2015 / 2016 學年教學設計獎勵計劃

高一數學

參選編號：

C014

科目：數學

教育階段：高

一

簡介

本課程是為回歸教育的學生設計，全班 15 人，同學間友愛，上課有問有答，能營造良好的數學學習情景，唯不願做家課。上課時間為逢一，三，五晚連堂，即一星期六的數學課。本課程多用引導啟發，類比，討論的教學方式，"多問"多激發學生潛能；"類比"直觀性強，容易激發學生學習興趣，有利於提高學生學習興趣。"討論"增強學生的自信。重視定理和公式的推證過程，使學生發現內在的規律，落實基礎知識的同時應重視基本技能和基本方法的培養。

以現實生活為情景引入使學生體會數學的重要性。所用例題均以課本為例，使學生即使缺課，也能馬上知曉上課內容，致不失一課一例題。

於每節課結束時，均有小結，引導學生總結一堂課的內容，凸出重點和難點。

目次

簡介......i
次目......ii
教學進度表一(綜合數學)......vi
教學進度表二(應用數學)......ix
壹、教學計劃內容簡介......12
一、教學目標......12
二、主要內容......12
三、設計創意和特色......12
四、教學重點......13
五、教學難點......13
六、教學用具......13
七、教學課時......13
貳、教案......14
第一章、集 合......14
1.1.1 集合......14
1.1.2 集合......17
1.2.1 子集、全集、補集......20
1.2.2 子集、全集、補集......23
1.3.1 交集、並集......25
1.3.2 交集、並集......27
1.4.1 含絶對值的不等式解法......30
1.4.2 含絶對值的不等式解法......33
1.4.3 含絶對值的不等式解法......36
1.5.1 一元二次不等式的解法......38
1.5.2 一元二次不等式的解法......42
1.5.A 集合與解含絶對值、一元二次不等式複習課......45
1.6.1 邏輯聯結詞......48
1.7.1 四種命題......52
1.7.2 四種命題......55
1.8.1 充分條件與必要條件......57
1.8.2 充分條件與必要條件......59

1.8.3 充分條件與必要條件........61
1.9.A 集合與簡易邏輯複習課........64
第二章、函 數........69
2.1.1 函數........69
2.1.2 函數........73
2.1.3 函數........75
2.2.1 函數........78
2.3.1 函數的單調性........81
2.3.2 函數的單調性........85
2.4.1 反函數........87
2.4.2 反函數........90
2.5.1 指數........93
2.5.2 指數........96
2.5.3 指數........98
2.6.1 指數函數........101
2.6.2 指數函數........104
2.6.3 指數函數........107
2.7.1 對數........110
2.7.2 對數........113
2.7.3 對數........116
2.8.1 對數函數........118
2.8.2 對數函數........122
2.9.1 函數的應用舉例........124
2.9.2 函數的應用舉例........127
2.9.A 函數的複習課........129
第三章、數列........131
3.1.1 數列........131
3.1.2 數列........135
3.2.1 等差數列........137
3.2.2 等差數列........140
3.3.1 等差數列的前 n 項和........143
3.3.2 等差數列的前 n 項和........146
3.4.1 等比數列........149

3.4.2 等比數列........152
3.5.1 等比數列的前 n 項和........155
3.5.2 等比數列的前 n 項和........158
3.5.A 數列的複習課........161
第四章、三角函數........163
4.1.1 角的概念的推廣........163
4.1.2 角的概念的推廣........167
4.2.1 弧度制........170
4.2.2 弧度制........173
4.3.1 任意角的三角函數........175
4.3.2 任意角的三角函數........179
4.4.1 同角三角函數的基本關係式........184
4.4.2 同角三角函數的基本關係式........187
4.5.1 正弦、餘弦的誘導公式........189
4.5.2 正弦、餘弦的誘導公式........192
4.5.3 正弦、餘弦的誘導公式........194
4.5.A 三角函數的複習課........196
4.6.1 兩角和與差的正弦、餘弦、正切........200
4.6.2 兩角和與差的正弦、餘弦、正切........203
4.6.3 兩角和與差的正弦、餘弦、正切........207
4.7.1 二倍角的正弦、餘弦、正切........210
4.7.2 二倍角的正弦、餘弦、正切........213
4.7.3 半角的正弦、餘弦、正切........215
4.8.1 正弦函數、餘弦函數的圖象和性質........218
4.8.2 正弦函數、餘弦函數的圖象和性質........223
4.8.3 正弦函數、餘弦函數的圖象和性質........226
4.8.4 正弦函數、餘弦函數的圖象和性質........229
4.9.1 函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象........232
4.9.2 函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象........235
4.10.1 正切函數的圖象和性質........239
4.11.1 已知三角函數的值求角........242
4.11.2 已知三角函數的值求角........245
4.11.A 三角函數的複習課一........248

