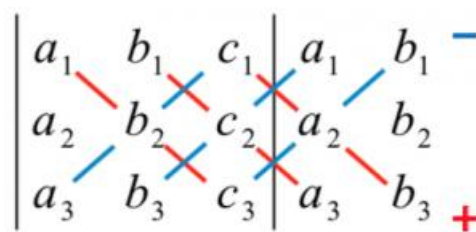
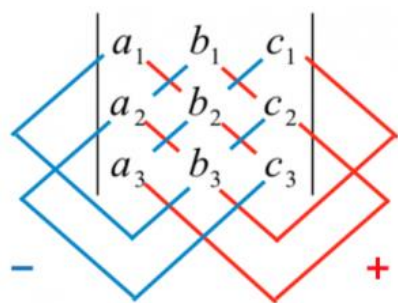


# 行列式



參選編號：C027

教學科目：數學

教育階段：高二

## 目次

一. 簡介.....	ii
二. 教學進度表.....	iv
三. 教案.....	1
三階行列式的展開探究.....	2
(反思及建議，試教評估).....	9
三階行列式之性質.....	15
(反思及建議，試教評估).....	19
三階行列式的應用.....	20
(反思及建議，試教評估).....	23
三階行列式克拉瑪公式.....	24
(反思及建議，試教評估).....	27
四. 參考文獻.....	27
五. 相關教材.....	27

## 簡介

行列式，在中國公元前 2 世紀的 <<九章算術>> 裡就已用行列式，往後的年代，後人沒有把它發揚光大，待西方在 2 千年後才用到並加以深究推展。行列式在數學、物理中常常使用，對人類文明發展起著重要作用。

從幾何上理解行列式，將每一列視為一個向量，行列式就是這些向量構成的多維多面體的體積。充份展現數與形結合之完美及數學之嚴謹性。

三階行列式是二階行列式的後繼學習，也是後續教材學習中一個有力的工具。而教學內容主要圍繞三階行列式展開的對角線法則進行探究，如何理解三階行列式展開的對角線法則，性質的推導、應用延伸至克拉瑪公式解三元一次方程組是教學計劃的重點內容。

本章節的教學目標、內容、設計創意和特色如下:

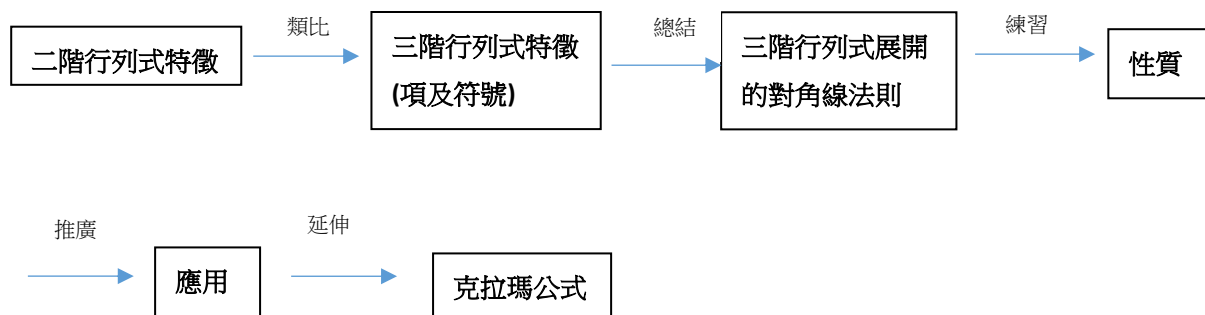
教學目標	知識與技能	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 推演三階行列式對角線展開法則</li> <li>2. 掌握三階行列式的性質</li> <li>3. 運用性質解決三階及更高階行列式的題型</li> <li>4. 三階行列式之應用</li> <li>5. 克拉瑪公式解三元一次方程組</li> </ol>
	過程及方法	提前預習準備、同儕間相互討論、動手做數學實驗、類比總結法則和熟練各類型題目
	情感、態度和價值觀	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 培養學生積極自主探究</li> <li>2. 協作式學習，加強人際間溝通和表達能力</li> <li>3. 增進對數學之興趣和思維能力</li> </ol>
主要內容	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 三階行列式展開之探究</li> <li>2. 三階行列式之性質</li> <li>3. 三階行列式之應用</li> <li>4. 三階行列式克拉瑪公式</li> </ol>	
設計創意和特色	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 透過類比方法，讓學生自主發現知識</li> <li>2. 藉著手機的協助，驗證學生的猜想</li> <li>3. 通過分組討論，促進同學間的腦力激盪</li> <li>4. 遊戲，活躍了課堂氣氛</li> <li>5. 使數學變成活學活用，易於親近，發現其美</li> </ol>	

