 學副校長韋輝樑創建的數學教育軟件，在繪製部分圖形方面比 GeoGebra 更優秀，而且 更是由澳門人所創建的，因此在教學時候我會更傾向使用此軟件，可以讓學生知道澳門人也可以很優秀的。



教學時間表

課題	節數	對應的基本學力要求
指數函數及其性質	3	A-5-10 :結合實例瞭解指數函數的實際背景，體會指數函數是一類重要的函數模型 A-5-11:掌握指數函數的概念及其圖像和性質 A-5-12:通過具體實例，直觀瞭解對數函數所刻劃的數量關係，理解對數函數的概念，體會對數函數是一類重要函數模型 A-5-13:理解指數函數$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$與對數函數$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$是一對反函數 A-5-14:理解對數函數的圖像和性質
對數函數及其性質	3	
測驗複習	1	
測驗	2	



教案

指數函數的概念、圖像與性質

科目：數學	班別：高一		
課題：指數函數概念、圖像與性質		課時 80 分鐘（兩節課）	學生人數：20
教科(參考)書：普通高中課程標準實驗教科書必修 1，工作紙			
教具：surface pro 4 平板電腦 ，投影機 ，WIFI 同屏投影機轉接器 ，簡報			

教學分析:

在學習了指數與對數的運算方法後，結合在本學年上學期有關函數的知識，我們可以順理成章地學習指數函數的概念，作指數函數的圖像以及研究其圖像的性質。

為了讓學生在學習之外就感受到指數函數的實際背景，以及貼合教學當地語系化這個概念，提出了澳門 GDP 在 2009 年至 2013 年的增長問題。透過對澳門經濟的初步瞭解，利用學生已學的整數指數冪的運算知識去推論出往後的 GDP 增長，讓學生感受到其中的函數模型，從而引起學生對學習指數函數的興趣。

本次兩節課所安排的內容蘊含了重要的概念(指數函數的概念與特徵)，數形結合的數學思想方法，如

1. 用點在x軸上移動的x坐標為變量，動態地展現出指數函數2^x與$\left(\frac{1}{2}\right)^x$的形成過程。
2. 用指數函數的圖像研究指數函數的性質。

在教學過程中盡量結合生活，並利用電腦程式作為輔助教學工具，為學生的數學探究與數學思維提供支援。

三維目標：

1 通過實際問題瞭解指數函數的實際背景，理解指數函數的概念和意義，讓學生體會數學與實際生活有著密切的關聯。

2 結合電腦程式的輔助，讓學生瞭解指數函數圖像的形成過程，並根據指數函數的圖像來掌握指數函數的性質，體會具體到一般數學討論方式及數形結合的思想。

3 參考 “螺旋式學習法”，通過針對所學知識而設計的例子講解與點評，讓學生更能熟練指數冪的運算性質，回顧函數圖像的平移等已學知識，並鞏固剛剛學習到的新知識，體會到豐富的知識是透過日積月累學習過程而獲得的。

教學重點：

1. 掌握指數函數的概念、圖像與性質。
2. 掌握圖像變換的基本方法(如平移、對稱)在指數函數變化中的應用。
3. 能利用指數函數的圖像和性質進行比較大小，判斷函數形狀等應用。

教學難點：

1. 圖像的平移變換在指數函數變化中的應用。
2. 學習指數型複合函數的單調性。

教學內容／過程：

引入:

在之前的學習中，我們已經掌握了指數與對數的運演算法則，而我們今天將要學習的是指數函數。

那麼先讓我們來看看這個問題:

GDP(國內生產總值)是國民或地區經濟的核心指標，在衡量一個國家或地區經濟狀況和發展水準相當重要。簡單來說，今年你在澳門每消費 1 元，澳門的 GDP 就會增加 1 元。讓我們看看澳門 09 年至 13 年的 GDP 情況吧。

這幾年的經濟均比上一年增長超過了 17%，那麼如果這個情況下去，你們讀完大學出來的時候澳門的經濟會如何呢?

就保守點用 17%來估計吧，那麼
2014 年 GDP 為 2013 年的 $(1+17\%)$ 倍
2015 年 GDP 為 2013 年的 $(1+17\%)^2$ 倍
…

2013+x年 GDP 為 2013 年的 $(1+17\%)^x$ 倍

你們畢業時(2024 年)澳門的 GDP 有

$517.5 \times (1+17\%)^{11} = 2910.4$ 億元

如果 2024 年澳門有 80 萬人，人均 GDP 可達 36 萬元(USD)! 你們認為 2024 年的 GDP 會否接近這個數呢?

(預留 1~2 分鐘讓同學討論一下)

那麼函數$y=(1+17\%)^x=1.17^x$ 的圖像又是怎樣的呢?

像剛才的例子中，$y = 1.17^x$的自變量在指數位置的函數，我們稱為指數函數。

一般地，函數$y = a^x$ $(a > 0$ 且$a \neq 1)$叫做指數函數，其中x是自變量，函數的定義域為R

問題 1：為何底數a要大於 0 呢?
答：可以考慮$y = (-2)^x$ ，x在$(0\,,1)$間，$(-2)^x$對應的不一定是實數，如$(-2)^{\frac{1}{2}}$，因此不考慮負數

問題 2：為何底數a要不等於 1 呢?

答：因為$y = 1^x$的圖像是一條水準線，沒有研究價值。

掃描 OR Code 可知獲得更詳細的資訊。

現在來介紹一下指數函數的待征:

1. a^x的系數為 1
2. a^x的底數是常數，且是不等於 1 的常數
3. a^x的指數僅含有自變量x

在學習了指數函數的特徵後，讓我們試試完成練習 1：判斷下列函數是否指數函數:

1. $y = 4^x$ 答：系數為 1，底數為 4，指數有自變量x 所以是指數函數	2. $y = x^4$ 答：指數沒有自變量x ，不是指數函數 這是冪函數* (回顧冪函數的概念)
3. $y = -4^x$ 答：系數為-1 ，不是指數函數	4. $y = (-4)^x$ 答：要求底數大於 0，不是指數函數
5. $y = \pi^x$ 答：系數為 1，底數為π，指數有自變量x 所以是指數函數	6. $y = 4x^2$ 答：指數沒有自變量x ，不是指數函數 這是二次函數* (回顧二次函數的概念)
7. $y = x^x$ 答：底數不是常數，不是指數函數	8. $y = (2a-1)^x \quad a > \frac{1}{2}$且$a \neq 1$ 答：係數為 1，底數$2a - 1 > 0\,, 2a - 1 \neq 1$ 指數有自變量x ，是指數函數

總結: (1) , (5) , (8) 是指數函數

練習 2: 若$y=(a^2-4)^x$是一個指數函數，求a的取值範圍

解：系數為 1，底數為(a^2-4)

$$\therefore \begin{cases} a^2-4>0 & (1) \\ a^2-4\neq 1 & (2) \end{cases}$$

由(1): $(a-2)(a+2)>0$ *(回顧一元二次不等式的解法)

$a<-2$ *或* $a>2$

由(2): $a^2-5\neq 0$

$a\neq \pm\sqrt{5}$

結合(1)和(2)我們得到 $a\in\left(-\infty,-\sqrt{5}\right)\cup\left(-\sqrt{5},-2\right)\cup\left(2,\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5},+\infty\right)$

練習 3: 若函數$y=(a^2-3a+3)a^x$是指數函數，求a

解：系數為a^2-3a+3，底數為a

$$\therefore \begin{cases} a^2-3a+3=1 & (1) \\ a>0 \text{ 且 } a\neq 1 & (2) \end{cases}$$

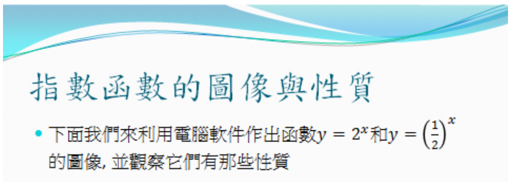
由(1): $a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0$

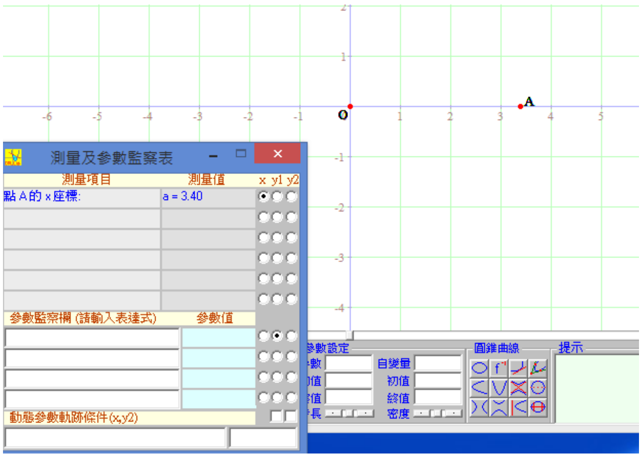
$a=1$或$a=2$

結合(1)和(2)我們得到$a=2$

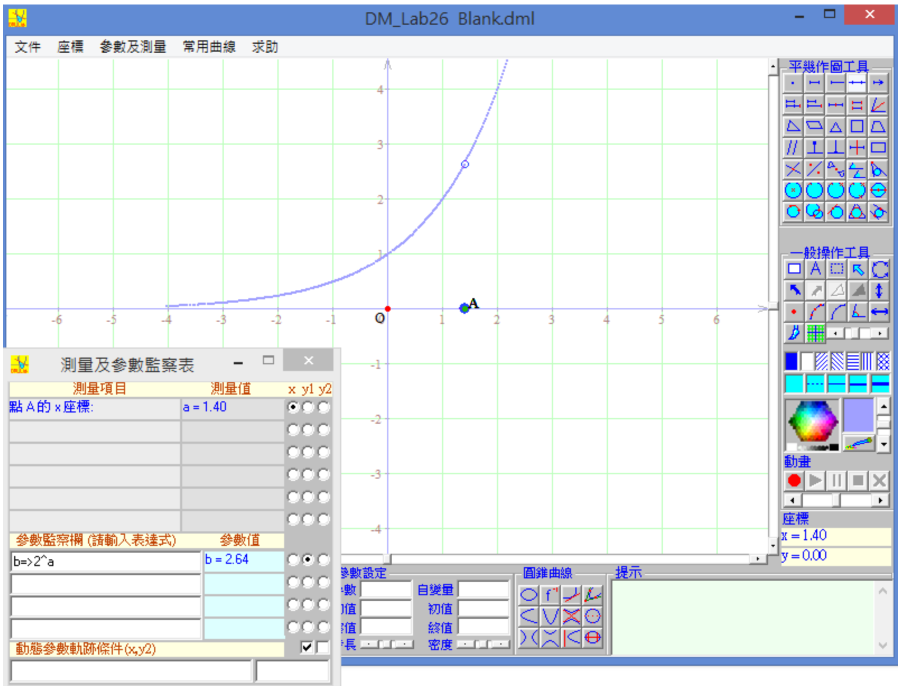
*練習 1 是審視學生在概念上的認知情況，而練習 2 和 3 是讓學生能利用指數函數的概念求未知量的取值範圍或取值。

瞭解到指數函數的概念之後，讓我們來看看指數函數圖像的變化吧。	

開啟軟件 DM_LAB，作出平面直角坐標圖並作出坐標軸，在x軸上取一動點A，利用測量器測量點A的x坐標:



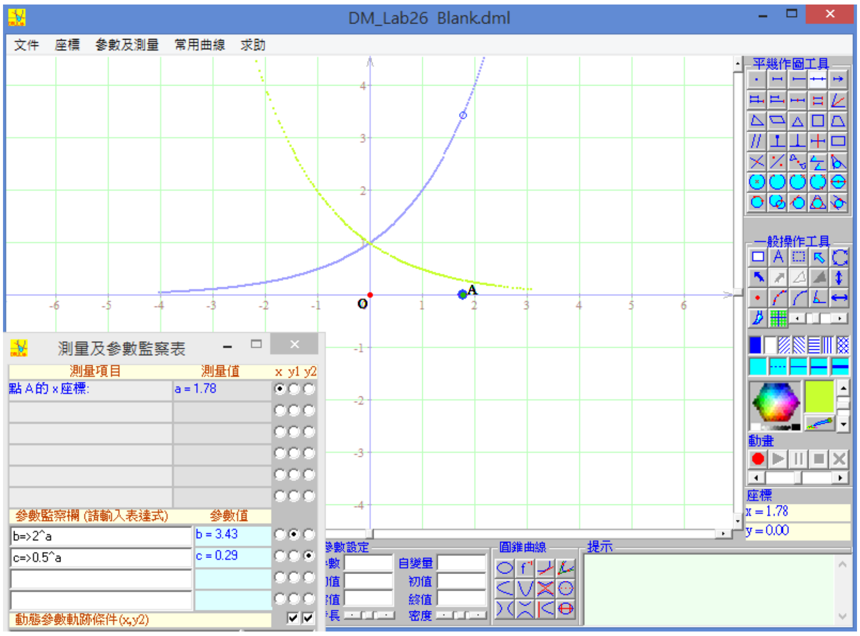
利用點A的x坐標為自變量，令$y = 2^x$，並在平面直角坐標系上作出函數$y = 2^x$的圖像。



在作圖的期間，詢問學生有那些點具參考價值，使得自己在工作紙上作的圖像能較為精準:

具參考性的點有: $(0\,,1)\,,(1\,,2)\,,\left(-1\,,\frac{1}{2}\right)$

然後再以點A的x坐標為自變量，令$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$，並在平面直角坐標系上作出函數$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$的圖像。



在作圖的期間，詢問學生有那些點具參考價值，使得自己在工作紙上作的圖像能較為精準:

具參考性的點有: $(0\,,1)\,,\left(1\,,\frac{1}{2}\right)\,,(-1\,,2)$

讓學生透過圖像完成下表(指數函數的圖像與性質)

定義域: R 值域: $[0\,,+\infty)$ 必定過點: $(0\,,1)$			
單調性	當$a>1$時, 函數在R上是 增函數		當$a\in(0\,,1)$時, 函數在R上是 減函數
變化情況	當$a>1\,,x>0$時, $a^x>0$ 當$a>1\,,x<0$時, $a^x<0$	當$a\neq1\,,x=0$時, $a^x=1$	當$0<a<1\,,x>0$時, $a^x<0$ 當$0<a<1\,,x<0$時, $a^x>0$
對稱性	函數$y=a^x$與$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$的圖像關於 y軸 對稱		

練習 4: 求下列函數的定義域和值域

4.1 $y=2^{\frac{1}{x-4}}$

解: $\because x-4\neq0$ $\therefore$函數的定義域為$\{x|x\neq4\}$

$\because \frac{1}{x-4}\neq0$ $\therefore 2^{\frac{1}{x-4}}\neq1$ $\therefore$函數的值域為 $(0\,,1)\cup(1\,,+\infty)$