4.11.B 三角函數的複習課二......257
第五章、平面向量......261
5.1.1 向量......261
5.2.1 向量的加法與減法......264
5.2.2 向量的加法與減法......268
5.3.1 實數與向量的積......271
5.3.2 實數與向量的積......274
5.4.1 平面向量的座標運算......277
5.4.2 平面向量的座標運算......280
5.5.1 線段定比分點......283
5.6.1 平面向量的數量積及運算律......287
5.6.2 平面向量的數量積及運算律......290
5.7.1 平面向量數量積的坐標表示......292
5.8.1 平移......295
5.9.1 正弦定理......298
5.9.2 餘弦定理......301
5.10.1 解斜三角形應用舉例......304
5.10.A 平面向量的複習課......306
叁、試教評估......309
肆、反思與建議......310
參考文獻......311

教學進度表一(綜合數學)

課題	課題內容	授課時間	課時
1.1 集合	了解集合的定義及用途	2015-09-07	2
1.2 子集、全集、補集	理解集合的名稱及性質	2015-09-09	2
評講家課/練習	評講家課/練習	2015-09-14	2
1.3 交集、並集	理解交集、並集的名稱及性質	2015-09-16	2
小測/評講	小測/評講	2015-09-21	2
1.4 含絕對值的不等式解法	利用對集合、一次及二次函數的認識來解含絕對值的不等式	2015-09-23	2
1.4 含絕對值的不等式解法	用對集合、一次及二次函數的認識來解含絕對值的不等式	2015-09-30	1
1.5 一元二次不等式解法	利用對集合、一次及二次函數的認識來解一元二次不等式	2015-09-30	1
1.5 一元二次不等式解法	利用對集合、一次及二次函數的認識來解一元二次不等式	2015-10-05	1
評講家課/練習	評講家課/練習	2015-10-07	2
1.5A 複習課	複習 1.1~1.4 的內容	2015-10-12	1
小測	小測	2015-10-12	1
評講	評講	2015-10-14	1
1.6 邏輯聯結詞	認識簡易邏輯	2015-10-14	1
1.7 四種命題	理解四種命題	2015-10-19	2
1.8 充分條件與必要條件	理解何為分條件與必要條件	2015-10-26	2
1.8 充分條件與必要條件	理解何為分條件與必要條件	2015-10-28	1
評講家課/練習	評講家課/練習	2015-10-28	1
小測/評講	小測/評講	2015-11-04	2
1.9A 複習課	複習 1.1~1.9 的內容	2015-11-09	1
評講家課/練習	評講家課/練習	2015-11-09	1
大測	大測第一章	2015-11-11	2

2.1 函數	了解函數中的定義域及值域及其取值範圍	2015-11-16	2
2.1 函數	了解函數中的定義域及值域及其取值範圍	2015-11-18	1
2.2 函數的表示法	介紹函數的表示法；1.解析法 2.列表法 3.圖象法	2015-11-18	1
2.3 函數的單調性	理解函數於各區間內的單調性	2015-11-23	2
評講家課/練習	評講家課/練習	2015-11-25	2
小測/評講	小測/評講	2015-11-30	2
2.4 反函數	了解反函數的概念，以及各函數的反函數，畫出圖像	2015-12-02	2
2.5 指數	介紹指數的表示法	2015-12-07	2
2.5 指數	介紹指數的表示法	2015-12-09	1
評講家課/練習	評講家課/練習	2015-12-09	1
2.6 指數函數	了解指數函數的概念，以及各函數的反函數，畫出圖像	2015-12-14	2
2.6 指數函數	了解指數函數的概念，以及各函數的反函數，畫出圖像	2015-12-16	1
評講家課/練習	評講家課/練習	2015-12-16	1
大測	大測 2.1~2.6	2015-01-04	2
評講	評講	2015-01-06	1
考試複習	考試複習	2015-01-11	2
考試複習	考試複習	2015-01-13	2
評講	評講	2015-02-01	2
溫習指數與指數函數	溫習指數與指數函數	2015-02-03	2
2.7 對數	介紹對數	2015-02-17	2
2.7 對數	介紹對數	2015-02-22	1
2.8 對數函數	了解對數函數的概念	2015-02-22	1
2.8 對數函數	了解對數函數的概念	2015-02-24	1
練習	練習	2015-02-24	1