## 教學進度表

起	止	教學內容	節數
2017/02/07	2017/02/07	三階行列式展開之探究	1
2017/02/09	2017/02/09	三階行列式之性質	1
2017/02/14	2017/02/14	三階行列式之應用	1
2017/02/16	2017/02/16	三階行列式克拉瑪公式	1

## 教案

本單元知識架構為：



**教學內容：**三階行列式展開探究、三階行列式的性質、三階行列式的應用、三階行列式克拉瑪公式。

**教學重點：**三階行列式對角線展開法則及其形成過程，三階行列式的性質和三階行列式的應用，利用克拉瑪公式判斷三元一次方程組的無解和無限組解。

**教學難點：**如何讓學生總結展開法則，三階行列式性質的推出及如何靈活運用解決各種不同類型應用題目。

行列式雖然不在高中數學基本學力要求當中，作為各學校自主的校本課程之內，綜觀過往兩岸的聯考題目當中，不難發現某些題目也加插了相關概念，在更高等的數學領域裡，行列式描述是一個線性變換對體積所造成的影響。無論是線性代數、多項式理論，還是在微積分學中，行列式作為基本的數學工具，都有著重要的應用。作為數學通往高等數學不可或缺的工具且為聯考題型，讓學生去了解，甚至是掌握是有其必要性。

## 三階行列式的展開探究

### 教學目標

知識技能目標	讓學生推演三階行列式的對角線展開法則
過程方法目標	體會類比推廣過程，體會歸化思想
情感態度目標	體會數學思維方式，感受數學之美，激發學習數學的積極性

### 教學內容分析：

本節內容是二階行列式之延續，通過類比、推廣、分組討論、發現、手機輔，由二階行列式推演總結三階行列式對角線法則並加以應用。

### 學生學習情況分析：

學生的知識層面現況是：普遍知道二階行列式的相關知識和運算。

學生在能力和情感的現況是：一般同學對數學也有求知性，對於類比、推廣和歸納等數學思想也有所體會，但普遍地需要加強。

### 設計思想：

學生已學會二階行列式的運算，藉著二階行列式展開後每一項的特徵(包括符號)，透過觀察、分析、比較和歸類而形成對三階行列式每一項(包括符號)特徵的認知，從二階行列式展開的對角線法則逐步內化成三階行列式的對角線法則，感悟類比思想在數學研究中的應用。學生在一般數學學習中，常常只關注於知識、記憶和結果，往往忽略了概念形成、過程體會、數學能力培養，設計上希望學生能不用透過大量模仿而變得枯燥乏味，更著重法則的由來過程，重點培養學生的類比思維能力，而三階行列式對角線法則能提供學生體驗數學類比思維的一個難得內容，能培養學生的歸類思想。上課其間准許每組透過手機程式輔助計算答案，藉以總結規律。學生能開宗明義地在課室裡拿出手機，會增加學生的參與性和體驗科技的實用性。在課堂練習部份，題目是例題推廣，帶出部份三階行列式的性質。

## 教學過程

### 建立概念

請觀察下列二階行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - c \times b$$

問題：

- (1) 二階行列式有多少個元素？
- (2) 展開式有多少項？符號如何？
- (3) 每一項有多少個元素相乘？
- (4) 組成每項之元素是否位於相同列或相同行？

說明：通過對二階行列式問題複習，使學生觀察二階行列式是由四個元素組成，分布成兩行兩列的方陣，展開後共有兩項，且每一項由兩個元素相乘而成，相乘兩個元素在行列式中位於不同行不同列。

### 新課引入

問題：

(老師) 模仿二階行列式能寫出一個三階行列式嗎？

(學生) 例： $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix}$  (老師)  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(老師) 三階行列式有多少個元素？ (學生) 9個

(老師) 展開後有多少項？每一項由多少個元素相乘之積？

提示：跟據二階行列式展開後每一項均由不同行不同列的元素相乘而成？

(學生) 6項，分別為  $a_1b_2c_3$ ， $a_3b_2c_1$ ， $a_2b_3c_1$ ， $a_3b_1c_2$ ， $a_2b_1c_3$ ， $a_1b_3c_2$ ，每一項有三個元素