4.2 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$

解: 此函數的定義域為R

$\because 2x-x^2=1-(x-1)^2\leq1$

$\therefore$函數的值域為 $\left[\frac{1}{2}\,,+\infty\right)$

練習 5: 判斷函數$y = a^{x-2} + 3$ $(a > 0$ 且$a \neq 1)$的圖像是否恒過一定點? 若是, 求此點坐標; 若不是, 說明理由。

解: $y - 3 = a^{x-2}$

令$y' = y - 3$; $x' = x - 2$

我們得到指數函數$y' = a^{x'}$

解法 1: ∵函數$y' = a^{x'}$必定過點$(0,1)$

即$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ 函數$y = a^{x-2} + 3$必定過點$(2,4)$

解法 2: *(回顧函數圖像平移的知識)此函數是由函數$y - 3 = a^{x-2}$向下平移 3 個單位, 再向左平移 2 個單位而得到的, 而函數$y' = a^{x'}$必定過點$(0,1)$, 故此可得函數$y = a^{x-2} + 3$必定過點$(2,4)$

練習 6: 比較下列各數的大小:

6.1 $1.7^{2.5}$ _______ 1.7^{3}

解: $\because y = 1.7^{x}$在R上是增函數, 所以$2.5 < 3 \Rightarrow 1.7^{2.5} < 1.7^{3}$

6.2 $0.8^{-0.1}$ _______ $0.8^{-0.2}$

解: $\because y = 0.8^{x}$在R上是減函數, 所以$-0.1 > -0.2 \Rightarrow 0.8^{-0.1} < 0.8^{-0.2}$

6.3 $1.7^{0.3}$ _______ $0.9^{3.1}$

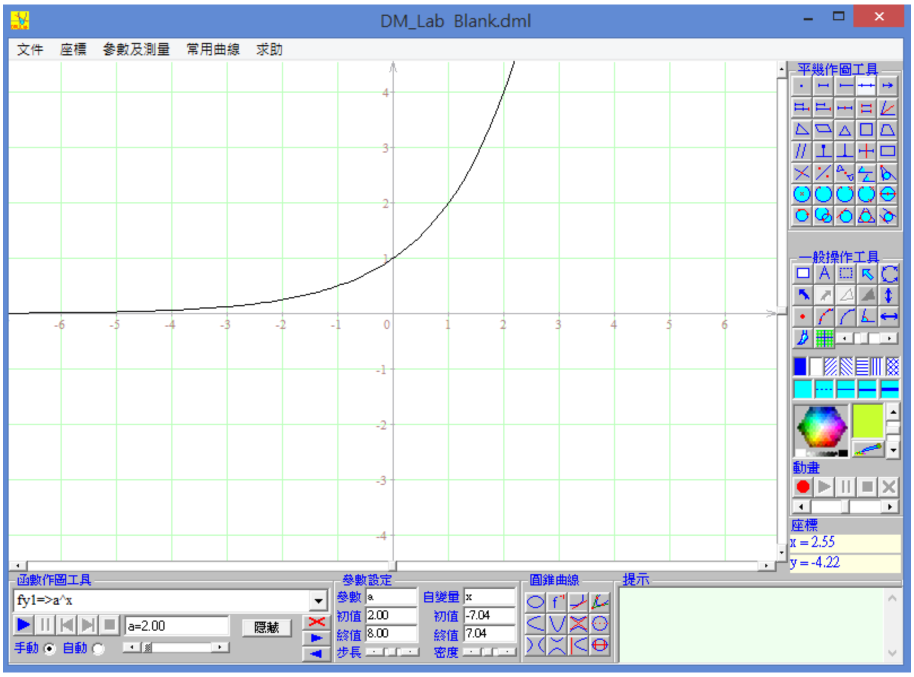
解: $1.7^{0.3}, 0.9^{3.1}$不能看作同一個指數函數的兩個函數值, 我們可以利用圖像必定過點$(0,1)$這個特性

$\because y = 1.7^{x}$在R上是增函數, 所以$0 < 0.3 \Rightarrow 1 = 1.7^{0} < 1.7^{0.3}$

$\because y = 0.8^{x}$在R上是減函數, 所以$0 < 3.1 \Rightarrow 1 = 0.9^{0} > 0.9^{3.1}$

由此得到 1$1.7^{0.3} > 1 > 0.9^{0.3}$

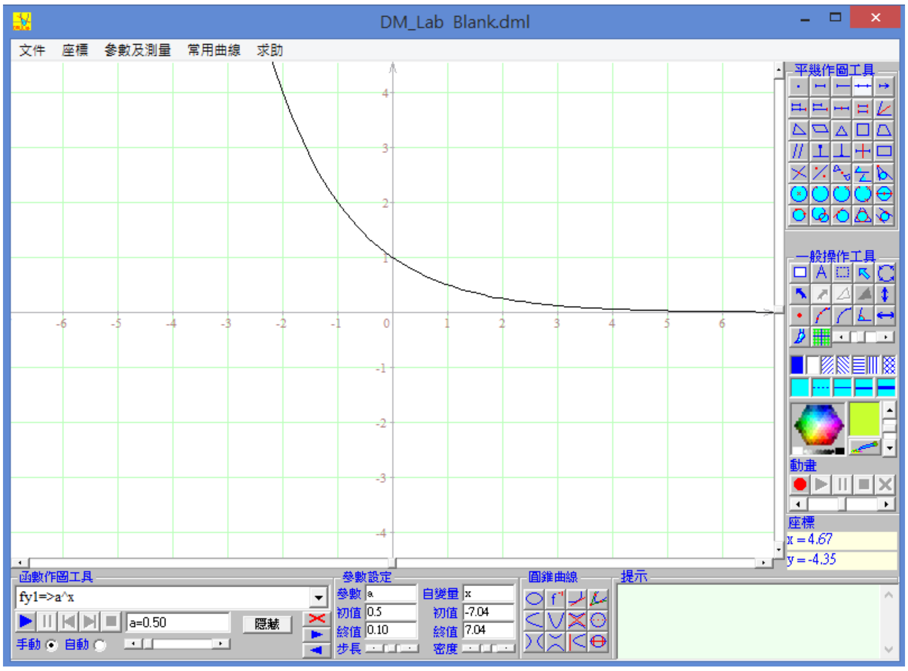
在做練習 7 之前, 利用 DM_LAB 製作$y = a^{x}$的圖像, 其中a為參數, 第一次的時候a由 2 變 8，讓同學發現指數函數圖像的變化



經過動態演示可知當a越來越大小, $x > 0$時函數的上升速度會越來越快；$x < 0$函數的縮小速度也會越來越快

結合實際例子: $2^2 < 8^2$ ； $2^{-1} > 8^{-1}$也可以得出以上結論。

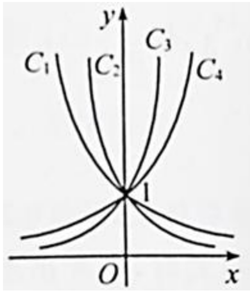
第二次的時候a由$\frac{1}{2}$變$\frac{1}{10}$，讓同學發現指數函數圖像的變化



經過動態演示可知當a越來越小, $x > 0$時函數的下降速度會越來越快；$x < 0$函數的上升速度也會越來越快

結合實際例子: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{10}\right)^2$ ； $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$也可以得出以上結論。

練習 7: 已知下圖中C_1, C_2, C_3, C_4是指數函數$y = a^x$的圖像，而$a \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \sqrt{5}, \pi\right\}$，則曲線$C_1, C_2, C_3, C_4$對應的函數底數依次是______，______，______，______



解: 這裡利用到指數函數圖像的單調性及剛才提到底數對指數函數圖像的影響

首先$\because \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1 < \sqrt{5} < \pi$

結合之前所學便得容易得到答案為 $\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \pi, \sqrt{5}$

練習 8: (選擇題) 若函數$y = a^x$ $(a > 0$ 且$a \neq 1)$的圖像與函數$y = b^x$ $(b > 0$ 且$b \neq 1)$的圖像關於y軸對稱，則有

A. $a > b$ B. $a < b$ C. $ab = 1$ D. a與b無確定關係

解: 由函數$y = a^x$與$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$的圖像關於$y$軸對稱這事可得$a = \frac{1}{b} \Rightarrow ab = 1$

故此題的答案為 C

*練習 4 至練習 8 為檢示學生對指數函數圖像的瞭解及應用情況。

總結

經過今天的兩節課，我們

1. 學習了指數函數的概念
2. 掌握了圖像變換的基本方法在函數變化中的應用
   如平移、對稱等
3. 能利用指數函數的圖像和性質進行比較大小、求函數定義域和值域

結語:

其實澳門的 GDP 在 2015 年開始出現負增長，表示經濟開始放援。

經濟有起有跌，只有學習到的知識能陪伴你的一生，希望各位同學努力讀書，充實自己的競爭力，無論遇到任何經濟風浪，都可以實現自己的理想，無負生命的賜予。

佈置作業:

完成工作紙—指數函數的概念、圖像與性質 1~7(附錄 3)

指數型複合函數的性質

科目：數學	班別：高一		
課題：指數函數概念、圖像與性質		課時 40 分鐘 (一節課)	學生人數：20
教科(參考)書：普通高中課程標準實驗教科書必修 1，工作紙			
教具：surface pro 4 平板電腦 ，投影機 ，WIFI 同屏投影機轉接器 ，簡報			

教學分析:

本節課的上半部分先與同學一起回顧作業中同學出錯的部分、然後介紹指數型複合函數的單調性、以及指數函數的性質對指數型複合函數的影響。

本次兩節課所安排的內容蘊含了重要的概念(指數型複合函數的概念)，以及下列數學思想方法，如

1. 推廣的思想:
   由指數函數的單調性推廣至指數型複合函數的單調性。
   由指數函數的性質去解決指數型複合函數的有關問題。
2. 數形結合的數學思想方法

三維目標：

1 透過批改作業並針對學生在作業上的錯誤而在課堂上糾正，鞏固學生所學知識之餘，亦能讓學生體驗學習數學的連貫性。

2 透過學習指數型複合函數的性質，讓學生初步瞭解複合函數的特性，增加其對往後所學複合函數的性質時的信心。

3 在例題的選取中涉及很多學習已學知識，在課堂中不斷的透過師生互動來讓學生参與課堂，增加其上課的投入感，培養學生對學習的興趣與熱誠。

教學重點：

1. 能利用指數函數的單調性去推論出指數型複合函數的單調性。
2. 能利用所學知識解決指數形複合函數的有關問題

教學難點：

1. 學習指數型複合函數的單調性。

教學內容／過程：

以下是工作紙功課的題目與解答，有*號的題目是學生錯誤較多的地方，因此在打*號題目會解釋常見錯誤。

1. *判斷下列函數是否指數函數

$y=(-2)^x$	是 / 否	$y=-3^x$	是 / 否	$y=5^{x-1}$	是 / 否	$y=0.5^x$	是 / 否

*許多學生認為$y=5^{x-1}$是指數函數，主要原因是對於指數函數的特徵 3: a^x的指數僅含有自變量 x 的忽略，其實這是 "指數型複合函數" ($f(x)=x-1, y=5^{f(x)}$)

2. 已知$f(x)=(a^2-4a+4)a^x$是指數函數，求a

解: $\begin{cases} a^2-4a+4=1 & (1) \\ a>0 \text{ 且 } a\neq 1 & (2) \end{cases}$

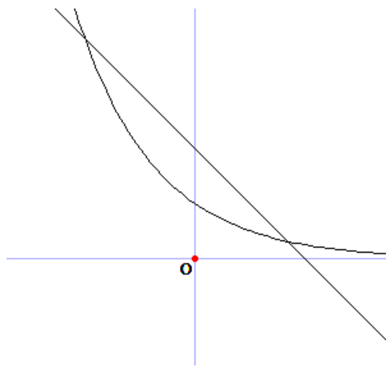
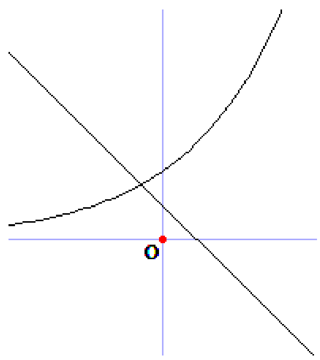
(1): $(a-1)(a-3)=0$

$a=1 \text{ or } a=3$

結合(1), (2)得$a=3$

此題考驗學生對指數函數待征的應用，與工作紙例題相似。

3. *作出函數$f(x)=b-x$ 與 $g(x)=b^{-x}$ 的簡圖, 其中

$b\in(1,+\infty)$	$b\in(0,1)$
	

這道題考驗學生函數 $g(x)=b^{-x}$ 的圖像是與函數 $y=a^x$ 的圖像是關於y軸對稱的，因此當$b\in(1,+\infty)$時，函數的圖像是$y=a^x$ $a\in(0,1)$的圖像；而作$f(x)$的圖像目的是希望讓學生記起所學繪畫一次函數的方式。

4. *求下列函數的定義域與值域:

4.1. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$

解: $\because x\neq 0$

$\therefore 2^{\frac{1}{x}}\neq 1$

由此得

定義域: $\{x|x\neq 0\}$

值域: $y\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

4.2. $f(x)=\sqrt{1-2^x}$

解: $1-2^x\geq 0$

$2^x\leq 1$

$x\leq 0$

$f(x)\geq 0$

又$1-2^x<1$

由此得

定義域: $x\in(-\infty,0]$

值域: $y\in[0,1)$

此題第 2 倍分有很多學生都以為函數的值域為$y\in[0,+\infty)$，這是因為他們忽略了$2^x>0$，從而

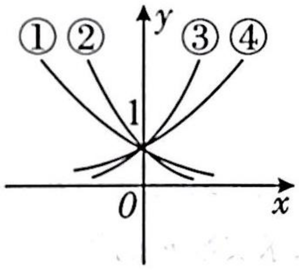
得到$1-2^x<1$這個條件。

5. 下圖是指數函數

$(1): y=a^x$; $(2): y=b^x$; $(3): y=c^x$; $(4): y=d^x$

的圖像，則a,b,c,d與 1 的大小關係是

$b<a<1<d<c$



此題考驗學生指數函數底數對函數圖像的影響，與工作紙例題相似，而這題採用文字代替數字，令學生完成題目後得到解法類似題目的方法: $b<a<1<d<c$

6. 比較下列各數的大小:

6.1. $1.8^{-1.2}$ ______ $1.8^{-1.8}$

解: $\because y=1.8^x$是增函數

$\therefore -1.2>-1.8 \Rightarrow 1.8^{-1.2}>1.8^{-1.8}$

6.2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ______ $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

解: $\because y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$是減函數 $\therefore \frac{1}{3}<\frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