小測/評講	小測/評講	2015-02-29	2
2.9 函數的應用舉例	會解有關文字題	2015-03-02	2
2.9.A 複習課	複習 2.5~2.9 的內容	2015-03-07	2
練習	練習	2015-03-09	2
大測	大測第二章	2015-03-14	2
評講	評講	2015-03-16	1
3.1 數列	介紹數列的概念	2015-03-16	1
3.1 數列	介紹數列的概念	2015-03-21	1
3.2 等差數列	理解等差數列的公差	2015-03-21	1
3.2 等差數列	理解等差數列的公差	2015-03-23	1
3.3 等差數列的前 n 項和	理解等差數列的求和公式	2015-03-23	1
3.3 等差數列的前 n 項和	理解等差數列的求和公式	2015-03-28	1
練習	練習	2015-03-28	1
小測/評講	小測/評講	2015-03-30	2
3.4 等比數列	介紹等比數列的概念	2015-04-06	2
3.5 等比數列的前 n 項和	理解等比數列的求和公式	2015-04-11	2
練習/小測	練習/小測	2015-04-13	2
評講	評講	2015-04-18	1
3.5A 溫習複習課	複習 3.1~3.5	2015-04-18	1
大測	大測第三章	2015-04-20	2
評講	評講	2015-04-25	1
5.5 線段的定比分點	掌握線段的定比分點公式，特別是中點座標公式	2015-04-27	1
練習	練習	2015-04-27	1
5.6 平面向量的數量積及運算律	理解平面向量數量積及運算律	2015-05-02	2
5.7 平面向量數量積的坐標表示	理解平面向量數量積的標表示	2015-05-04	1
小測	小測	2015-05-04	1

5.9 正弦定理、餘弦定理	能利用正弦定理、餘弦定理解斜三角形	2015-05-09	2
5.10 解斜三角形應用舉例	能解決斜三角形問題	2015-05-11	2
大測	大測第五章	2015-05-16	2
評講	評講	2015-05-18	2
考試複習	考試複習	2015-05-23	2
考試複習	考試複習	2015-05-25	2

教學進度表二(應用數學)

課題	課題內容	授課時間	課時
4.1 角的概念的推廣	了解正角、負角的意義	2015-09-11	2
4.2 弧度制	了解角的量度的兩種制度關係和概念	2015-09-18	2
4.3 任意角的三角函數	理解任意角的概念	2015-09-25	2
練習/小測	練習/小測	2015-10-09	2
評講	評講	2015-10-16	1
4.4 同角三角函數的基本關係式	同角三角函數的	2015-10-16	1
4.4 同角三角函數的基本關係式	同角三角函數的	2015-10-23	2
4.4 同角三角函數的基本關係式	同角三角函數的	2015-10-30	1
4.5 正弦、餘弦的誘導公式	正确運用誘導公式將任意角的三角函數化為銳角的三角函數	2015-10-30	1
4.5 正弦、餘弦的誘導公式	正确運用誘導公式將任意角的三角函數化為銳角的三角函數	2015-11-06	2
4.5A 複習課	複習 4.1~4.5	2015-11-13	1
練習	練習	2015-11-13	1
大測	大測 4.1~4.5	2015-11-20	2

評講	評講	2015-11-27	1
4.6 兩角和與差的正弦、餘弦、正切、餘切三角函數	能正确運用公式化簡三角函數及求三角函數的數值	2015-11-27	1
4.6 兩角和與差的正弦、餘弦、正切、餘切三角函數	能正确運用公式化簡三角函數及求三角函數的數值	2015-12-04	2
4.7 二倍角的正弦、餘弦、正切三角函數	掌握二倍角的的正弦、餘弦、正切公式	2015-12-04	1
4.7 二倍角的正弦、餘弦、正切三角函數	掌握二倍角的的正弦、餘弦、正切公式	2015-12-11	2
小測/評講	小測/評講	2015-12-18	2
考試複習	考試複習	2016-01-08	2
考試	考試	2016-01-15	2
4.8 正，餘弦函數的圖象和性質	能用五點法畫出正弦和餘弦函數的簡單圖像	2016-01-22	2
4.8 正，餘弦函數的圖象和性質	能用五點法畫出正弦和餘弦函數的簡單圖像	2016-01-29	2
4.9 函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象	能正確求函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的最大值、最小值、振幅初相及周期	2016-02-05	2
練習/小測	練習/小測	2016-02-19	2
評講	評講	2016-02-26	1
4.10 正切函數的圖象和性質	能寫出正切函數的定義域、值域和周期	2016-02-26	1
4.10 正切函數的圖象和性質	能寫出正切函數的定義域、值域和周期	2016-03-04	2
4.11 已知三角函數值求角	由已知的正弦、餘弦、正切函數值求角	2016-03-11	2
4.11A 複習課	複習 4.1~4.11	2016-03-18	1
4.11B 複習課	複習 4.1~4.11	2016-03-18	1