(老師) 能確定每一項的符號嗎？

(學生) 學生分組，工作紙，藉著手機程式找結果而總結規律



## [ 矩陣計算器 ]

檢視更多此開發人員開發的作品

開發者：Dominik Warszewski

開啟 iTunes 以購買和下載 App。



View in iTunes

### 描述

矩阵计算器可以计算一个矩阵的性质：秩，行列式，迹，矩阵转置，逆矩阵和方阵。

[Dominik Warszewski 網站](#) > [\[ 矩陣計算器 \] 支援](#)

### 2.0.2 版本的新內容

- button press sound added

備註：預先要求學生回家下載並嘗試使用

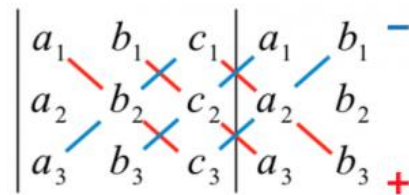
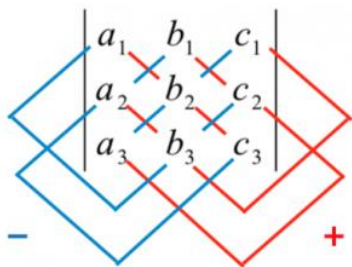
(老師) 學生以實物投影答案

(老師) 總結為

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

(學生) 總結三階行列式展開的對角線法則

(老師) 學生以實物投影答案



例題分析

(1) 求下列行列式之值

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

## 練習

(1) 求下列行列式之值

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

(2) 解下列方程式

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

說明：練習是對應例(1)的行列式性質，有助於對行列式知識的延伸

活動：分組併出行列式答案

## 課堂總結

1. 三階行列式的概念
2. 三階行列式展開的對角線法則
3. 三階行列式基本性質

## 課堂分組活動

每組同學利用“數”，“學”，“生”，“習”，“要”，“0”，“0”，“0”，“0”，構成一個有意義的三階行列式，必須巧妙應用三階行列式展開“減”的性質。

## 課後作業

工作紙

課堂分組工作紙

讓每一組學生利用箭頭總結三階行列式展開的規律，並於黑板上張貼給展示

請畫上箭頭總結三階行列式展開規律

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

每一位同學工作紙

讓每位同學除了分組外，也有個人的思考時間

姓名：\_\_\_\_\_ 班別：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 日期：\_\_\_\_\_

### 探究三階行列式展開的對角線法則

#### 複習

展開二階行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

- (1) 二階行列式共有多少個元素？ \_\_\_\_\_
- (2) 展開後共有多少項？ \_\_\_\_\_ 符號如何？ \_\_\_\_\_
- (3) 每一項由多少個元素組成？ \_\_\_\_\_
- (4) 組成每項之元素是否位於相同列或同行？ \_\_\_\_\_ (是/否)

#### 新課

請模仿二階行列式，寫出一個你自己的三階行列式

三階行列式模式為 \_\_\_\_\_

#### 猜想項數

- (1) 三階行列式共有多少個元素？ \_\_\_\_\_
- (2) 每一項由多少個元素組成？ \_\_\_\_\_ (根據每項由不同行不同列元素相乘而成的原則)
- (3) 展開後共有多少項？ \_\_\_\_\_  
請詳細寫出每一項 \_\_\_\_\_

#### 猜想符號

請不重複地隨意以 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 代替

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  各元素位置  
 $a_1 = \underline{\hspace{1cm}}, a_2 = \underline{\hspace{1cm}}, a_3 = \underline{\hspace{1cm}}, b_1 = \underline{\hspace{1cm}}, b_2 = \underline{\hspace{1cm}}, b_3 = \underline{\hspace{1cm}},$   
 $c_1 = \underline{\hspace{1cm}}, c_2 = \underline{\hspace{1cm}}, c_3 = \underline{\hspace{1cm}}.$

利用手機程式計算  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

展開後正負號各有多少個？

	$a_1b_2c_3$	$a_2b_3c_1$	$a_3b_1c_2$	$a_3b_2c_1$	$a_2b_1c_3$	$a_1b_3c_2$	
計算數值							
猜想符號 1							總和 = _____