6.3. $2^{-0.5}$ ______ $3^{0.2}$

解: $\because 2^{-0.5}<2^0=1$ ； $3^{0.2}>3^0=1$

$\therefore 2^{-0.5}<3^{0.2}$

此題利用指數函數的單調性及必定過點$(0,1)$的特性，與工作紙例題相似。

7. *若函數$f(x)=a^x$ $(a>0$ 且$a\neq 1)$在$[-2,1]$上的最大值為 4，最小值為m，結合簡圖求m

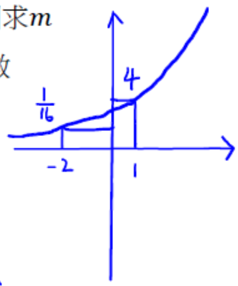
7. 若函數$f(x)=a^x$ $(a>0$ 且$a\neq 1)$在$[-2,1]$上的最大值為 4，最小值為m，結合簡圖求m

解: 當$a\in(1,+\infty)$時，$f(x)$是增函數

$\therefore a^1=4 \Rightarrow a=4$

此時函數最小值

$m=f(-2)=4^{-2}=\frac{1}{16}$

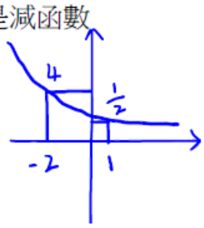


當$a\in(0,1)$時，$f(x)$是減函數

$\therefore a^{-2}=4 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

此時函數最小值

$m=f(1)=\frac{1^1}{2}=\frac{1}{2}$



此題考驗學生利用數形結合的方式解題，而很多學生都忽略了$a\in(0,1)$的情況，証明他們在全面性思考上還有進步空間。

指數型複合函數的單調性

當$a > 1$時, $y = a^x$在R上是增函數，由之前所學過判斷函數單調性時所用的其中一個方法“作差法” 可知

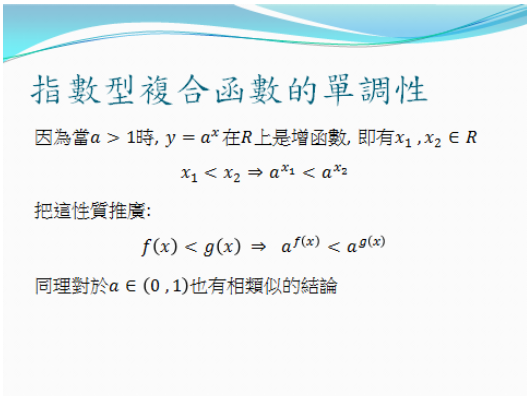
若$x_1, x_2 \in R$且$x_1 < x_2$

我們可以得到$a^{x_1} < a^{x_2}$

把這性質推廣，可以得到這個性質對函數也有

$$f(x) < g(x) \;\Rightarrow\; a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

由此，我們現在討論一下指數型複合函數的性況。



情況	$a \in (1,+\infty)$		$a \in (0,1)$	
$f(x) = a^x$	$f(x)$在$[a,b]$上是 增函數		$f(x)$在$[a,b]$上是 減函數	
$y = g(x)$	$g(x)$在$[a,b]$上是增函數	$g(x)$在$[a,b]$上是減函數	$g(x)$在$[a,b]$上是增函數	$g(x)$在$[a,b]$上是減函數
$h(x) = a^{g(x)}$	$h(x)$在$[a,b]$上是增函數	$h(x)$在$[a,b]$上是減函數	$h(x)$在$[a,b]$上是減函數	$h(x)$在$[a,b]$上是增函數

1. 當$a \in (1,+\infty)$時，$= a^x$在$[a,b]$上是增函數，若$g(x)$在$[a,b]$上是增函數，則有

$$a \le x_1 < x_2 \le b \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow a^{g(x_1)} < a^{g(x_2)}$$

所以$h(x)$在$[a,b]$上是增函數

2. 當$a \in (1,+\infty)$時，$= a^x$在$[a,b]$上是增函數，若$g(x)$在$[a,b]$上是減函數，則有

$$a \le x_1 < x_2 \le b \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow a^{g(x_1)} > a^{g(x_2)}$$

所以$h(x)$在$[a,b]$上是減函數

3. 當$a \in (0,1)$時，$= a^x$在$[a,b]$上是減函數，若$g(x)$在$[a,b]$上是增函數，則有

$$a \le x_1 < x_2 \le b \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow a^{g(x_1)} > a^{g(x_2)}$$

所以$h(x)$在$[a,b]$上是減函數

4. 當$a \in (0,1)$時，$= a^x$在$[a,b]$上是減函數，若$g(x)$在$[a,b]$上是減函數，則有

$$a \le x_1 < x_2 \le b \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow a^{g(x_1)} < a^{g(x_2)}$$

所以$h(x)$在$[a,b]$上是增函數

*指數型複合函數的單調性與實數乘法有相類似的地方，就是 “正負得負，負負得正” 。

練習 9: 判斷函數$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+3}$的單調性

解: 函數的定義域為R

$\because f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

這是二次函數, 所以當$x < 1$時，$f(x)$是減函數；當$x > 1$時，$f(x)$是增函數

而$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$在$R$上是減函數

所以有$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+3}$在$(-\infty, 1)$上是增函數；在$(1, +\infty)$上是減函數

練習 10: 已知$a > 0$ 且$a \neq 1, x \in R, x \neq 1$, 當$a^{x^2+1} < a^{2x}$時, 求$a$的取值範圍

解: 這題要先判斷$x^2 + 1$與$2x$的大小關係，利用 "作差法"

$\because x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$ 又$x \neq 1$，所以得出結論$x^2 + 1 > 2x$

而$\because a^{x^2+1} < a^{2x}$可知函數$y = a^x$是減函數

由此可得$a \in (0, 1)$

*練習 9 和 10 是檢示學生能否利用指數型複合函數的性質去解決問題。

總結

今天我們一起對功課的問題做了總結與評價,並且認識了指數型複合函數的單調性: 指數型複合函數的單調性與實數乘法有相類似的地方，就是 "正負得負，負負得正"，其中「正」可視為增函數、「負」可視為減函數。

佈置作業:

完成工作紙一指數函數的概念、圖像與性質 8~9(附錄 3)

對數函數的概念和性質

科目：數學	班別：高一		
課題：對數函數概念、圖像與性質		課時120分鐘 (3節課)	學生人數：19
教科(參考)書：普通高中課程標準實驗教科書必修 1，工作紙			
教具：surface pro 4 平板電腦 ，投影機 ，WIFI 同屏投影機轉接器 ，簡報			

教學分析:

學習了指數函數的圖像和性質後，學生通過類比，結合之前所學的反函數概念，在求指數函數的反函數過程，利用對數式和指數式是互逆的運算，進而知道對數函數是指數函數的反函數。

本次兩節課的設計目的是使學生認識對數函數模型，掌握對數函數的圖像性質，在探究新知方面，利用多媒體數學軟件，使學生能形像直觀地觀察圖像的變化過程，提高學生的學習主動性。

第一、二課節的教學目標是學生能掌握函數的概念及圖像性質，第三課節的教學目標是學生能掌握對數形式的複合函數的單調性判定，以及相關的綜合應用。

三維目標：

1 通過類比，理解對數函數的數學模型和基本概念，利用以往學習函數的方法，探究對數函數的定義域，值域，單調區間，奇偶對稱性等，讓學生掌握函數研究的基本方法。

2 利用對數和指數運算是逆運算，對數函數是指數函數的反函數這一性質，引入對數函數的定義，並利用圖像關於$y = x$對稱，使學生快速掌握圖像特點。

3 在數學學習內容關聯性方面，讓學生體會指數函數與對數函數有內在的對稱統一性，而在研究函數性質時，結合二次函數圖像特點分析取值範圍，培養學生歸納推理的思維能力，提高學習數學的興趣。

教學重點：

1. 掌握對數函數的概念，圖像和性質
2. 掌握圖像變換的基本方法(如平移，對稱等)在對數函數變化中的應用。
3. 能利用對數函數的圖像和性質進行比較大小，判斷對數函數形狀等應用。
4. 能利用對數函數的單調性去推論出對數型複合函數的單調性。

教學難點：

1. 底數a對圖像的影響，利用指數函數與對數函數是反函數，準確作出對數函數的簡圖。
2. 利用圖像性質解決相關應用題。

教學內容／過程：

引入：

<u>**問題 1：**</u>上一節指數函數學習中，我們用函數 $y = 1.17^x$來估計澳門未來若干年可望達到的 GDP 值，如果知道了往後某年要達到的 GDP 值y，我們如何確定年數x呢？此時引導學生回答 $x = log_{1.17}y$

<u>**問題 2：**</u>$y = 1.17^x$，$x = log_{1.17}y$與$y = log_{1.17}x$三者的關係是甚麼？引導學生聯想到指對數是互逆運算，而中$y = 1.17^x$和$y = log_{1.17}x$是互為反函數的關係

老師給出對數的定義： 如果$2^x = y$，那麼就有$x = log_2 y$，於是，函數$f(x) = 2^x$的反函數是 $f^{-1}(x) = log_2 x$

所以指數函數$y = a^x(\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$的反函數就是$y = log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$

把函數$y = log_a x\ \left(a > 0，a \neq 1\right)$稱為對數函數，其中$x$是自變量，定義域是$\left(0，+\infty\right)$，值域是$(-\infty，+\infty$

請同學根據對數函數的定義判定：

練習 1：下列哪個函數是對數函數？(　　　　)

(1) $y = log_{\frac{1}{2}}(-x)(x < 0)$ 答：系數為 1，底數和真數合乎定義，是對數函數	(2) $y = 2log_4(x - 1)\ (x > 1)$ 答：不是對數函數，因系數不為１	(3) $y = lnx\ (x > 0)$ 答：底數為e，真數>0，是對數函數	(4) $y = log_{(-3)}x\ (x > 0)$ 答：底數＜０，不是對數函數

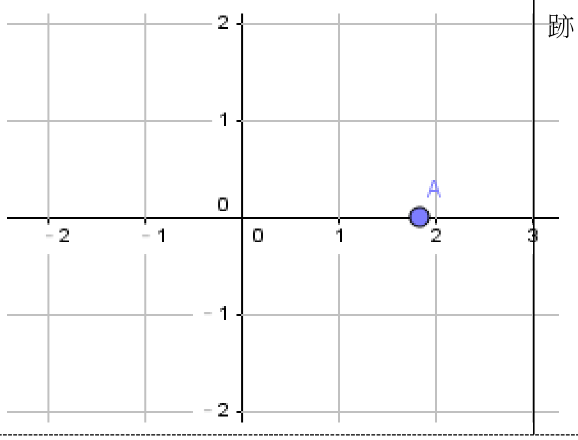
總結：(1) (3)是對數函數

鞏固了對數函數的概念後，參照指數函數，我們利用軟件研究對數函數圖像性質

開啟 Geogebra 軟件，作出$y = log_2 x$ 的圖像

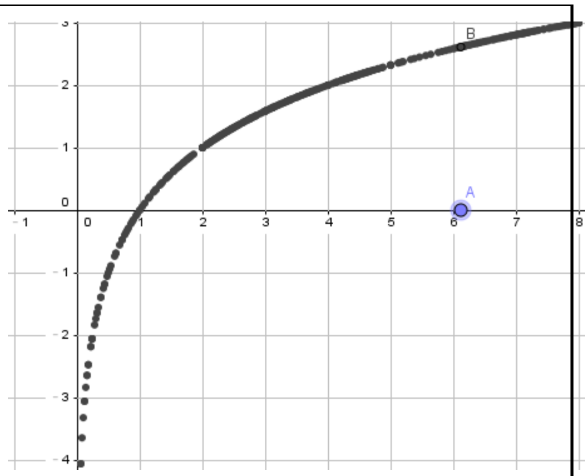
步驟(1)：

在x軸上取一動點A



步驟(2)：輸入$t = x(A)$，測量點A的橫坐標

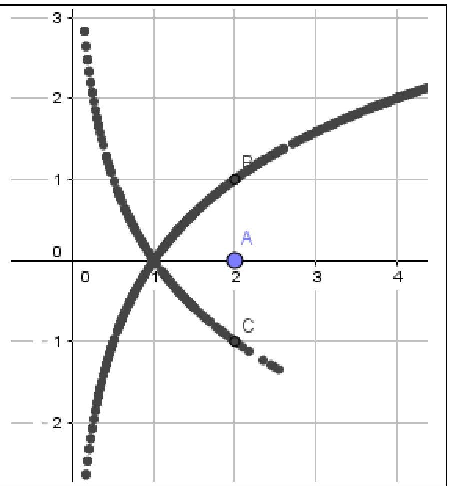
步驟(3)：輸入$B = (t, log_2 t)$，並追蹤點B的軌跡，移動點A



問題 3： 有哪些點具參考價值，能使自己在工作紙上作的圖像較為精準？具參考性的有以下各點：

重覆步驟(1)~(3)，作出$y = log_{\frac{1}{2}}x$的圖像

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$y = log_2 x$	-1	0	1	2	3	4
$y = log_{\frac{1}{2}}x$	1	0	-1	-2	-3	-4



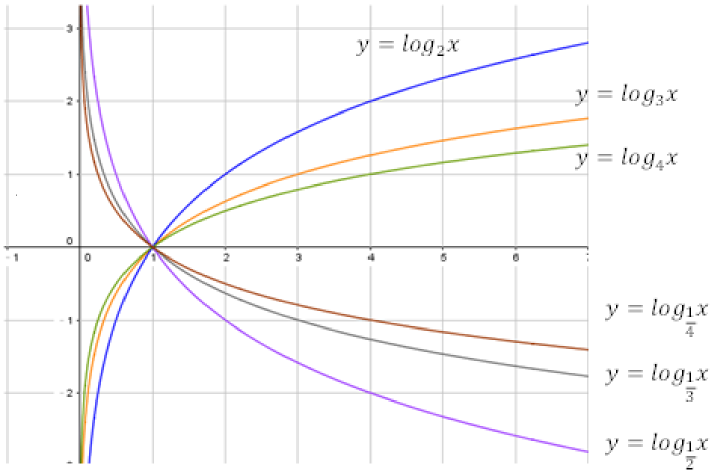
問題 4： 觀察圖像，你能發現兩個圖像有甚麼特點？它們之間有沒有對稱性？

引導學生發現$y = log_{\frac{1}{2}}x = -log_2 x$ ，所以$y = log_2 x$ 與$y = log_{\frac{1}{2}}x$的圖像關於x軸對稱

在 Geogebra 中輸入函數$y = log_a x$，設定滑杆a的值在 0~10 之間，增量為 0.1，移動滑杆改變a的值，讓學生觀察不同的a值對函數圖像的影響，按指數函數的分類，觀察$0 < a < 1$ 和 $a > 1$兩種情況，特別地在$a = 1$ 和$a = 0$ 時，函數無意義。

問題 5： 學生觀察底數a對函數圖像的影響，例如：作出$y = log_3 x$和$y = log_{\frac{1}{3}}x$、$y = log_4 x$和$y = log_{\frac{1}{4}}x$