大測	大測 4.5~4.11	2016-04-01	2
評講	評講	2016-04-08	1
5.1 向量	理解向量、零向量、單倍向量、平行向量、相等向量及向的模的概念	2016-04-08	1
5.2 向量的加法與減法	掌握向量的加法與減法的定義	2016-04-15	2
5.3 實數與向量的積	掌握實數與向量的積的定義和運算律	2016-04-22	2
5.4 平面向量的坐標運算	掌握平面直角坐標系的概念	2016-04-26	2
評講	評講	2016-05-06	1
5.8 平移	掌握平面內點的平移公式	2016-05-06	1
5.10A 複習課	複習 5.1~5.10 內容	2016-05-13	1
練習	練習	2016-05-13	1
考試複習	考試複習	2016-05-20	2

壹、教學計劃內容簡介

一、教學目標

1. 貫徹教育必須為社會主義現代化建設服務，必須與現實相結合，培養德、智、體、群、美和靈全面發展的社會事業的建設者和接班人的方針，以全面推進素質教育為宗旨，全面提高普通高中教育質量。
2. 進一步提高學生的思想道德品質、文化科學知識、審美情趣和身體心理素質，培養學生的創新精神、實踐能力、終身學習的能力和適應社會生活的能力，促進學生的全面發展。
3. 通過不同形式的探究活動，培養學生對數學的興趣，以達致自主學習。
4. 提高學生的抽象概括、推理論證、運算求解等基本能力。
5. 使學生學好從事現代化建設和進一步學習所必需的三角和平面向量基礎知識、基本技能，以及其中的數學思想方法。
6. 在數學的學習過程中注重培養學生提出問題、分析問題和解決問題的能力。
7. 激發學生學習數學的興趣，使學生樹立學好數學的信心，形成實事求事的科學態度和鍥而不捨的鑽研精神，與及和同學互相合作的精神。

二、主要內容

1. 集合與簡易邏輯
2. 函數
3. 數列
4. 三角函數
5. 平面向量

(綜合數學內容：集合與簡易邏輯，函數，數列。應用數學內容：三角函數，平面向量。)

三、設計創意和特色

1. 本教學設計利用已有的知識類比，推出新的知識。
2. 多以問答形式引起學生興趣。

3. 利用簡短易明的句子，幫助學生記憶。
4. 為配合夜校學生，多在課堂上做練習。
5. 以現實生活為例引起學生關注。

四、教學重點

1. 獲得必要的數學基础知識和基本技能，理解基本的數學概念、數學結論的本質，了角概念、結論等產生的背景、應用，體會其中所蘊涵的數學思想和方法，以及它們在後續學習中的作用。通過不同形式的自主學習、探究活動，體驗數學發現和創造的歷程。
2. 用探究的形式進行教學，讓學生成為課堂的中心，達致自主學習來提高學生的抽象概括、推理論證能力。
3. 用活動的形式進行複習，提高學生的學習動機，培養學生對數學的興趣。
4. 重視學生的功課、小測，鞏固學生的基礎知識。

五、教學難點

1. 需提高學生空間想像、抽象概括、推現論證、運算求解、數據上理等基本能力。
2. 令學生具備提出、分析和解決問題(包括簡單的實際問題)的能力，數學表達和交流的能力，發展獨立獲取數學知識的能力。
3. 提高學生學習數學的興趣，樹立學好數學的信心，形成鍥不捨的鑽研精神和科學态度。

六、教學用具

畫圖軟件 winplot

七、教學課時

全年 184 課時，提交教案 97 課時。

貳、教案

第一章、集 合

1.1.1 集合

教學目標：1.通過具體的例子了解集合的含義，知道常用數集及其記法；
2.初步了屬於關係和集合相等的意義。
教學重點：集合的概念及其表示。
教學難點：正確理解集合的概念。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：
問題 1：今天晚上，夜高一甲班的學生在這個班房上數學堂。問會有其它學生在這班上上數學堂嗎?那麼夜高一甲班的學生就是一個集合。