猜想符號 2							總和 = _____
--------	--	--	--	--	--	--	------------

.....							總和 = ____
-------	--	--	--	--	--	--	-----------

三階行列式  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  展開式為 \_\_\_\_\_

三階行列式展開的記憶方法  
(請用箭頭總結三階行列式展開規律)

(1)

(2)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

例題

(1) 求下列行列式之值

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

練習

(1) 求下列行列式之值

(a)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

(b)  $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

(2) 解下列方程式

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

## 功課

求下列各三階行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & -5 & 11 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

(4) 已知三角形三頂點分別為  $A(1,4)$ ， $B(2,7)$ ， $C(-5,6)$ ，求三角形 ABC 面積

$$(5) \text{ 請用三個二階行列式表示三階行列式 } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

## 反思及建議，試教評估

本課節預設的某些部份沒有足夠時間實行，學生在猜想三階行列式展開的各項和符號部份，超出了所預期的時間，日常缺少探索為主的課題使目標沒有完全達成。但慶幸的是，也有少部份學生能從自我探索中發現其規律，感受了數學的美。實物投影機沒有足夠時間使用，使學生不能向別的同學解釋其思路過程，感覺有點遺憾，在往後的課堂中定會繼續使用。利用行列式的展開規律而湊成一句中文句子的數學遊戲活動，看到了學生的融入、自主、積極參與及笑容展現。

往後的教學中，有需要加強學生對課題的探索能力，多設計符合相關課題且有趣的數學活動

## 要點摘錄

- (1) 日常課堂多加入探索為主課題
- (2) 使用實物投影機讓學生解釋其思路
- (3) 找尋更多能手機應用程式，方便學生的學習
- (4) 多設計符合相關課題且有趣的數學活動

## 學生在課堂內之分個別探究(一)

姓名：Delmiro 班別：高二A 學號：12 日期：11月15日

### 探究三階行列式展開的對角線法則

#### 複習

展開二階行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad - cb}$

- (1) 二階行列式共有多少個元素？4個
- (2) 展開後共有多少項？2項 符號如何？正-負
- (3) 每一項由多少個元素組成？2個
- (4) 組成每項之元素是否位於相同列或同行？否 (是/否)

#### 新課

請模仿二階行列式，寫出一個你自己的三階行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

三階行列式模式為

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

#### 猜想項數

- (1) 三階行列式共有多少個元素？9個
- (2) 每一項由多少個元素組成？3個 (根據每項由不同行不同列元素相乘而成的原則)
- (3) 展開後共有多少項？6個

請詳細寫出每一項  $a_1b_2c_3, a_1b_3c_2, a_2b_1c_3, a_2b_3c_1, a_3b_2c_1, a_3b_1c_2$

#### 猜想符號

請不重複地隨意以 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 代替  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  各元素位置

$a_1 = \underline{1}, a_2 = \underline{7}, a_3 = \underline{9}, b_1 = \underline{3}, b_2 = \underline{5}, b_3 = \underline{8},$   
 $c_1 = \underline{2}, c_2 = \underline{4}, c_3 = \underline{6}。$

利用手機程式計算  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{2}$

展開後正負號各有多少個？

	$a_1b_2c_3$	$a_2b_3c_1$	$a_3b_1c_2$	$a_3b_2c_1$	$a_2b_1c_3$	$a_1b_3c_2$	
計算數值	30	112	108	90	126	32	
猜想符號 1	+	+	+	-	-	-	總和 = 2

猜想符號 2	+	-	+	-	+	-	總和 = 30
--------	---	---	---	---	---	---	---------

.....	+	+	-	+	-	-	總和 = -34
-------	---	---	---	---	---	---	----------

姓名：張進 班別：SM2C 學號：35 日期：1/4

探究三階行列式展開的對角線法則

複習

展開二階行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

- (1) 二階行列式共有多少個元素？4個
- (2) 展開後共有多少項？2項 符號如何？正負
- (3) 每一項由多少個元素組成？兩個
- (4) 組成每項之元素是否位於相同列或同行？否 (是/否)

新課

請模仿二階行列式，寫出一個你自己的三階行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

三階行列式模式為  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

猜想項數

- (1) 三階行列式共有多少個元素？9個
- (2) 每一項由多少個元素組成？3個 (根據每項由不同行不同列元素相乘而成的原則)
- (3) 展開後共有多少項？6個