師生共同總結：圖像都在y軸右邊，函數都過(1,0)



定義域	R
值域	$(-\infty, +\infty)$
性質	(1) 圖像過$(1,0)$，即$0 = log_a 1$，1 的對數是 0 (2) 當$a > 1$時，$y = log_a x$是增函數 (3) 當$0 < a < 1$時，$y = log_a x$是減函數
對稱性	$y = log_a x$與$y = log_{\frac{1}{a}} x$的圖像關於x軸對稱
觀察圖像，還可得到以下性質： 對數的底數越大，函數圖像越遠離y軸的正方向	

練習 2：求下列函數的定義域：

(1) $y = log_2(x^2 - 4x - 5)$

解：$x^2 - 4x - 5 > 0$

$(x-5)(x+1) > 0$

$x < -1$, 或$x > 5$

$\therefore x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

(2) $y = \frac{\sqrt{log_{0.8} x - 1}}{2x-1}$

解：$\begin{cases} log_{0.8} x - 1 \geq 0 \\ x > 0 \\ 2x - 1 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 0.8 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right]$

(3) $y = log_{5-x}(2x - 2)$

解：$\begin{cases} 2x - 2 > 0 \\ 5 - x > 0 \\ 5 - x \neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 1 \\ x < 5 \\ x \neq 4 \end{cases}$

$\therefore x \in (1,4) \cup (4,5)$

小結：本練習旨在鞏固對數函數中，真數和底數的取值範圍，同學較易忘記討論真數範圍。

練習 3：利用對數的性質比較下列各組數的大小：

(1) $log_2 3$ ________ $log_2 7.5$ (解答：$y = log_2 x$為增函數，$3 < 7.5$，所以$log_2 3 < log_2 7.5$)

(2) $log_{0.7} 0.6$ ________ $log_{0.7} 5.8$ (解答：$y = log_{0.7} x$為減函數，$0.6 < 5.8$，所以

$log_{0.7}0.6 >\ log_{0.7}5.8$)

(3) $log_4 0.3$ ________ 0　　　　(解答：引入中間值$0 = log_4 1$，所以$log_4 0.3 <\ 0 = log_4 1$)

(4) $log_{\frac{1}{3}}2$ ________ 1　　　　(解答：引入中間值$1 = log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$，所以$log_{\frac{1}{3}}2 < 1 = log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$)

(5) $log_6 7$ ____________ $log_7 6$　(解答：引入中間值$log_6 7 >\ log_6 6 = 1$，$log_7 6 <\ log_7 7 = 1$，所以 $log_6 7 >\ log_7 6$)

(6) $log_3 2$ ________ $log_{0.3}3$　　(解答：引入中間值$log_3 2 > log_3 1 = 0$，$log_{0.3}3 < log_{0.3}1 = 0$，所以$log_3 2 >\ log_{0.3}3$)

(7) $log_a 3$ _______________ $log_a 4$ 其中$(a > 0, a \neq 1)$
(解答：若$0 < a < 1$，則有$log_a 3\ >\ log_a 4$ ；若$a > 1$，則有$log_a 3\ <\ log_a 4$)

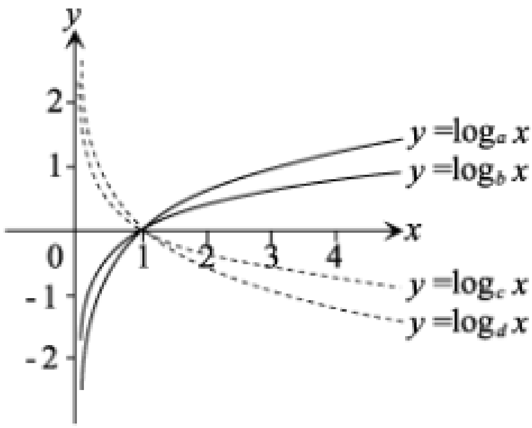
小結：一般地我們利用對數函數的增減性來比較兩個同底對數的大小，當底數不同時，我們常引入 1 或 0 作為中間值，間接地比較兩個數的大小。

練習 4：下圖中，$y = log_a x$與$y = log_d x$兩圖形對稱於x軸，$y = log_b x$ 與$y = log_c x$兩圖形對稱於x軸，
則下列何者正確？(　　　)　(多選題)

A. $a > b > c > d$　B. $b > a > c > d$

C. $b > a > d > c$　D. $ad = 1$

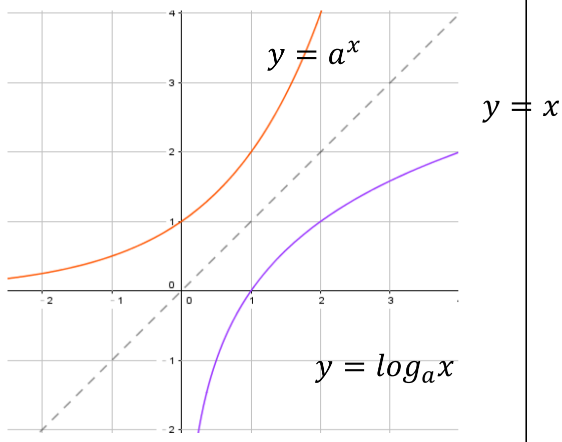
E. $abcd = 1$



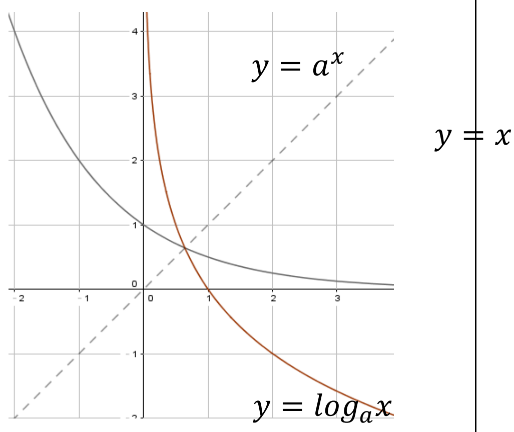
解答：本題查核學生是否掌握底數a對函數圖像形狀的影響，取點$(a, 1)$、$(b, 1)$、$(c, 1)$、$(d, 1)$，可以看出$b > a > d > c$，另外結合函數$y = log_a x$與$y = -log_a x = log_{\frac{1}{a}}x$ 的圖像關於x軸對稱，可得正確選項為 C、D、E。

對數型複合函數的性質

<u>問題 1：</u>由於函數$y = log_a x$的圖像與$y = a^x$ $(a > 0$，$a \neq 1)$ 互為反函數，同學們能不能利用反函數圖像的對稱性把指對數函圖的圖像快速描畫出來？引導學生回憶圖像關於直$y = x$對稱。



$a > 1$



$0 < a < 1$

練習 5：求下列函數的反函數：(1) $y = 3\left(\sqrt{5}\right)^x$ $(x \in R)$ ________________________

(2) $y = e^x$ ________________________________

(3) 設函數$y = 4 + log_2(x-1)$ 的定義域為$[3, +\infty)$，則其反函數的定義域為

____

解答：(1) $y = log_{\sqrt{5}}\frac{x}{3}$ $(x > 0)$ (2) $y = lnx$ $(x > 0)$ (3)由於$x \geq 3$，所以$x - 1 \geq 2$，$y \geq 4 + log_2 2 = 5$， $\therefore y \in [5, +\infty)$

小結：求反函數的過程是做逆運算的過程，由函數與反函數的定義域、值域關係，可知反函數的定義域是原函數的值域。

<u>問題 2：</u>類比指數函數複合類型，以下是對數形式的複合函數類型，請同學利用"同增異減"性質解答下題？

練習 6：求函數$y = log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 5x - 3)$的遞減區間

解：$\because 2x^2 - 5x - 3 > 0$ ，得$x < -\frac{1}{2}$ 或$x > 3$

令$u = 2x^2 - 5x - 3$ ，函數u的圖像是開口向上的拋物線，所以在$(-\infty, -\frac{1}{2})$單調下降，在$(3, +\infty)$單調上升

函數$y = log_{\frac{1}{3}}(u)$是減函數，根據同增異減法則，函數$y = log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 5x - 3)$的遞減區間是$(3, +\infty)$

小結：本題旨在加強學生解決複合函數求單調性的能力。

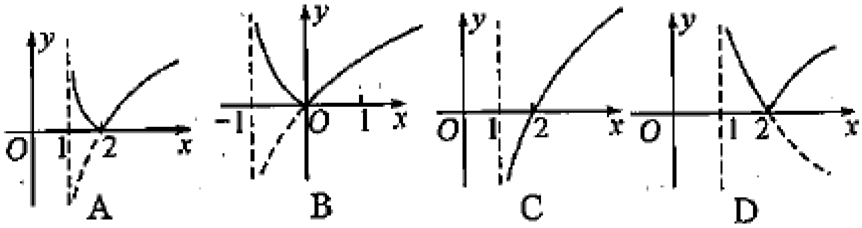
練習 7：求函數$y = log_2(x^2 - 4x + 6)$的值域

解答：設$u = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geq 2$，而$f(u) = log_2 u$在$(0,+\infty)$上是增函數，所以$log_2 u \geq log_2 2 = 1$

所以原函數的值域是$[1,+\infty)$

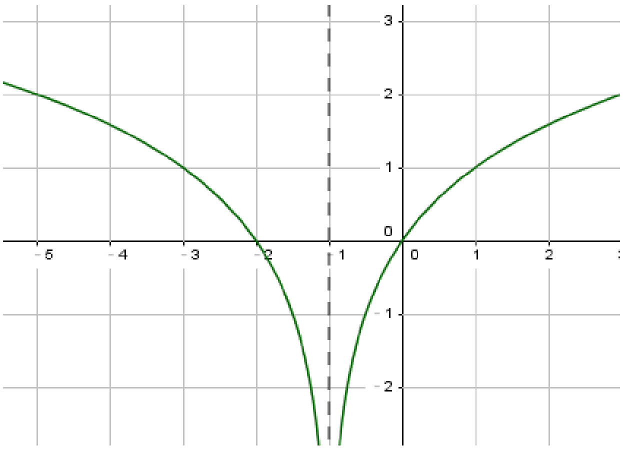
小結：本題利用對數函數$y = log_2 u$（其中$u = x^2 - 4x + 6$的單調性求值域，進一步鞏固對複合函數理解。

練習 8：若$f(x) = lgx$，則$y = |f(x-1)|$ 的圖像是(　　)



解答：將$y = lgx$的圖像向右平移 1 個單位後，再把圖像中的x軸下方部份關於x軸對稱。

練習 9：作出$y = log_2|x+1|$ 的簡圖，由圖像指出單調區間，並說明如何由$y = log_2 x$變化而成？



解答：$y = log_2|x+1| = \begin{cases} log_2(x+1) & (x > -1) \\ log_2(-x-1) & (x < -1) \end{cases}$ 如圖所示，函數的遞增區間為$(-1,+\infty)$，遞減區間為$(-\infty,-1)$

作出函數$y = log_2 x$的圖像，將其關於y軸對稱得另一支的曲線，最後把兩支曲線向左平移 1 個單位就得到上圖。

小結：練習 8 和練習 9 的作用是鞏固學生對圖象平移、對稱的理解。

練習 10：設$f(x) = lg\frac{5-x}{5+x}$，求：(1) 求函數$f(x)$的定義域和值域　(2) 判斷$f(x)$的奇偶性　(3) $f(x)$的單調性

解答：(1) $\frac{5-x}{5+x} > 0$，所以$-5 < x < 5$ 所以$f(x)$的定義域是$(-5,5)$，值域是R

(2) $f(-x) = lg\frac{5+x}{5-x} = lg\left(\frac{5-x}{5+x}\right)^{-1} = -f(x)$，所以$f(x)$是奇函數

(3) 因為$\frac{5-x}{5+x} = \frac{10}{5+x} - 1$在$(-5,5)$上是減函數，所以$f(x)$ 在$(-5,5)$上是減函數

小結：本題旨在讓學生溫習函數奇偶單調等性質的一般求法，把以前所學與新知識聯係起來。

總結

1. 對數函數的概念和性質

2. 利用圖像變換的基本方法(如平移、對稱等)，解決函數圖像應用問題

3. 利用對數函數圖像性質進行比較大小，求定義域、值域、單調性
學習了對數函數的複合函數類型

佈置作業:
完成工作紙一對數函數的概念、圖像與性質(附錄 2)

測驗複習課

科目：數學	班別：高一		
課題：指數、對數函數測驗複習課		課時<u>40</u>分鐘（一節課)	學生人數：20
教科(參考)書：普通高中課程標準實驗教科書必修 1，工作紙			
教具：surface pro 4 平板電腦 ，投影機 ，WIFI 同屏投影機轉接器 ，簡報			

教學分析：

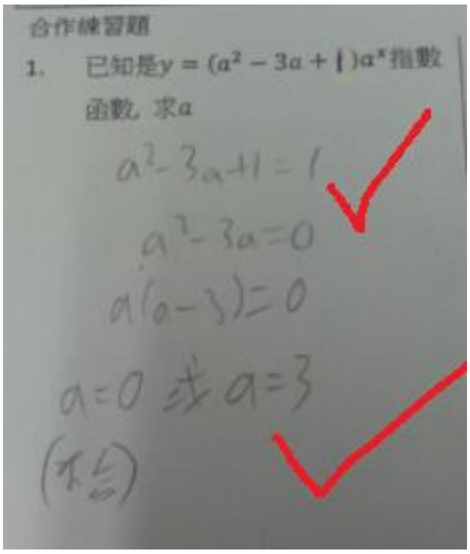
本節課主要以學生為主，教師為輔的方式與學生進行複習。在課堂開始前兩天，教師會派 發一張複習紙給序每位學生，而學生之間已經按能力分成 10 組，其中每組為 1 位數學較好的同學，另一位是數學較差的同學。 (A~J)。

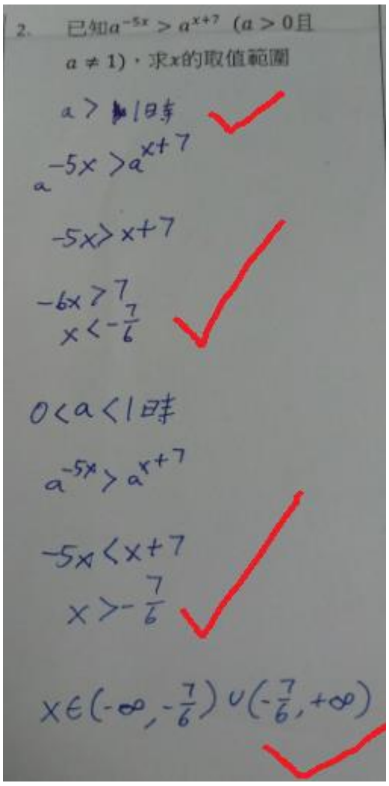
在本節課的前半部分，會有四組的同學輪番負責向其他同學講解複習紙的第一部分——合作練習題。而其他學生與老師則負責糾正(如果需要)做題同學的錯誤。