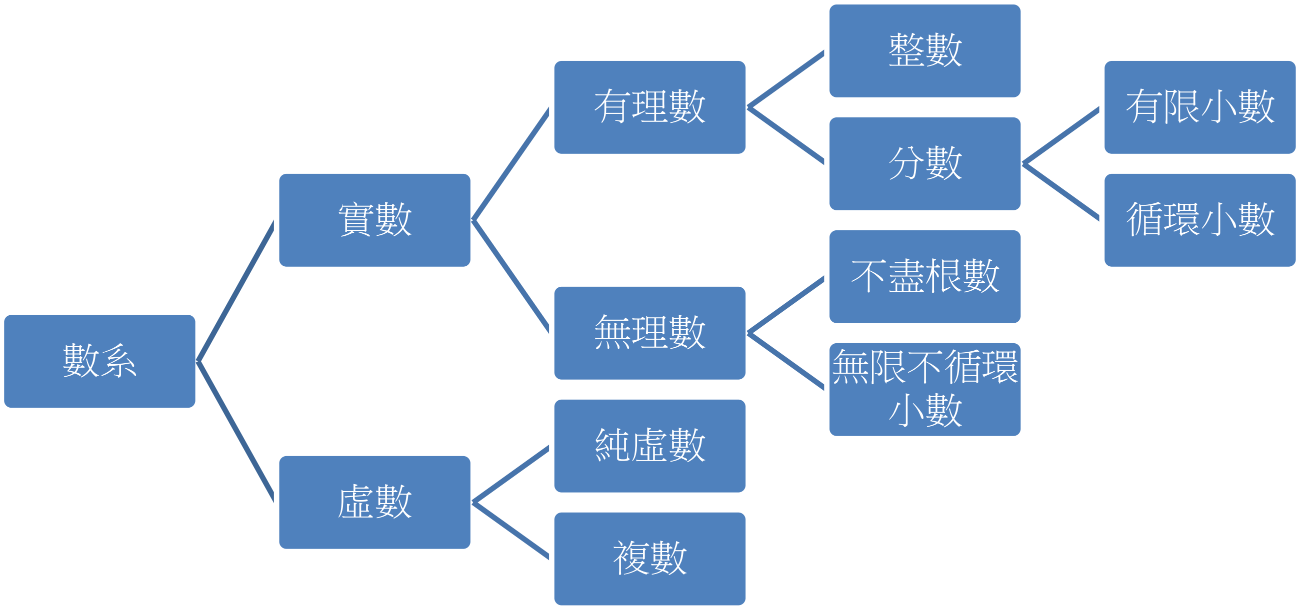
二、講授新課：
由問題 1 引出集合的概念
一般地，某些指定的對象集在一起就成為一個**集合**，也簡稱集。
集合中的每個對象叫做這個集合的**元素**。
例如：夜高一甲班的學生就是一個集合，陳大文就是其一個元素。
問題 2：
(1)夜高一甲班的女同學，能成為一個集合嗎?
(2)夜高一甲班長得瘦的女同學，能成為一個集合嗎?
(3)夜高一甲班第一行與第二行的同學互換座位，換了以後仍是一個集合嗎?
(4)3，3，6，7 這四個數字組成一個集合嗎?

通過以上的問題討論，從而引出元素的特徵：
(1)能。
(2)不能。**確定性**：集合中的元素必須是確定的。
(3)是。　**無序性**：集合中的元素沒有一定的順序。
(4)不能。**互異性**：集合中的元素不重複。
常用的數集及其記法
全體非負整數的集合通常簡稱非負整數集(或自然數集)，記作 $\boldsymbol{N}$ ；

非負整數集內排除 0 的集合簡稱正整數集，記作 $\boldsymbol{N}^*$ 或 $\boldsymbol{N}_+$ ；

全體整數的集合通常簡稱整數集，記作 $\boldsymbol{Z}$ ；
全體有理數的集合通常簡稱有理數集，記作 $\boldsymbol{Q}$ ；
全體實數的集合通常簡稱實數集，記作 $\boldsymbol{R}$ 。
我們還把正整數集、負整數集、正有理數集、負有理數集、正實數集、負實數集分別表示為 $\boldsymbol{Z}^{+}$ 、 $\boldsymbol{Z}^{-}$ 、 $\boldsymbol{Q}^{+}$ 、 $\boldsymbol{Q}^{-}$ 、 $\boldsymbol{R}^{+}$ 、 $\boldsymbol{R}^{-}$ 。

數系



問題 3： **3.14** 是有理數嗎? $\boldsymbol{\pi}$ 是有理數嗎?
引入**元素與集合的關係**

如果 $\boldsymbol{a}$ 是集合 $\boldsymbol{A}$ 的元素，就說 a 屬於集合 A，記作 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ ；