請詳細寫出每一項  $a_1b_2c_3, a_2b_3c_1, a_3b_1c_2, a_3b_2c_1, a_2b_1c_3, a_1b_3c_2$

猜想符號

請不重複地隨意以 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 代替  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  各元素位置

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b_1 = 4, b_2 = 5, b_3 = 6,$   
 $c_1 = 7, c_2 = 8, c_3 = 9。$

利用手機程式計算  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

展開後正負號各有多少個？

	$a_1b_2c_3$	$a_2b_3c_1$	$a_3b_1c_2$	$a_3b_2c_1$	$a_2b_1c_3$	$a_1b_3c_2$	
計算數值	45	84	96	105	72	48	
猜想符號 1	+	+	+	-	-	-	總和 = 0

猜想符號 2							總和 = ___
--------	--	--	--	--	--	--	----------

.....							總和 = ___
-------	--	--	--	--	--	--	----------



學生在課堂內之分個別探究(二)

課堂活動分組的標準答案

數

0

生

0

學

0

習

0

要

數 · 學 · 要      —      生 · 學 · 習

學 0 要  
0 生 0  
數 0 習

第一組學生答案

習 0 數  
0 學 0  
要 0 生

第四組學生答案



活動情況



## 三階行列式之性質

### 教學目標

知識技能目標	三階行列式的基本運算、符號的規定，認識三階行列式性質並能運用於行列式的計算中，簡化運算過程。熟知行列式降階的概念並能運用於三階或以上行列式的計算
過程方法目標	教師作實例演示、以答問法作思考引導。學生分組討論並各組獨立總結性質，及邀請部份同學上台實作演練。
情感態度目標	能發現數學的實用性和簡單之美，體會行列式的運算性質可以幫助簡化計算，讓較複雜的行列式動力去運算變成可能。

**教學內容分析：**本節主要介紹三階行列式的基本性質和行列式降階法之使用。為下節解決不同類型題目作準備。

**學生情況分析：**前一節學生已分組探究三階行列式對角線法則能基本展開運算，對性質證明有了基礎，在功課中、個別性質以特例方式有所接觸。

**設計思想：**學生在前一節中，學生能透過對角線展開方法求三階行列式的值，但面對某些有共通性質而每項數值較大的行列式，顯然盲目使用對角線法則展開並不是最佳方法，經過行列式性質推演證明和大數值行列式的運算的示範，學生對性質的功用尤其深刻，使用時也豁然開朗。

## 教學過程

### 複習

三階行列式對角線展開法則

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

(老師) 三階行列式一共三行三列，共九個數。展開後總共有六項。將九個數能運算成一個數的計算規則。

(老師) 利用三階行列式對角線展開法則講解例 1：求  $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

(同學) 演練 (1)  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -11 & 13 \end{vmatrix}$ ，並同時邀請一位同學上台演練

### 引入新課

(讓全班同思考) 如果是  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$  有多少項作運算？

(同學猜想答案) 8 項，4 正 4 負項

(老師) 是否依對角線法則展開？

(同學) 是

(老師) 降階法：依  $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ ，循某一行或某一列降成二階行列式。

(老師) 若依第一列展開則有  $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$   
 $= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$

(老師) 在  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$  中，劃去元素  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行和第  $j$

列後所構成的  $n - 1$  階行列式，稱為元素  $a_{ij}$  的子行列式，用  $\Delta_{ij}$  表

示，符號為  $(-1)^{i+j}$ 。上例中  $a_{11}$  所對應為  $a_{11}$ ，其子行列式為

$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ，符號為  $(-1)^{1+1} = 1$  為正號。

(老師) 同學可自選某一行或某一列作降展開成三個二階行列式，請注意每項符號

(老師) 如果是  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$  有多少項作運算？

(同學) 依降階法變成四個三階行列式

(老師) 請注意每項符號  $\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$

(老師) 化四個三階行列式是否很費時，現介紹一些幫助化簡的方法，行列式的性質

(老師) 請同學利用對角線法則把  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  和  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$  的值算出？

結果如何？題目的特徵如何？

(同學) 結果一樣，題目行列互換

(老師) 性質一，行列互換，其值不變

(老師) 若將  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$  某兩行或兩列互調後算出的值和原來的值比較又如何?