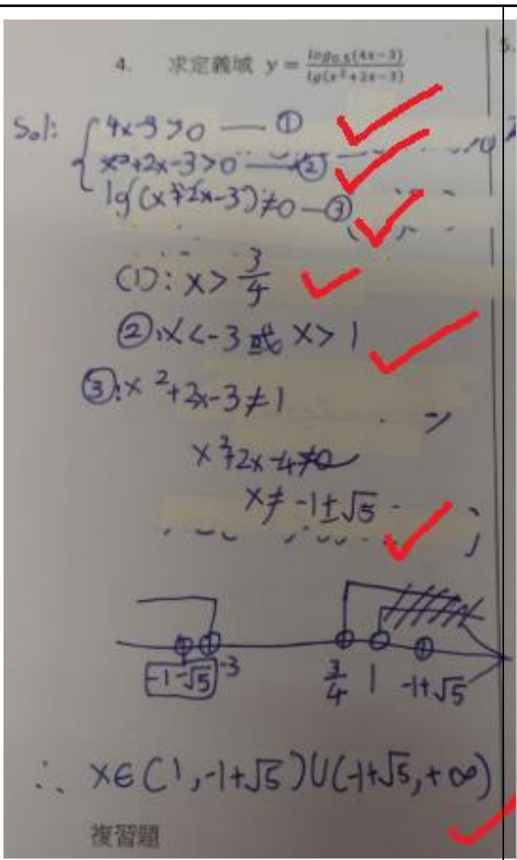
本節課的第二部分則是由學生以個人身份主動提出作答的練習題，而題目寫在學生的複習紙上，然後由老師批改。

教學內容／過程：

本節課的流程比較簡單直接，且主要由學生主導，故此在此只放上學生所做的結果，而複習紙的電子版本與答案則放於附件(附錄 3)







4. 求定義域 $y=\frac{\log_{0.5}(4x-3)}{\lg(x^2+2x-3)}$

Sol: $\begin{cases} 4x-3>0 & —① \\ x^2+2x-3>0 & —② \\ \lg(x^2+2x-3)\neq 0 & —③ \end{cases}$

(1): $x>\frac{3}{4}$

②: $x<-3$ 或 $x>1$

③: $x^2+2x-3\neq 1$

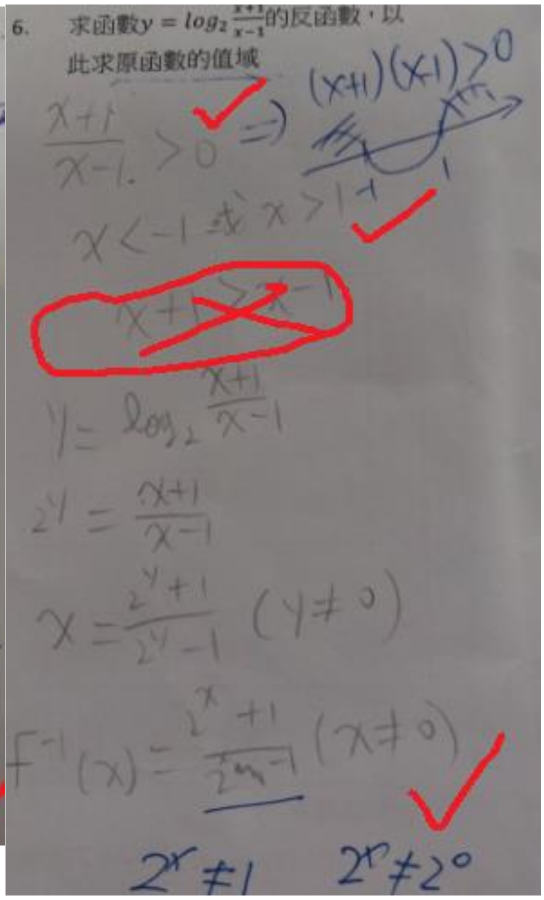
$x^2+2x-4\neq 0$

$x\neq -1\pm\sqrt{5}$

$-1-\sqrt{5}$ -3 $\frac{3}{4}$ 1 $-1+\sqrt{5}$

$\therefore x\in(1,-1+\sqrt{5})\cup(-1+\sqrt{5},+\infty)$

複習題



6. 求函數 $y=\log_2\frac{x+1}{x-1}$ 的反函數，以此求原函數的值域

$\frac{x+1}{x-1}>0 \Rightarrow (x+1)(x-1)>0$

$x<-1$ 或 $x>1$

$\cancel{x+1>x-1}$

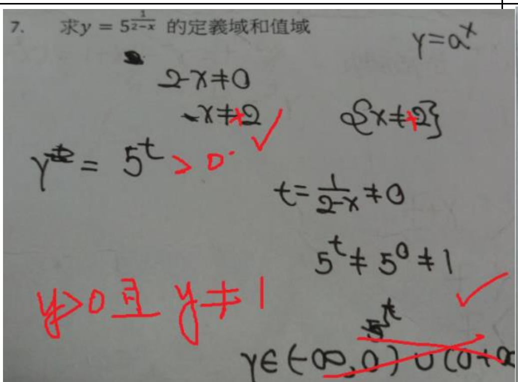
$y=\log_2\frac{x+1}{x-1}$

$2^y=\frac{x+1}{x-1}$

$x=\frac{2^y+1}{2^y-1}\ (y\neq 0)$

$f^{-1}(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}\ (x\neq 0)$

$2^x\neq 1 \quad 2^x\neq 2^0$



7. 求 $y=5^{\frac{1}{2-x}}$ 的定義域和值域

$y=a^x$

$2-x\neq 0$

$x\neq 2 \quad \{x\neq 2\}$

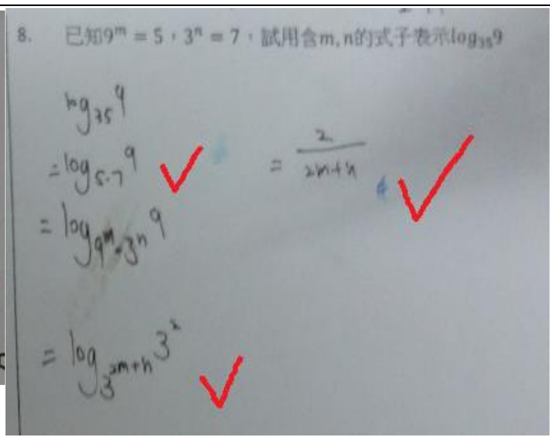
$y=5^t>0$

$t=\frac{1}{2-x}\neq 0$

$5^t\neq 5^0\neq 1$

$y>0$ 且 $y\neq 1$

$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$



8. 已知 $9^m=5$，$3^n=7$，試用含m,n的式子表示 $\log_{35}9$

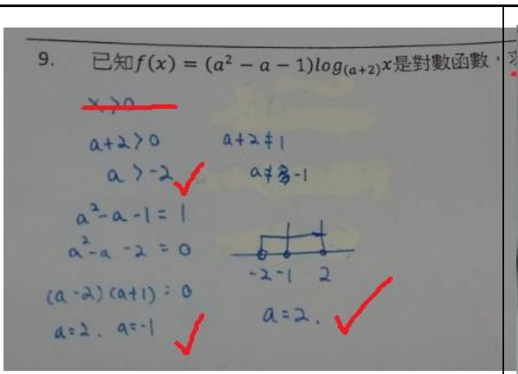
$\log_{35}9$

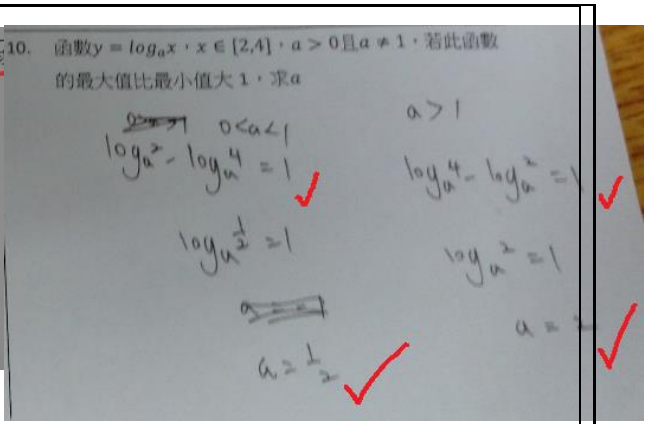
$=\log_{5\cdot 7}9$

$=\log_{9^m\cdot 3^n}9$

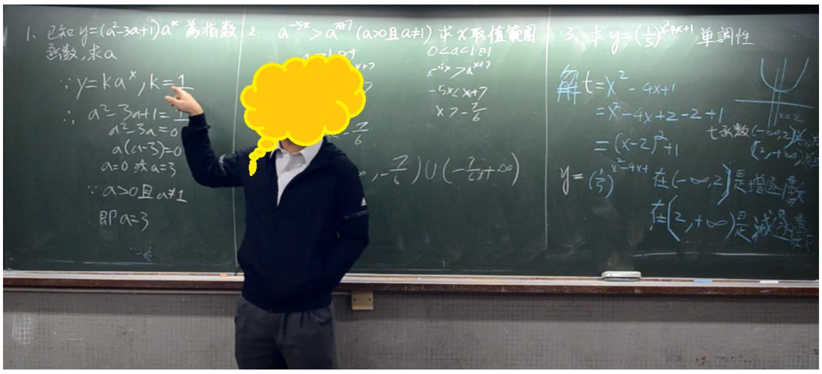
$=\log_{3^{2m+n}}3^2$

$=\frac{2}{2m+n}$





上課照片：



同學在講解合作複習題

老師在講評

測驗

我校老師們在測驗卷的設計上，除了考查學生對各知識點的掌握情況外，還會引入往後的教學內容(即新知識挑戰)，讓學生能瞭解到數學的學習是連續的、是環環相扣的。而且為了鼓勵學生勇於挑戰，因此測驗卷的設定分數為110分，挑戰部分會放在試卷的最後，既能鼓勵學習挑戰，亦可以解決學生充份複習卻未能獲取佳績的問題。

本次測驗包括以下知識點及各知識點如下

1. 指數函數的概念
2. 指數函數的圖像與性質
3. 指數函數在實際問題中的應用、抽像函數中的指數模型
4. 複合函數性質的應用
5. 對數函數的概念
6. 對數函數的圖像與性質
7. 與對數有關的複合函數的單調性、最值問題

1. 下列各函數中，屬於對數函數的是

   A. $y=\log_a(-x)$　B. $y=\lg x$　C. $y=\ln e$　D. $y=2^{\log_2 x}$

解：(知識點 5) 選 C，必須滿足$y=\log_a x$, $(a>0, a\neq 1,\ x>0)$的形式，故 A, B, D 錯

2. 下列式子中，錯誤的是

   A. $2^{3.2}>2^{2.2}$　B. $(0.2)^{0.2}<(0.2)^{0.3}$　C. $\log_{0.3}2>\log_{0.3}2.1$　D. $\log_5 4>\log_{0.2}0.5$

解：(知識點 2,6) 當底數$a>1, y$隨x的增大而增大，底數$0<a<1, y$隨x的增大而減小，故選 B

3. 已知函數$y=a^{x-2}-3\ (a>0$ 且$a\neq 1)$的圖像必定過一定點，此定點坐標是

   A. $(0\,,1)$　B. $(3\,,2)$　C. $(2\,,3)$　D. $(2\,,-3)$

解：(知識點 2) $y=a^t$必過點(0, 1)，故設$x-2=0$, $x=2$, $f(2)=a^{2-2}-3=-3$，所以過點$(2,-3)$，故選 D

4. $log_3 4$, $log_4 3$, $log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}$的大小順為

   A. $log_3 4<log_4 3<log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}$　B. $log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}<log_4 3<log_3 4$　C. $log_4 3<log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}<log_3 4$　D. $log_4 3<log_3 4<log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}$

解：(知識點 6) $\because \log_3 4>1,\ 0<\log_4 3<1, \log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}=-1<0,\ \therefore log_3 4<log_4 3<log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}$, 選 A

5. 函數$f(x)=a^x+log_a(x+1)$在$[0,1]$上的最大值與最小值之和為a，則a 的值為

   A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{4}$　C. 2　D. 4

解：(知識點 2,3,6,7) 考慮函數的單調性，$f(x)$在$[0,1]$的兩個端點處取得最大(小)值，依題意有$1+\log_a 2+a=a$, $a=\frac{1}{2}$

二, 簡答題: 20 分 @5

1. 已知$f(x)=(a^2-3)(a+2)^x$是指數函數，求a

解：(知識點 1, 2) $\begin{cases} a^2-3=1 \\ a+2>0 \\ a+2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 2 \\ a>-2 \\ a\neq -1 \end{cases} \Rightarrow a=2$

2. 已知指數函數$y_1=0.5^x$與$y_2=(a^2-2a-1)^x$的圖像關於y軸對稱，求a

解：(知識點 2, 3, 4) $a^2-2a-1=(0.5)^{-1}=2$

$a^2-2a-3=0$

$a=3,或\, a=-1$

3. $f(x)=(a^2-a+1)log_{(a+1)}x$ 是對數函數，求實數a

解：(知識點 5,6) $\begin{cases} a^2-a+1=1 \\ a+1>0 \\ a+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \text{ 或 } a=0 \\ a>-1 \\ a\neq 0 \end{cases} \Rightarrow a=1$

4. 求函數$f(x)=(0.2)^x-1$的反函數，並以此求$f(x)$的值域。

解：(知識點 4, 6, 7) $y=0.2^x-1$， $x=\log_{0.2}(y+1)$ 反函數是$y=\log_{0.2}(x+1)$,

定義域是$x>-1$ 所以函數值域是$y>-1$

三, 解答題 70 分@10

1. 已知指數函數$f(x)=a^x\ (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$在$[-3\,,3]$上的最大值為 8，求$a$和$f(x)$在$[-3\,,3]$上的最小值

解：(知識點 2, 3, 4, 7)

若$a>1$，$f(x)$在$[-3\,,3]$上單調遞增，最大值$8=f(3)=a^3$，$a=2$ ，此時最小值是$f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{8}$

若$0<a<1$，$f(x)$在$[-3\,,3]$上單調遞減，最大值$8=f(-3)=a^{-3}$，$a=\frac{1}{2}$ ，此時最小值是$f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

2. 討論函數$f(x)=a^{5-2x-x^2}$的單調性，其中$a\in(0,1)$

解：(知識點 2, 3)

$5-2x-x^2=-(x+1)^2+6$，當$x\in(-\infty,-1)$函數單調上升，對於$x\in(-1,+\infty)$ 函數單調下降

而$y=a^t$是減函數，則當$x\in(-\infty,-1)$函數單調下降，對於$x\in(-1,+\infty)$ 函數單調上升

3. 討論函數$y = log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 6)$的單調性

解：(知識點 6, 7)