如果 $\boldsymbol{a}$ 不是集合 $\boldsymbol{A}$ 的元素，就說 a 不屬於集合 A，記作 $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}$ 。

所以 $\mathbf{3.14} \in \boldsymbol{Q}$ ， $\boldsymbol{\pi} \notin \boldsymbol{Q}$ 。

三、例題：
例題 1：用“$\in$”或“$\notin$”符號填空：

(1) -3 ____ $\boldsymbol{N}$ ；
(2) 0 ______ $\boldsymbol{N}^{*}$ ；
(3) -12 ____ $\boldsymbol{Z}^{-}$ ；
(4) $\sqrt{2}$ ____ $\boldsymbol{Q}$ ；

例題 2：已知集合 A 的元素為$\mathbf{1}$， $\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{x^2-3x-3}$，若$\boldsymbol{3\in A}$且$\boldsymbol{-1\notin A}$，求實數$\boldsymbol{x}$的值。

四、鞏固練習：

1.下列各組對象能否確定一個集合：

(1)長得高的人　　(不確定)

(2)小於 204 的數　(確定)

(3)0 ，0 ，1，4 ，6 (不確定)

2.判斷下列下說法是否正確：

(1) $\{5x^3-x\ ,\ x^2,\ 3x+2\}$即$\{x^2,\ 3x+2\ ,\ 5x^3-x\}$

(2)若$2x=5$，則$x\notin N$

(3)若$x\notin Q$，則$x\notin R$

(4)若$x\in N$，則$x\in N^*$

3.課本$\boldsymbol{P5}$，練習$\mathbf{2}$

4.若方程$\boldsymbol{x^2-5x+6=0}$和方程$\boldsymbol{x^2-x-20=0}$的解為元素的集合为$\boldsymbol{M}$，則$\boldsymbol{M}$中元素的個數為(　　C　　)

$A.\mathbf{1}$　　　　$B.\mathbf{2}$　　　　$C.\mathbf{3}$　　　　$D.\mathbf{4}$

五、課堂小結：

元素的特徵，數集的記法，元素與集合的關係。

六、家課：

課本$\boldsymbol{P7}$，習題$\mathbf{1.1}$，$\mathbf{1}$。

1.1.2 集合

教學目的：1.初步了解有限集、無限集、空集的意義；
2.初步掌握集合的兩種表示方法：列舉法和描述法，並能正確地表示一些簡單的集合。

教學重點：1.通過實例分別選擇自然語言、集合語言(列舉法或描述法)表述不同的具體問題，感受集合語言的意義和作用，體驗用集合思想去觀察和思考問題的樂趣。

教學難點：集合表示法的恰當選擇。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、複習提問：

1. 元素的性質：
（1）__________；
（2）__________；
（3）__________；

2. 常用數集符號：
非負整數集（或自然數集）: ________ ；
正整數集：________________；
整數集: ________________ ；
有理數集：________________ ；
實數集：________________ ；

二、講授新課：

問題 1：課本 ***P*5** 練習**1**說出下面集合中的元素：

(1){大於 **3** 小於 **11** 的偶數}	{4 ，6 ，8 ，10}
(2){平方等於的**1**數}	{1， −1}
(3){ **15** 約數}	{3 ，5}
	列舉法

列舉法：把集合中的元素一一列舉出來，寫在大括號“**{}**”內表示集合的方法。

如：{1 ，3 ，5 ，7 ，9}，{ x^2 ，$3x-2$ ，$x+5y^3$ ，x^2-9y^2 }

有限集：有限個元素的集合。如小於或等於 4 的自然數集{ **0** ，**1** ，**2** ，**3** ，**4** }

無限集：無限個元素的集合。如自然數集 N 用列舉法表示為{ **0** ，**1** ，**2** ，**3** ，**4** ，… }

三、例題：

例題 1：用列舉法表示下列集合，然後說出它們是有限集還是無限集：

(1)由大於10的所有自然數組成的集合；	{ 10 ，11，12，13，… }	無限集
(2)由24與30的所有公約數組成的集合；	{ 2 ，3 ，6 }	有限集
(3)方程 $x^2-4=0$ 的解的集合；	{ 2 ，-2 }	有限集
(4)由小於10的所有質數組成的集合；	{ 2 ，3 ，5 ，7 }	有限集

注：1.約數如無特別說明，約數指的都是正約數

2.質數，又稱素數，大於1的自然數中，除了1和本身外並無其它因子

問題 2：方程 $x^2+1=0$ 的解集為？

無

引入

空　集：不含任何元素的集合；記 ϕ 。

注：1.空集應表示為 ϕ 而非 $\{\phi\}$ ，其它類同。

問題 3：能用列舉法表示不等式 $x-3>2$ 的解集嗎?