(同學) 數值變號

(老師) 性質二，兩行(或兩列)互調，其值變號

(老師) 例題：求  $\begin{vmatrix} -10 & 20 & 40 \\ 1 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix}$  和  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & -7 \end{vmatrix}$ ，答案結果有什麼關係？

(同學) 10 倍

(老師) 性質三，任一行(或一列)，可提出公因數

(老師) 昨天功課有性質四，若一行或一列全為 0，行列式的值為 0

### 老師利用投影示範其餘性質

(老師) 性質五，兩行(或列)成比例時，其值為 0

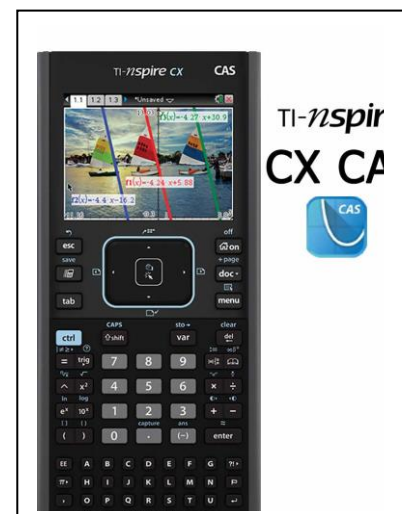
(老師) 性質六，將任一行(或列)的元素乘以 k 倍加到另一行(或列)，其值不變

(老師) 性質七，兩個三階行列式，若有兩行(列)同一位置元素皆相同，則可相加成一個三階行列式。

### 小結：

- (1) 把行列式展開只有對角綫法則嗎？還有更好的選擇嗎？若有，這是什麼？
- (2) 若遇到一個四階以上行列式，也可使用降階方法
- (3) 也可透過行列式性質輔助化簡
- (4) 延伸資訊

介紹 Texas Instruments Ti-nspire cx CAS 計數機在行列式化簡中，同學很難立即檢視答案之正確與否，除了能使用手機 app 輔助核對，市面上一些計數機也有類似功能，介紹同學作為輔助核對答案之用。



## 功課

(1) 利用降階方法去把下列各行列式降階

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

(2) 求下列各三階行列式之值

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 8 \\ 5 & 13 & 27 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

## 反思及建議，試教評估

本章授課內容為行列式的性質，主要是三階行列式，再擴展至更高階行列式。學生若能掌握三階的性質和降階方法，對於更高階行列式的化簡及求值也屬不難。學生在學習降階時，往往忽略了子行列式之元素。而性質三和性質六為化簡時常用，授課時也重點講解。某些大數值題目(如功課 2(b))，學生在運算以後，會深深感受性質對於行列式求值之妙用。在輔助工具方面，學生往往運算以後不知答案正確與否。現今學生每人有一部智能手機是常見之事，除了上一節介紹手機的 app，能充份利用手機之用。今節更介紹了現在比較流行之計數機 Texas Instruments Ti-nspire cx CAS，這計數機除了行列式求值之外，也有不少數學，甚至是物理、化學功能，對學生的學習有莫大裨益。



## 三階行列式的應用

### 教學目標

知識技能目標	讓學生熟練行列式不同題型，如因式分解(含 Vandermonde 行列式)，不等式等證明
過程方法目標	透過啟發，演示，學生自主探索和實作的學習過程，完善認知和掌握知識過程
情感態度目標	讓學生感受數學問題探索的樂趣和成功的喜悅

**教學內容分析：**因式分解是指把一個多項式化為幾個最簡整式的形式，不等式是指表示二個量之間不等的敘述。這些都是初等數學中的重點，也是一個難點，是初等數學中最重要的恆等變形和數學思維之一。而被廣泛應用在初等數學解高次方程、高次不等式、求根、作圖等各方面。而行列式作為解決高等數學的重要工具，本節是用高等數學的重要工具來解決一些初等數學中的難點問題—因式分解及不等式。

**學生情況分析：**學生於初中已學會基本的因式分解和簡單的不等式，高中一學了高次不等式，有部份學生已忘記。前兩節已學會三階行列式之展開、性質運用及降階方法。掌握程度是可以的。

**設計思想：**把初中的因式分解和不等式這兩大課題和高等數學的行列式整合是本節教學的重點。學生已對初中的因式分解和不等式等性質和方法都已遺忘，必需作簡單的複習。對於用行列式結合因式分解和不等式，同學不僅掌握多一種因式分解形式。通過學習高等數學知識來解決被初等數學問題，可增加同學學習高等數學的學習興趣。使高等數學是不難易於觸摸，對學習高等數學奠定一定的知識和心理基礎。