設$t = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 > 0$　對於函數t，當$x \in (-\infty, 2)$函數單調下降，對於$x \in (2, +\infty)$ 函數單調上升

而$y = \log_{\frac{1}{3}} t$是減函數，則當$x \in (-\infty, 2)$函數單調上升，對於$x \in (2, +\infty)$ 函數單調下降

4. (1) 已知$f(x) = t^2 - 2t$ 的值域為$[8\,, 48]$, 求t的取值範圍；(2) 利用(1)結果, 已知

$g(x) = 4^x - 2^{x+1}$的值域為$[8\,, 48]$, 求 x 的取值範圍

解：(知識點 2, 3, 4)

$$\begin{cases} t^2 - 2t \geq 8 \\ t^2 - 2t \leq 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq -2 \text{ 或} t \geq 4 \\ -6 \leq t \leq 8 \end{cases} \Rightarrow -6 \leq t \leq -2(\text{不合})\text{或} 4 \leq t \leq 8$$

$g(x) = 4^x - 2^{x+1} = (2^x)^2 - 2 \cdot (2^x)$

設$t = 2^x$，則有$g(t) = t^2 - 2t$

所以$4 \leq 2^x \leq 8$

$2 \leq x \leq 3$

5. 求$f(x) = \frac{\sqrt{\lg(x-2)}}{x}$ 的定義域

解：(知識點 4,5,6)

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \lg(x-2) \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq 3 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$$

6. 已知$2^a = 3$，$3^b = 11$，試以a , b 表示$log_{66}44$

解：(知識點 1, 5)

由已知得$a = \log_2 3$,$b = \log_3 11$　$\log_{66} 44 = \frac{\log_3 11 + 2\log_3 2}{\log_3 11 + \log_3 2 + \log_3 3} = \frac{b + \frac{2}{a}}{b + \frac{1}{a} + 1} = \frac{ab+2}{ab+1+a}$

7. 函數$y = log_2 \frac{1+x}{a-x}$ 的圖像關於原點對稱，求實數a 的值

解：(知識點 4, 6, 7)

因為$f(x)$是奇函數，所以對於定義域內的任意x的值，都有$f(-x) = -f(x)$成立，所以

$$\log_2 \frac{1+x}{a-x} + \log_2 \frac{1-x}{a+x} = 0$$

即$\log_2 \frac{1-x^2}{a^2-x^2} = 0$ ，$\frac{1-x^2}{a^2-x^2} = 1$ 得$a^2 = 1$，$a = \pm 1$

因為$a = -1$時，原函數不存在，所以a的值為 1

試教評估

本次教學的設計與以往不同的地方主要是運用了電腦動態來展示指數函數與對數函數的作圖過程，以及當底數變化時圖像的變化來讓學生更直觀地了解到指數函數與對數函數圖象的性質，較以往利用數學理論與例子，如：

當$a_1 > a_2 > 1$且$x > 0$時，$a_1^x > a_2^x$ (例: $3^2 > 2^2$)

當$a_1 > a_2 > 1$ 且$x = 0$ 時，$a_1^x = a_2^x$ (例: $3^0 > 2^0$)

當$a_1 > a_2 > 1$且$x < 0$時，$a_1^x < a_2^x$ (例: $3^{-1} < 2^{-1}$)

$\therefore f(x) = a^x$的圖像在$\begin{cases} a > 1 \\ x > 0 \end{cases}$時，函數的數值會隨著底數的增大而增大，在$\begin{cases} a > 1 \\ x < 0 \end{cases}$時，函數的數值會隨著底數的增大而減小，當$\begin{cases} a > 1 \\ x = 0 \end{cases}$時函數的數值為1

當$1 > a_1 > a_2 > 0$且$x > 0$時，$a_1^x < a_2^x$ (例: $\frac{1}{2}^2 > \frac{1}{3}^2$)

當$1 > a_1 > a_2 > 0$且$x = 0$時，$a_1^x = a_2^x$ (例: $\frac{1}{2}^0 = \frac{1}{3}^0$)

當$a_1 > a_2 > 1$且$x < 0$時，$a_1^x > a_2^x$ (例: $\frac{1}{2}^{-1} < \frac{1}{3}^{-1}$)

$\therefore f(x) = a^x$的圖像在$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ x > 0 \end{cases}$時，函數的數值會隨著底數的增大而減小，在$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ x < 0 \end{cases}$時，函數的數值會隨著底數的增大而增大，當$\begin{cases} a > 1 \\ x = 0 \end{cases}$時函數的數值為1

以上這種既長又難以掌握的方式(對數的理論較為相以，故此在這裡就不列出來了)，利用動態展示後可讓學生記得作圖過程，從而在解題時能利用作圖來輔助解題，讓學生的成績有明顯的增長，並且由於本年度教學在應用到數形結合的解題方式時，均會用到電腦來輔助同學理解，故本學年的高一學生對於高中數學的適應比起以往有了確實的進步。

在教授指對數函數與對數函數的圖像時，必定會回顧反函數的性質，並從指數與對數的定義可知得出對數函數與指數函數互為反函數，他們之間會有

(1) 該指數函數的定義域即為其反函數(對應的對數函數)的值域，反之亦然；

(2) 該指數函數與其反函數(對應的對數函數)的圖像是關於直線$y = x$對稱；

(3) 當可知確定某指數函數的圖像經過點$\left(x \quad , a^x\right)$時，可以知道其反函數(對應的對數函數)的圖像必定經過點$\left(a^x \quad , x\right)$ ，反之若知道某對數函數的圖像經過點$(x\, , \log_a x)$時，可以知道其反函數(對應的指數函數)的圖像必定經過點$\left(\log_a x \quad , x\right)$。

學生只要找住這些性質，就能在只要記住指數函數的圖像，便能準確畫出對應的對數函數圖像。這樣更加簡化了學生需要記憶的內容，強化了學生需要透過思考而得出解決問題方法的學習方式。於教學中利用軟件演示圖像生成，以及學生動手畫圖的練習，學生對這一性質掌握得較牢固。

一如以往的在教學及評估過程中，發現學生對複合函數的理解與掌握仍然存在困難，他們常常會犯以下錯誤：

(1) 求複合函數定義域時，對於對數函數作為內層時，易忽略真數大於零，例如：$y = \sqrt{1 - 2\, log_3(x+1)}$

(2) 求函數值域時，易忽略指數函數的值域，例如：$y = 2^x - 2^{x+1} - a = 0$有解，求$a$

(3) 利用單調性比較大小時，對於未知的底數a，很多學生忘記了要分成$a > 1$和$0 < a < 1$兩個情況進行討論，導致解答不全。

其主要原因除了是因為學生在學習這部分的內容時比較難以用圖像作輔助之外，對於高中一年級的學生來說，推理分析的能力仍是高中才比較需要的能力，故此要掌握該部分仍需一定的時間與操練，因此在學期末的複習週以及往後教授冪函數、三角函數的圖像與性質等課題上仍會不斷的複習這部分的內容。

另外，課堂上利用平板即時投影多個學生解題過程，老師可以即時做回饋，除了能節省不少時間之外，對課堂節奏的把握會更順手、更緊湊。比起傳統的黑板授課、學生做筆記課堂，這種利用平板電腦與學生一起完成課堂學習，讓學生能透入學習而不用擔心筆記是否齊全的教學方式，不單增加了學生投入度，也能補足了傳統課堂備課費時、書寫空間受限，學生在兼顧筆記與理解之間未能即時回饋的缺點。

反思及建議

澳門的教育正不斷的進步，根據《非高等教育發展十年規劃 (2011-2020 年)》中所提及的高中教學目標，比起以往著用中、英、數等「主科」為主，其他科目為「閒科」的教學方式，現在更著重「促進多元化高中教育體系與模式的發展，包括教育機構，課程以及學習的多元化，為學生按自己的興趣和能力進行選擇提供可能。」故此，教師需要下更大的苦功，為學生準備更充實有效的課堂教學，減輕學生學習「主科」的壓力，鼓勵他們尋找自己所長及興趣所在，積極的在求學過程中好好塑造自己，成為未來社會的棟樑。

學生在初中階段學習過函數初步知識，在高中階段研究函數，主要依循函數定義域、值域、單調性、奇偶性、週期性五個方面展開討論，指對數函數在初等函數中有著重要的地位，本單元的設計讓學生能自主探索，發現規律，逐漸養成獨立思考的能力。

在測驗前的一節複習課中，學生自主參與性和投入度都很高，同學在解題方法多樣，互相觀摩，除了鍛練溝通表達能力外，數學邏輯和分析能力亦逐漸加強，這樣的總結比傳統老師主導的課堂來得深刻。

由於課時不多，對於利用函數求複雜方程的解的類型，課堂上未能涉獵太多，這部份可以作為學生的課後拓展延續。我校學生在初中階段學習過 Geogebra 軟件，教師可以鼓勵學生課後多動手，利用資訊科技輔助學習探究，再進行適當的推理論證，我們相信，只要學生打下良好的基礎，以後遇到較複雜的問題時，也能經過思考，把問題分解成簡單的問題，逐一解決。

本次的教學設計概念既減輕了教師備課時的負擔、亦透過現代的科技減輕了學生學習的壓力。在我校任教的老師當中，已經有許多的班主任與他們班的學生建立了班級的微信群組或 WhatsApp 群組，對於學生與學校的溝通方面都起到良好的作用，故此在將來的教學設計方案之中，我們也希望除了利用學校本身的內聯網幫助學生學習之外、也能更加利用科技帶來的好處來協助學生成

長。

除了利用功課來評鑑學生的學習性況外，也可利用網上問卷設計的方式(如 Survey Monkey)來設計一些練習題，學生在家可以透過手機描掃 OR Code 來填寫是學習評估選擇題的方式，既環保亦可以讓老師立刻便統計出學生的學習性況。

亦希望能參考美國科技教育實踐家薩爾曼·阿敏·可汗(Salman Amin Khan)所推廣的「翻轉教室」教學方式，除了上傳教學材料外，也能更多地上傳一些進階的教學影片予學習能力較好的同學，令班級中的優生在課堂裡能幫助照顧差生，教導他們的同時為自己打好更紮實的根基，而在課後能透過老師與網絡的資源進階學習。

附錄

一、指數函數工作紙(已完成教學)

指數函數及其性質　　　　　　　　　　高一甲　姓名:＿＿＿＿＿＿　學號:＿＿＿＿

一, 指數函數的概念:

一般地, 函數$y = a^x$ $(a > 0$, 且$a \neq 1)$ 叫做**指數函數**, 其中x是自變量, 函數的定義域為R

二, 指數函數$f(x) = a^x$的特征:

1. a^x的系數為 1　2. a^x的底數是不等於 1 的常數　3. a^x的指數僅含有自變量x

練習 1: 判斷下列函數是否指數函數:

$y = \boxed{4}^{x}$	是 / 否	$y = x^4$ 冪	是 / 否	$y = -\boxed{4}^{x}$ -1	是 / 否	$y = (-4)^x$ 底數:-4<0	是 / 否
$y = \boxed{\pi}^{x}$	是 / 否	$y = 4x^2$ 二次函數	是 / 否	$y = x^x$	是 / 否	$y = (2a-1)^x$ $a > \frac{1}{2}$且$a \neq 1$	是 / 否 ← $2a-1>0$, $2a-1\neq1$

練習 2: 若$y = (a^2 - 4)^x$是一個指數函數, 求a的取值範圍

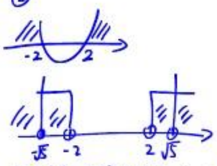
解: 系數:1

底數: $a^2-4>0$ ① 且 $a^2-4\neq1$ ②

① $(a+2)(a-2)>0$

$\therefore a<-2$ 或 $a>2$

② $a^2\neq5$　$a\neq\pm\sqrt{5}$



$\therefore a\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5},-2)\cup(2,\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty)$

練習 3: 若函數$y = (a^2 - 3a + 3)a^x$是指數函數, 求a

解: 系數: $a^2-3a+3=1$ ①

底數: $a>0$ 且 $a\neq1$

① $a^2-3a+2=0$

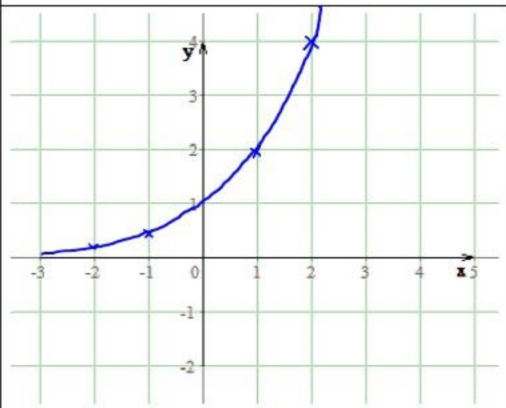
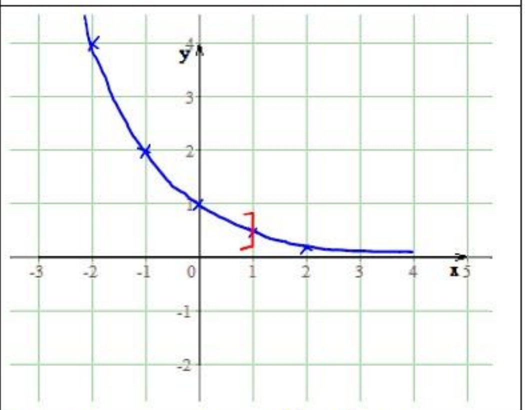
$(a-1)(a-2)=0$

$a=1$ 或 $a=2$

(不合)

$\therefore a=2$

三, 指數函數$y = f(x) = a^x$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$的圖像與性質

	$a > 1$ (例: $a = 2$)	$0 < a < 1$ (例: $a = \frac{1}{2}$)
圖象		

定義域: R	值域: $(0,+\infty)$	必定過點: $(0,1)$	$a^0=1$ * 0^0無定义
單調性	當$a > 1$時, 函數在R上是 增函數	當$a < 1$時, 函數在R上是 減函數	
變化情況	當$a > 1, x > 0$時, a^x >1 當$a > 1, x < 0$時, a^x <1	當$a \neq 1, x = 0$時, $a^x =$ 1	當$0 < a < 1, x > 0$時, a^x <1 當$0 < a < 1, x < 0$時, a^x >1
對稱性	函數$y = a^x$與$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$的圖像關於 y軸 對稱		

練習 4: 求下列函數的定義域和值域:

(1) $y = 2^{\frac{1}{x-4}}$

解: ∵ $x-4 \neq 0$

∴ 定义域: $\{x \mid x \neq 4\}$

∵ $\frac{1}{x-4} \neq 0$

∴ 值域: $(0,1) \cup (1,+\infty)$

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$

解: 定义域: R

∵ $2x-x^2 = 1-1+2x-x^2 = 1-(1-2x+x^2) = 1-(1-x)^2 \le 1$

开口向下 Max

∴ 值域: $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

練習 5: 判斷函數 $y = a^{x-2}+3$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)的圖像是否恒過一定點? 若是, 求此點坐標; 若不是, 說明理由。

解: $y-3 = a^{x-2}$

$y' = a^{x'}$ ← 必过 $(0,1)$

$y' = y-3 = 1$

$x' = x-2 = 0$

∴ $y = a^{x-2}+3$ 必过点 $(2,4)$

平移 $x-2 \Rightarrow x$ "+2" 向右移 2

$y = a^{x-2}+3 \Rightarrow y = a^{x-2}$ "−3" 向下移 3

$(0,1) \Downarrow (2,4)$

練習 6: 比較下列各數的大小:

1. $1.7^{2.5}$ < 1.7^{3}

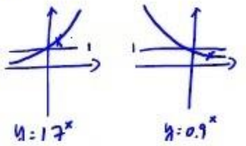
$1.7>1$, $y=1.7^x$ 是增函數

2. $0.8^{-0.1}$ < $0.8^{-0.2}$

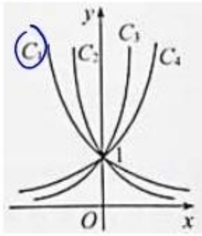
$0.8<1$, $y=0.8^x$ 是減函數

3. $1.7^{0.3}$ > $0.9^{3.1}$

∵ $1.7^{0.3} > 1.7^{0} = 1 = 0.9^{0} > 0.9^{3.1}$



練習 7: 已知下圖中 C_1, C_2, C_3, C_4 是指數函數 $y = a^x$ 的圖像, 而 $a \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \sqrt{5}, \pi\right\}$, 則曲線 C_1, C_2, C_3, C_4 對應的函數底數依次是 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{1}{3}$, π, $\sqrt{5}$



∵ $\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1 < \sqrt{5} < \pi$

練習 8: (選擇題) 若函數 $y = a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)的圖像與函數 $y = b^x$ ($b>0$ 且 $b \neq 1$)的圖像關於 y 軸對稱, 則有

A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $ab=1$ ✓　　D. a 與 b 無確定關係

$\boxed{a = \frac{1}{b}}$

四、指數型複合函數的單調性 (乘法)

情況	$a \in (1,+\infty)$		$a \in (0,1)$	
$f(x) = a^x$	$f(x)$在$[a,b]$上是 增函數		$f(x)$在$[a,b]$上是 減函數	
$y = g(x)$	$g(x)$在$[a,b]$上是增函數	$g(x)$在$[a,b]$上是減函數	$g(x)$在$[a,b]$上是增函數	$g(x)$在$[a,b]$上是減函數
$h(x) = a^{g(x)}$	$h(x)$在$[a,b]$上是 增函數	$h(x)$在$[a,b]$上是 減函數	$h(x)$在$[a,b]$上是 減函數	$h(x)$在$[a,b]$上是 增函數

練習 9: 判斷函數 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+3}$ 的單調性

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$

$f(x) = x^2-2x+3$　$(1,2)$

解: $f(x) = (x-1)^2+2$

∵ $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函數 +

在 $(-\infty,1]$ 上是減函數 −

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 R 上是減函數 −

∴ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+3}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是減函數 −

在 $(-\infty,1]$ 上是增函數 +

練習 10: 已知 $a>0$ 且 $a \neq 1$, $x \in R$, $x \neq 1$, 當 $a^{x^2+1} < a^{2x}$ 時, 求 a 的取值範圍

解: ∵ x^2+1-2x

$= (x-1)^2 \ge 0$

∴ $x^2+1 \ge 2x$

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

又 $a^{x^2+1} < a^{2x}$

即 $y = a^x$ 是減函數

∴ $a \in (0,1)$ #

二、對數函數工作紙(已完成教學)

對數函數及其性質 高一甲 姓名：________ 學號：________

一, 對數函數的概念：

由對數的定義知道： 如果$2^x = y$，那麼就有$x = log_2 y$，於是，函數$f(x) = 2^x$的反函數是$f^{-1}(x) = log_2 x$

所以指數函數$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$的反函數就是$y = log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$

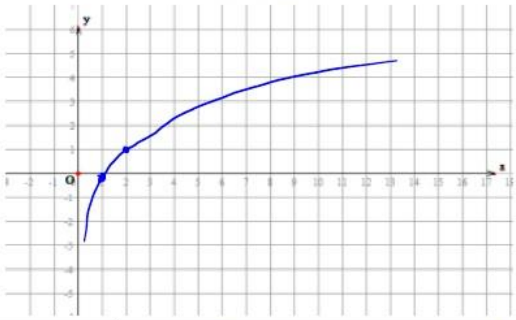
把函數$y = log_a x\ (a > 0，a \neq 1)$稱為對數函數，其中$x$是自變量，定義域是$(0，+\infty)$，值域是$(-\infty，+\infty)$

練習 1：下列哪個函數是對數函數？(1,3)

(1) $y = log_{\frac{1}{2}}(-x)(x < 0)$ √ $-x > 0$ (2) $y = 2log_4(x-1)\ (x > 1)$ (3) $y = lnx\ (x > 0)$ (4) $y = log_{(-3)}x\ (x > 0)$

二. 對數函數的圖像性質：

用描點法作出函數的圖像

$y = log_2 x$ 	$y = log_{\frac{1}{2}}x$ 
定義域	$(0, +\infty)$
值域	R
性質	(1) 圖像過點 $(1,0)$ 即$0 = log_a 1$，1 的對數是 0 (2) $a > 1$時，當$x > 1$時，y >0；當$0 < x < 1$時，y <0 (3) $0 < a < 1$時，當$x > 1$時，y <0；當$0 < x < 1$時，y >0
對稱性	$y = log_a x$ 與 $y = log_{\frac{1}{a}}x$ 的圖像關於 x 軸對稱

練習 2：求下列函數的定義域：

(1) $y=log_2(x^2-4x-5)$

Sol: $x^2-4x-5>0$

$(x-5)(x+1)>0$

$-1 \qquad 5$

$x\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$

(2) $y=\frac{\sqrt{log_{0.8}x-1}}{2x-1}$

Sol: $\begin{cases}2x-1\neq 0\\ \log_{0.8}x-1\geq 0\\ 真數\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\frac{1}{2}\\ \log_{0.8}x\geq 1\\ x>0\end{cases}$

$\begin{cases}x\neq\frac{1}{2}\\ x\leq 0.8\\ x>0\end{cases}\Rightarrow(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},0.8]$

(3) $y=log_{5-x}(2x-2)$

Sol: $\begin{cases}5-x>0\ 且\ 5-x\neq 1\\ 2x-2>0\end{cases}$

$\begin{cases}x<5\ 且\ x\neq 4\\ x>1\end{cases}$

$x\in(1,4)\cup(4,5)$

練習 3：利用對數的性質比較下列各組數的大小：

(1) $log_2 3$ ___<___ $log_2 7.5$

(2) $log_{0.7}0.6$ ___>___ $log_{0.7}5.8$

(3) $log_4 0.3$ ___<___ $0=\log_4 1$

(4) $log_{\frac{1}{8}}2$ ___<___ $1=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

(5) $log_6 7$ ___$>\log_6 6>$___ $log_7 6<\log_7 7$

$1 \qquad 1$

(6) $log_3 2$ ___>___ $log_{0.3}3$

$\vee\ 0\ \log_3 1 \qquad 0\ \wedge\ \log_{0.3}1$

(7) $log_a 3$ ______________ $log_a 4$ 其中$(a>0,a\neq 1)$

$a>1$, 增 $\log_a 3<\log_a x$

$0<a<1$, 減 $\log_a 3>\log_a x$

練習 4：下圖中，$y=log_a x$與$y=log_d x$兩圖形對稱於x軸，$y=log_b x$ 與$y=log_c x$兩圖形對稱於x軸，

則下列何者正確？(　　) (多選題)

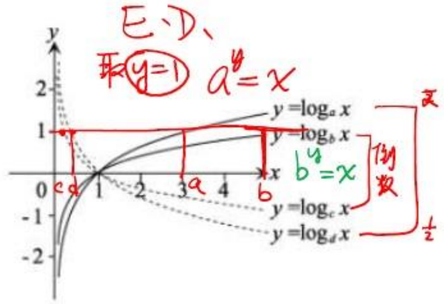
A. $a>b>c>d$　　B. $b>a>c>d$

C. $b>a>d>c$　　D. $ad=1$

E. $abcd=1$

E、D、

取$y=1$　$a^y=x$



練習 5：求下列函數的反函數：(1) $y=3(\sqrt{5})^x$ $(x\in R)$

$x=\log_{\sqrt{5}}\frac{y}{3}$, $f^{-1}(x)=\log_{\sqrt{5}}\frac{x}{3}$ $(x>0)$

(2) $y=e^x$ $x=\ln y$ $f^{-1}(x)=\ln x$ $(x>0)$

(3) 設函數$y=4+log_2(x-1)$ 的定義域為$[3,+\infty)$，則其反函數的定義域為 $[5,+\infty)$

原值域

$x\geq 3$

$x-1\geq 2$

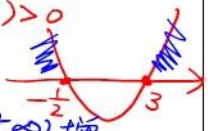
$\log_2(x-1)\geq 1$

練習 6：求函數$y = log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 5x - 3)$的遞減區間

sol. $t = 2x^2 - 5x - 3 > 0$

$(2x+1)(x-3) > 0$

$x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 3$



$(-\infty, -\frac{1}{2})$ 減 $(3, +\infty)$ 增

$y = log_{\frac{1}{3}} t$ ∵ $0 < \frac{1}{3} < 1$ 減函數

$(-\infty, -\frac{1}{2})$ 增區間 $(3, +\infty)$ 減函數

練習 7：求函數$y = log_2(x^2 - 4x + 6)$的值域

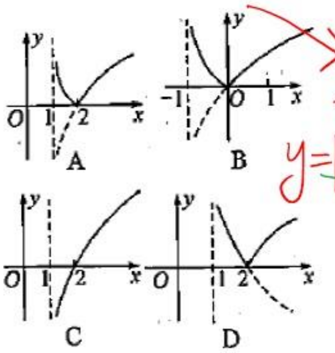
$t = x^2 - 4x + 6 = \boxed{(x-2)^2 + 2} \geq 2$

$y = log_2 \boxed{2} \geq 1 \geq 0$

$y \in [1, +\infty)$

練習 8：若$f(x) = lgx$，則$y = |f(x-1)|$ 的圖像是(　　)

A

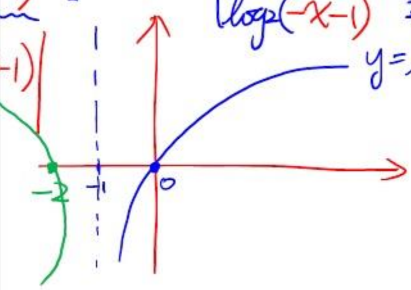


$lg(x-1)$ 右

$y = |lg(x-1)|$

練習 9：作出$y = log_2|x+1|$ 的簡圖，由圖像指出單調區間，並說明如何由$y = log_2 x$變化而成？

$y = \begin{cases} log_2(x+1) & 當\ x+1>0 \\ log_2(-x-1) & 當\ x+1<0 \end{cases}$



練習 10：設$f(x) = lg\frac{5-x}{5+x}$，求：(1) 求函數$f(x)$的定義域和值域　(2) 判斷$f(x)$的奇偶性　(3) $f(x)$的單調性

sol: ① $\frac{5-x}{5+x} > 0$ 　$(5-x)(5+x) > 0$ 　$(x-5)(x+5) < 0$ 　$x \in (-5, 5)$ 　$y \in R$

② $f(-x) = lg\frac{5+x}{5-x} = lg\left(\frac{5-x}{5+x}\right)^{-1} = -f(x)$ 奇

③ $\frac{5-x}{5+x} = \frac{10-(5+x)}{5+x} = \frac{10}{5+x} - 1$

在$(-5, 5)$區間為減函數

$f(x)$ 減函數

三、測驗複習課工作紙

高一甲下學期代數測驗 2 複習　　　　姓名: ______________ 學號: _____

知識回顧:

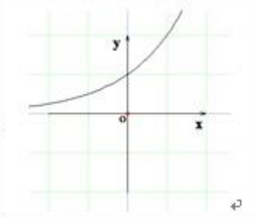
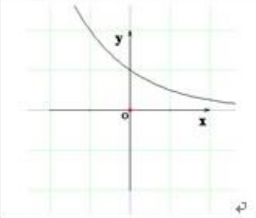
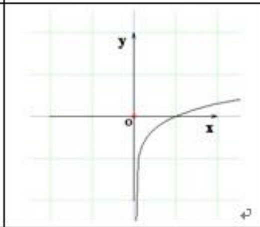
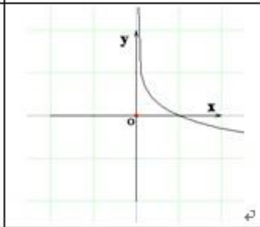
指數函數$f(x) = a^x$ $(a > 0$且$a \neq 1)$的特征:

1. a^x的系數為 1　　2. a^x的底數是不等於 1 的常數　　3. a^x的指數僅含有自變量x

對數函數$g(x) = \log_a x$ $(a > 0$且$a \neq 1)$的特征:

1. $\log_a x$的系數為 1　　2. $\log_a x$的底數是不等於 1 的常數　　3. $\log_a x$的真數僅含有自變量x

對數函數與指數函數的圖像與性質

	指數函數$f(x) = a^x$		對數函數$g(x) = \log_a x$	
	定義域為R，值域為$(0, +\infty)$，必定過點$(0, 1)$		定義域為$(0, +\infty)$，值域為R，必定過點$(1, 0)$	
	$a \in (1, +\infty)$	$a \in (0, 1)$	$a \in (1, +\infty)$	$a \in (0, 1)$
簡圖				
單調性	在R上是增函數	在R上是減函數	在$(0, +\infty)$上是增函數	在$(0, +\infty)$上是減函數
	$y = a^x$與$y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$的圖像關於$y$軸對稱		$y = \log_a x$與$y = \log_{\frac{1}{a}} x$的圖像關於x軸對稱	

合作練習題

1. 已知是$y = (a^2 - 3a + 1)a^x$指數函數，求a	2. 已知$a^{-5x} > a^{x+7}$ $(a > 0$且$a \neq 1)$，求x的取值範圍	3. 求$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2 - 4x + 1}$的單調區間

4. 求定義域 $y=\frac{log_{0.5}(4x-3)}{lg(x^2+2x-3)}$	5. 求函數$y=log_{0.5}(3+2x-x^2)$的單調區間	6. 求函數$y=log_2\frac{x+1}{x-1}$的反函數，以此求原函數的值域