不能

列舉法一般適於有限集。

哪麼用什麼方法來表示以上解集呢?

描述法：在大括號“**{}**”內先寫出此集合中元素的一般式，再畫一條豎線，在豎線後面寫上集合中的元素的公共屬性即 $A=\{x|x$ 滿足性質 $P\}$ 。

如上題答 $\{x|\ x-3>2\}$

如函數 $y=x-1$ 的圖像上的點組成的集合可表示為 $\{(x,y)|\ y=x-1\}$

如 $\{x|x$ 是直角三角形$\}$

注：1. $\{y|\ y=x-1\}$ 與 $\{(x,y)|\ y=x-1\}$ 是不同的兩個集合。

所以上題解為 $\{x|\ x>5\}$

例題 2：試用描述法表示下列集合：

(1)由4與6的所有公倍數組成的集合；	$\{\ x|\ x=12n, n\in N^*\ \}$
(2)所有偶數組成的集合；	$\{\ x|\ x=2n, n\in Z\ \}$
(3)方程 $x^2-2=0$ 的解的集合；	$\{\ x|\ x^2-2=0\ \}$
(4)不等式 $4x-6<5$ 解集；	$\{\ x|\ x<\dfrac{11}{4}\ \}$

注：1.一般集合為無限集時不宜用列舉法。

四、鞏固練習：

1.用適當的方法表示集合：大於0的所有奇數集

2.集合$M=\{a \mid \frac{6}{5-a}\in N$ 且 $a\in Z\}$，求集合M 。

五、課堂小結：

用列舉法和描述法表示集合有什麼區別？各有什麼優勢與不足？

六、家課：

課本 ***P*7** ，習題**1.1**， **2** 、**3** 。

1.2.1 子集、全集、補集

教學目標：1.了解集合之間含關係的意義；
2.理解子集、真子集的概念；
3.了解全集的意義，理解補集的概念。
教學重點：子集、真子集、全集、補集的概念。
教學難點：集合之間含關係。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：

(1)空集的符號是	ϕ
(2)偶數集	$\{\ x \mid \ x=2n, n\in Z\ \}$
(3)奇數集	$\{\ x \mid \ x=2n+1, n\in Z\ \}$

二、新課教授：

問題 1：觀察下列集合：

$A=\{1,2\}$　　$B=\{1,2,3,4\}$　　$C=\{x \mid \ x^2-3x+2=0\}$

$D=\{x \mid \ x$是四邊形$\}$　　$E=\{x \mid \ x$是多邊形$\}$

發現
集合A中的任何一個元素都是集合B的元素；
集合D中的任何一個元素都是集合E的元素；
集合B中的3和4不是集合A的元素；
集合A與C中的元素完全相同；
引入
子 集：對於兩個集合A與B，如果集合A中任何一個元素都是集合B的元素，我們說集合A是集合B的子集，記作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，讀作"A包含於B"或"B包含A"；
當集合A不包含於集合B，記作$A\not\subset B$。
規定：**空集是任何集合的子集**

真子集：對於兩個集合 A 與 B ，如果 $A \subseteq B$ ，並且 $A \neq B$ ，我們就說集合 A 是集合 B 的真子集，記作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ，讀作“A 真包含於 B”或 “B 真包含 A”。

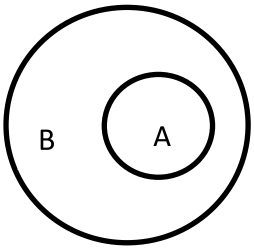
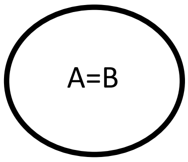
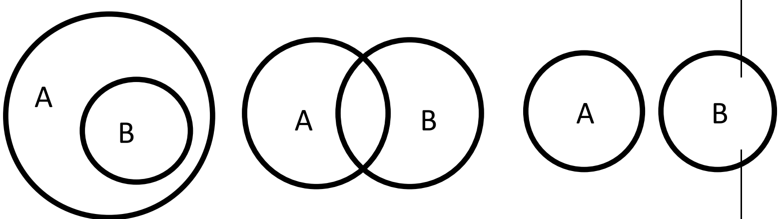
$A \subseteq B$ 有兩種情況
(1) A 是 B 的一部份，即 A 是 B 的真子集 $A \subset B$ ；
(2) A 與 B 的元素一樣，即是同一集合 $A = B$ 。.
符號≤類似⊆

$$\le \begin{cases} < \\ = \end{cases} \quad \text{類似} \quad \subseteq \begin{cases} \subset \ (\text{真包含於}) \\ = \ (\text{相等}) \end{cases}$$