## 教學過程

### 複習

(老師) 例 1: 解不等式  $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 > 0$

解: 當  $x = 1$

$$3 \times 1^3 + 2 \times 1^2 - 7 \times 1 + 2 = 0$$

由因式定理, 不等式左邊含有因式  $(x - 1)$

除  $(x - 1)$ , 商為  $(3x^2 + 5x + 2)$ , 因而不等式

可寫為  $(x - 1)(3x^2 + 5x + 2) > 0$

$$\text{即 } (x - 1)(x + 2)(3x - 1) > 0$$

$$\therefore -2 < x < \frac{1}{3}, x > 1$$

(老師) ①將不等式化為 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0(<0)$ 形式, 並將各因式  $x$  的係數化“+”; (為了統一方便)

②求根, 並在數軸上表示出來;

③由右上方穿線, 經過數軸上表示各根的點 (為什麼? 原因為: 當  $x=+\infty$  時不等式左側恒為正。);

④若不等式 ( $x$  的係數化“+”後) 是“ $>0$ ”, 則找“線”在  $x$  軸上方的區間; 若不等式是“ $<0$ ”, 則找“線”在  $x$  軸下方的區間。  
注意: 奇穿偶不穿

(同學) 練習: 解不等式  $x^3 - 3x^2 - 4x > 0$

### 引入新課

(老師) 例 2: 試證  $\begin{vmatrix} a^2 & bc & a^2 \\ b^2 & b^2 & ac \\ ab & c^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac & bc & ab \\ bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \end{vmatrix}$

$$\text{證: } \begin{vmatrix} a^2 & bc & a^2 \\ b^2 & b^2 & ac \\ ab & c^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^2c & abc & a^2b \\ b^2c & ab^2 & abc \\ abc & ac^2 & bc^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac & bc & ab \\ bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \end{vmatrix}$$

(同學) 練習 (1) 證明  $ab + bc + ca$  是  $\begin{vmatrix} a^2 & bc & a^2 \\ b^2 & b^2 & ac \\ ab & c^2 & c^2 \end{vmatrix}$  的因式

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \text{ (Vandermonde 行列式)}$$

(老師) 例 3: 解不等式  $\begin{vmatrix} 4-x & 3 & 1 \\ 1 & 3-x & 4 \\ 2 & 4 & 2-x \end{vmatrix} > 0$

解: 
$$\begin{vmatrix} 4-x & 3 & 1 \\ 1 & 3-x & 4 \\ 2 & 4 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8-x & 3 & 1 \\ 8-x & 3-x & 4 \\ 8-x & 4 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (8-x) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3-x & 4 \\ 1 & 4 & 2-x \end{vmatrix} = (8-x) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -x & 3 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (8-x) \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (8-x)(x^2 - x - 3) > 0$$
 即求  $(x-8)(x^2 - x - 3) < 0$   
 $\therefore x < \frac{1-\sqrt{13}}{2}$  或  $\frac{1+\sqrt{13}}{2} < x < 8$

(同學) 練習: 解不等式  $\begin{vmatrix} 2x & 2 & 3 \\ 2x^2 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$

### 功課

1. 求行列式之因式  $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

2.  $x$  的方程式  $\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} = 0$ ,

求 (a) 三根之和 (b) 三根之積

3. 求行列式之因式  $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

4.  $a, b$  是什麼實數時, 不等式  $\begin{vmatrix} x^2 & b & x \\ 1 & -a & a \\ x & 1 & -1 \end{vmatrix} > 0$  的解是  $1 < x < 2$

5. 解不等式  $\begin{vmatrix} 1-x & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4-x & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6-x \end{vmatrix} < 0$

## 反思及建議，試教評估

學生雖有學過高次不等式之求解，但部份同學已經遺忘，故複習解高次不等式的規則是十分有必要的，否則就會影響新課程的教學，在練習中，也加入了特殊行列式，希望學生能掌握一些固定行列式的模式。