複習題

7. 求$y=5^{\frac{1}{2-x}}$ 的定義域和值域	8. 已知$9^m=5$，$3^n=7$，試用含m,n的式子表示$log_{35}9$
9. 已知$f(x)=(a^2-a-1)log_{(a+2)}x$是對數函數，求$a$	10. 函數$y=log_a x$，$x\in[2,4]$，$a>0$且$a\neq 1$，若此函數的最大值比最小值大 1，求a

四、指數函數功課附答案

高一甲代數下學期第 5 次功課－指數函數的概念、圖像與性質　　　　　　姓名:_____________　學號:_____

1.　判斷下列函數是否指數函數

$y=(-2)^x$	是 / 否	$y=-3^x$	是 / 否	$y=5^{x-1}$	是 / 否	$y=0.5^x$	是 / 否

2.　已知$f(x)=(a^2-4a+4)a^x$是指數函數，求a

解: $\begin{cases} a^2-4a+4=1 & (1) \\ a>0\text{ 且 }a\neq 1 & (2) \end{cases}$

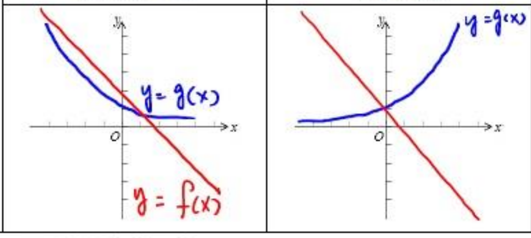
$(1):(a-1)(a-3)=0$

$a=1\ or\ a=3$

結合$(1),(2)$得$a=3$

3.　作出函數$f(x)=b-x$ 與 $g(x)=b^{-x}$ 的簡圖，其中

$b\in(1,+\infty)$	$b\in(0,1)$



4.　求下列函數的定義域與值域:

4.1.　$f(x)=2^{\frac{1}{x}}$

解: $\because x\neq 0$

$\therefore 2^{\frac{1}{x}}\neq 1$

由此得

定義域: $\{x|x\neq 0\}$

值域: $\{y|y\neq 1\}$

4.2.　$f(x)=\sqrt{1-2^x}$

解: $1-2^x\geq 0$

$2^x\leq 1$

$x\leq 0$

$f(x)\geq 0$

$1-2^x\leq 1$

由此得

定義域: $x\in(-\infty,0]$

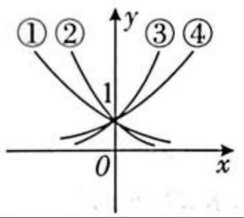
值域: $y\in[0,1]$

5.　下圖是指數函數

$(1):y=a^x;(2):y=b^x;(3):y=c^x;(4):y=d^x$

的圖像，則a,b,c,d與 1 的大小關係是

$b<a<1<d<c$



6.　比較下列各數的大小:

6.1.　$1.8^{-1.2}$ __>__ $1.8^{-1.8}$

解: $\because y=1.8^x$是增函數

$\therefore -1.2>-1.8\Rightarrow\ 1.8^{-1.2}>1.8^{-1.8}$

6.2.　$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$ __>__ $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{8}}$

解: $\because y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$是減函數 $\therefore \frac{1}{3}<\frac{2}{3}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{8}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{8}}$

6.3.　$2^{-0.5}$ __<__ $3^{0.2}$

解: $\because 2^{-0.5}<2^0=1$ ；　$3^{0.2}>3^0=1$

$\therefore 2^{-0.5}<3^{0.2}$

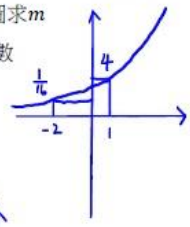
7.　若函數$f(x)=a^x$ $(a>0$ 且$a\neq 1)$在$[-2,1]$上的最大值為 4，最小值為m ，結合簡圖求m

解: 當$a\in(1,+\infty)$時，$f(x)$是增函數

$\therefore a^1=4\Rightarrow a=4$

此時函數最小值

$m=f(-2)=4^{-2}=\frac{1}{16}$

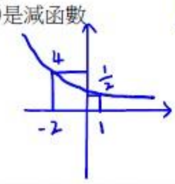


當$a\in(0,1)$時，$f(x)$是減函數

$\therefore a^{-2}=4\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

此時函數最小值

$m=f(1)=\frac{1^1}{2}=\frac{1}{2}$



8.　討論函數$f(x)=a^{x^2-2x-1}$ $(0<a<1)$的單調性

解: 設$g(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

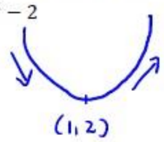
$\because g(x)$在$[1,+\infty)$上是增函數

在$(-\infty,1]$上是減函數

$y=a^x$是減函數

$\therefore f(x)$在$[1,+\infty)$上是減函數

在$(-\infty,1]$上是增函數



9.　(1) 已知$f(t)=t^2-3t+3$的值域為$[7,43]$，求t的取值範圍:(2) 利用(1)結果，已知$g(x)=4^x-3\times 2^x+3$的值域為$[7,43]$，求x的取值範圍

解: (1) 設$t^2-3t+3=7\Rightarrow t=4\ or\ t=-1$

$t^2-3t+3=43\Rightarrow t=8\ or\ t=-5$

$\therefore t\in[4,8]\ or\ t\in[-5,-1]$

(2) 令$t=2^x$ ，則$g(x)=f(t)$

由(1) 知$2^x\in[4,8]$ 或 $2^x\in[-5,-1]$ (不合)

$\therefore x\in[2,3]$

五、對數函數功課附答案

高一甲代數下學期第 6 次功課—對數函數的概念，圖像和性質　　高一甲　　姓名：________　　學號：________

1. 以下哪個函數是對數函數？(B)

A. $y = log_a\sqrt{x}$　　B. $y = log_6 x$　　C. $y = 8log_2(x+1)$　　D. $y = log_x 6\ (x>0, x\neq 1)$

2. 求下列函數的定義域：

(1) $y = log_2 x^2$

解: $x^2 > 0$

$x \neq 0$

∴定義域: $\{x | x \neq 0\}$

(2) $y = log_6(9 - x^2)$

解: $9 - x^2 > 0$

$(x-3)(x+3) < 0$

∴定義域: $x \in (-3, 3)$

(3) $y = \sqrt{log_{0.5}(4x-3)}$

解: $\begin{cases} \log_{0.5}(4x-3) \geq 0 & (1) \\ 4x - 3 > 0 & (2) \end{cases}$

$(1): 4x - 3 \leq 1$

$x \leq 1$

$(2): x > \frac{3}{4}$

∴定義域: $x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]$

(4) $y = \frac{\lg(4-x)}{x-3}$

解: $\begin{cases} 4 - x > 0 & (1) \\ x - 3 \neq 0 & (2) \end{cases}$

$(1): x < 4$

$(2): x \neq 3$

∴定義域:

$x \in (-\infty, 3) \cup (3, 4)$

3. 比較大小：

(1) $log_{0.5}3 < log_2 3$

解: ∵ $y = \log_3 x$是增函數,

∴ $\log_3 0.5 < \log_3 1 = 0 = \log_2 2 < \log_2 3$

(2) $log_{0.2}0.3 > log_3 0.5$

解: ∵ $\log_{0.2} 0.3 > \log_{0.2} 1 = 0 = \log_3 1 > \log_3 0.5$

∴ $\log_{0.2} 0.3 > \log_3 0.5$

(2) 比較：$log_4 3$、$log_3 4$、$log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}$的大小

解: ∵ $\log_3 4 > \log_3 3 = 1 = \log_4 4 > \log_4 3$

$\log_4 3 > \log_4 1 = 0 = \log_{\frac{4}{3}} 1 > \log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}$

∴ $\log_3 4 > \log_4 3 > \log_{\frac{4}{3}}\frac{3}{4}$

4. 已知$log_a\frac{2}{3} < 1$，求：a的取值範圍

解: 當$a \in (1, +\infty)$ $\log_a\frac{2}{3} < \log_a a \Rightarrow a > \frac{2}{3}$

當$a \in (0, 1)$ $\log_a\frac{2}{3} < \log_a a \Rightarrow a < \frac{2}{3}$

∴ $a \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

求y　　求x

5. $f(x) = log_3\left(\frac{4}{x} + 2\right)$，求方程$f^{-1}(x) = 4$的解

y

解: $y = \log_3\left(\frac{4}{x} + 2\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = 4 \div (3^x - 2)$

解方程: $4 \div (3^x - 2) = 4$

$3^x - 2 = 1$

$x = 1$

$f(4) = \log_3\left(\frac{4}{4} + 2\right)$

$= 1 \leftarrow y$

↑解

6. 求函數 $y = log_{0.5}(-x^2 + 2x + 8)$的單調區間

解: 設$f(x) = -x^2 + 2x + 8$

$= 9 - (x-1)^2$

又$-x^2 + 2x + 8 > 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+2) < 0$

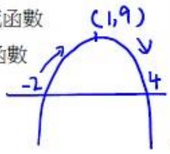
$\Rightarrow x \in (-2, 4)$

而$y = \log_{0.5} x$是減函數

∴ $y = \log_{0.5}(-x^2 + 2x + 8)$

在$(-2, 1]$上是減函數

在$[1, 4)$上是增函數



7. 函數$f(x) = \left(log_{\frac{1}{2}}x\right)^2 - log_{\frac{1}{2}}x + 5$，$x \in [2,4]$,求$f(x)$的最值及相對應的$x$值

解: $f(x) = \left(\log_{\frac{1}{2}} x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$

$= 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (不合)

∵ $x \in [2, 4]$

$\log_{\frac{1}{2}} x \in [-2, -1]$

$\log_{\frac{1}{2}} x - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$

$\left(\log_{\frac{1}{2}} x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} \in [7, 11]$

∴當$x = 2$時，$f(x)_{\min} = 7$

當$x = 4$時，$f(x)_{\max} = 11$

8. 已知函數$f(x) = lg\frac{1-x}{1+x}$，若$f(a) = \frac{1}{2}$，求：$f(-a)$

解: $f(-a) = \lg\frac{1+a}{1-a}$

$= \lg\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{-1}$

$= -\lg\frac{1-a}{1+a}$

$= -f(a)$

$= -\frac{1}{2}$

參考資料

- 《非高等教育發展十年規劃》(2011-2020 年)—澳門教育暨青年局
  http://www.dsej.gov.mo/~webdsej/www/dsejnews/eduplan/cn2012_policy_tenyear.pdf?timeis=Fri%20Jul%2017%2016:43:41%20GMT+08:00%202015&&
- 《高中數學基本學力要求》(初稿)—澳門教育暨青年局
  http://www.dsej.gov.mo/crdc/edu/senior_math.pdf
- Microsoft surface pro 4 介紹—Microsoft Online store(HK)
  https://www.microsoftstore.com.hk/product/surfacepro4?locale=en_US&tduid=(fc7f81a1a2872d4fe28547dac35e1528)(231730)(2223361)(1-12305)(1_c_793738016_43796361520_dsa-68609927347)
- Drawboard pdf 軟件介紹—Drawboard.com
  https://www.drawboard.com/pdf/
- Ipazzprot(艾拍寶) 介紹—東莞市康茂電子有限公司
  http://ipazzport.com/en_productinfo.asp?id=119
- Geogebra 軟件介紹及資源下載
  https://www.geogebra.org
- PG_Lab(平面幾何實驗室)介紹
  http://math.pooito.edu.mo/page1/maths/Paper/0812.doc
  及軟件下載
  http://math.pooito.edu.mo/page1/maths/new.html
- 《学生为主　教师为辅—论学生参与在高中数学教学中的重要性》—夏东
  《数学学习与研究：教研版》2015年　第5期
  江西省上饶市玉山县樟村中学334700
- 《淺談數形結合思想在三角函數中的運用》—朱亞彥
  《新校園：上旬刊》2015年第5期
  江蘇商貿職業學院江蘇南通226011
- 本地生產總值 - 統計暨普查局統計資料
  http://www.dsec.gov.mo/Statistic.aspx?NodeGuid=b35edb8a-ed5c-4fab-b741-c91b75add059
- Survey Monkey 網上問卷制作網站
  https://zh.surveymonkey.com/mp/how-to-create-surveys/

■ 翻轉教室

Sal Khan—Wikipedia.org

https://en.wikipedia.org/wiki/Sal_Khan

Flipped classroom—Wikipedia.org

https://en.wikipedia.org/wiki/Flipped_classroom

■ 螺旋式教學

螺旋式課程——百度百科

http://baike.baidu.com/item/%E8%9E%BA%E6%97%8B%E5%BC%8F%E8%AF%BE%E7%A8%8B#reference-[1]-2810069-wrap

螺旋式學習法——育鼎教育事業

http://www.bestschool.com.tw/classes/elementary_courses/elementary_english/

《The Process of Education(Revised Edition)》

By Jerome Bruner

ISBN- 9780674710016

■ 學習金字塔(Cone of Learning)

學習金字塔——台灣 wiki

http://www.twwiki.com/wiki/%E5%AD%B8%E7%BF%92%E9%87%91%E5%AD%97%E5%A1%94

Edgar Dale——Wikipedia.org

https://en.wikipedia.org/wiki/Edgar_Dale

Cone of Learning——we tend to remember our level of involvement. (graph)

https://www.triton.edu/uploadedFiles/Content/Academics/Continuing_Education/Cone_of_Learning.pdf

Will at Work Learning——Will Thalheimer, PhD

http://www.willatworklearning.com/2006/10/people_remember.html

■ 指數函數與對數函數在學習中的難點舉要

http://xueshu.baidu.com/s?wd=paperuri:(8e55a06f408448681f9b8eae69240e30)&filter=sc_long_sign&sc_ks_para=q%3D%E6%8C%87%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0%E5%92%8C%E5%AF%B9%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0%E5%AD%A6%E4%B9%A0%E4%B8%AD%E7%9A%84%E9%9A%BE%E7%82%B9%E4%B8%BE%E8%A6%81&tn=SE_baiduxueshu_c1gjeupa&ie=utf-8&sc_us=17998924723017253969

■ 《Instructional Technology, Its Nature and Use》

—Walter Arno Wittich, Charles F. Schuller

ISBN- 9780060471699

■ 《數學必修1—人教B版—鼎尖教案—新課標》—人民教育出版社

ISBN- 9787543771857

- 《普通高中課程標準實驗教科書—數學必修1》—人民教育出版社
  ISBN-9787107177057
- 《普通高中課程標準實驗教科書—數學必修 1》(教師教學用書)
  —人民教育出版社
  ISBN-9787107178603
- 《高中數學用表(必修)》—丁明忠、朱峰、張今人、劉志改、陶双文
  湖北人民出版社
  ISBN-9787540310509
- 《全程加能—百分百課時練習(高中數學必修 1)》—高山
  延邊教育出版社
  ISBN-9787552422368