## 三階行列式克拉瑪公式

### 教學目標

知識技能目標	學生瞭解三階行列式克拉瑪公式，能依題目所給的條件寫出一次聯立方程式，並能用克拉瑪公式來解三元一次聯立方程式，學生能利用克拉瑪公式解聯立方程式問題。能利用 $\Delta$ ， $\Delta_x$ ， $\Delta_y$ ， $\Delta_z$ 來討論解的可能情況，並能特別注意 $\Delta = 0$ 時的情況的處理。當方程組的解有無限多組時，能用參數式將解正確的表示出來。能正確的判斷三元一次三式聯立方程組恰有一解、無解、無限多組解在幾何上所代表的情形。
過程方法目標	教師作實例演示、以答問法作思考引導。學生分組討論並各組獨立總結性質，及邀請部份同學上台實作演練。
情感態度目標	能體會到日常生活中有什麼是和克拉瑪公式有關，瞭解問題的意義，並可用其解決問題。

**教學內容分析：** 透過行列式而推導出的克拉瑪公式是一次方程組公式解的重要內容，本章以三階行列式為基礎解三元一次方程組的克拉瑪公式

**學生情況分析：** 學生已熟練三階行列式的求值，透過加減消去法和代入法解三元一次方程組均已掌握

**設計思想：** 讓學生明白克拉瑪公式之重要性，給學生提供解三元一次方程的方法，讓學生在數學領域中體會一題多解的思考樂趣。

## 教學過程

(老師)

推導克拉瑪公式：

$$\text{考慮三元一次方程組} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \cdots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \cdots (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \cdots (3) \end{cases}, \text{其中 } x, y, z \text{ 為未知數,}$$

使用代入消去法解之：

$$\text{由(1)} \Rightarrow b_1y + c_1z = -a_1x + d_1, \text{由(2)} \Rightarrow b_2y + c_2z = -a_2x + d_2$$

由二元一次方程組之求解可知

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} -a_1x + d_1 & c_1 \\ -a_2x + d_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} b_1 & -a_1x + d_1 \\ b_2 & -a_2x + d_2 \end{vmatrix}$$

整理可得

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdots \cdots (4)$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdots \cdots (5)$$

將(3)  $\times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$  得

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z = d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdots \cdots (6)$$

(4)(5)代入(6)，消去  $y, z$

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x + b_3 \left( - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) + c_3 \left( \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) = d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

整理之後得

$$\left( a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) x = d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdots \cdots (7)$$

觀察(7)式，等號左端  $x$  的係數中，將  $a_1, a_2, a_3$  分別換成  $d_1, d_2, d_3$  及成為右端的式子，

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因此(7)可改寫成  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

同理若令  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

則可得  $\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \\ \Delta \cdot z = \Delta_z \end{cases}$

結論：

(a)若 $\Delta \neq 0$ ，則方程組恰有一解：。[克拉瑪公式]

(b)若 $\Delta = 0$  則方程組無解或無限多解。

(c)若 $\Delta = 0$ ， $\Delta_x$ 、 $\Delta_y$ 、 $\Delta_z$ 有一不為0，則方程組無解。

例 1：試以克拉瑪公式解方程組  $\begin{cases} 7x + 3y - 2z - 7 = 0 \\ 2x + 5y + 3z - 20 = 1 \\ 5x - y + 5z - 10 = 8 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 265 \neq 0, \text{ 方程組恰有一解}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 21 & 5 & 3 \\ 18 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 265$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 7 & -2 \\ 2 & 21 & 3 \\ 5 & 18 & 5 \end{vmatrix} = 530 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 21 \\ 5 & -1 & 18 \end{vmatrix} = 795$$

(同學)

試以克拉瑪公式解方程組

$$\text{練習 1. } \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + 3z = 7 \\ 3x - y + z = -1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} -4x + 2y - z = -1 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

功課

試以克拉瑪公式解方程組

$$1. \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 6x + 3y - 8z = 0 \\ 2x - y + 5z = 4 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = -1 \quad (m \text{ 為常數}) \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$4. \text{ 若方程組 } \begin{cases} 5x + 3y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = a \\ x + 4y + bz = 17 \end{cases} \text{ 有無限多組解}$$

(a) 求  $a, b$  之值                      (b) 求此方程的解                      [台文 2011]

**反思及建議，試教評估**

三階行列式克拉瑪公式，學生在使用時因需計算四個三階行列式，故很多學生會採用過往的加減消去法和代入法計算。學生在結論為  $\Delta = 0$  判斷方程無解或無限組解時往往容易判斷錯誤。

**參考文獻：**

矩陣與行列式 (建興文化事業有限公司)

**相關教材：**

校本教材