其中相等的關系，可知**任何一個集合是它本身的子集**。

上題可寫成 $A \subseteq B$ 或 $A \subset B$ ， $D \subseteq E$ 或 $D \subset E$ ， $A = C$

文氏圖：即圖示法，用平面區域來表示集合之間關係的方法。
問題 2：用圖示法表示下列集合間的關係。(老師和學生一同討論得出結論)

集合間的關係	圖示
$A \subset B$	
$A = B$	
$A \not\subset B$	

顯然，**空集是任何非空集合的真子集**。

問題 3：

	條件	結論
數	$3<9$ 且 $9<100$	$3<100$
集合	$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$	?

總結出

傳遞性：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，則 $A\subseteq C$

問題 4：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，則 A 與 B 的關係？

總結出

反對稱性：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，則 $A=B$

三、例題：

例題 1：寫出集合$\{\ a，b\ \}$的所有的子集及真子集。$\{\ a\ \}$

$\{\ a，b\ \}$的子集	$\{\ a\ \}$，$\{\ b\ \}$，$\{\ a，b\ \}$，ϕ
$\{\ a，b\ \}$的真子集	$\{\ a\ \}$，$\{\ b\ \}$，ϕ

例題 2：解不等式 $x-3>2$，並把結果用集合表示出來。

$\{x|\ x-3>2\ \}$

四、鞏固練習：

課本 ***P*9**，練習**1**。

例題 3：一個集合中有 n 個元素，則這個集合子集的個數為？真子集的個數為？

集合的元素個數	子集個數	真子集個數
2	$2^2=4$	$2^2-1=3$
3	$2^3=8$	$2^3-1=7$
n	2^n	2^n-1

五、課堂小結：

用列舉法和描述法表示集合有什麼區別？各有什麼優勢與不足？

六、家課：

課本 ***P*9**，練習**2**，**3**。

1.2.2 子集、全集、補集

教學目標：1.使學生進一步理解集合及子集的意義，了解全集、補集的概念；
2.能在給定的全集及其一個子集的基礎上，求該子集的補集；
3.培養學生觀察、分析、歸納等能力。

教學重點：補集的含義及求法。

教學難點：補集性質的理解。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、複習提問：

問題 1：下列各組的三個集合中哪兩個集合間具有包含的關係？

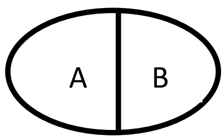
(1) $S=\{-2,-1,1,2\}$，$A=\{-1,1\}$，$B=\{-2,2\}$

(2) $S=R$，$A=\{x|x\le 0, x\in R\}$，$B=\{x|x>0, x\in R\}$

(3) $S=\{x|x\text{為地球人}\}$，$A=\{x|x\text{為中國人}\}$，$\mathrm{B}=\{x|x\text{為外國人}\}$

二、新課教授：

問題 2：$S=\{\ x|\ x\text{是夜高一甲班的學生}\ \}$，$A=\{\ x|\ x\text{是夜高一甲班的女學生}\ \}$，$B=\{\ x|\ x\text{是夜高一甲班的男學生}\ \}$以上三個集合有什麼關係？



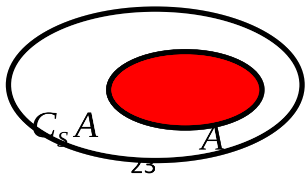
師生討論，經圖示法看出關係。

全 集：集合S含有我們所要研究的各個集合的全部元素，這個集合就可以看作一個全集，全集通常U用表示。

補 集：設S是一個集合，A是S的一個子集(即$A\subseteq S$)，由S中所有不屬於A的元素組成的集合，叫做S中子集A的補集(或餘集)，記作$C_S A$即
$C_S A=\{x\mid x\in S,\text{且}x\notin A\}$

上題可見在全班中不是女學生就是男學生即$C_S A=B$

注：1.補集有不是的意思。



經圖示法可看出問題 1，2 答案：

可知 B 為 S 的子集 A 的補集，即 $B = C_S A = \{x | x \in S, 且 x \notin A\}$；

同樣 A 為 S 的子集 B 的補集，即 $A = C_S B = \{x | x \in S, 且 x \notin B\}$

把 S 稱為全集，記作 U 。

實數範圍內討論問題時，可以把實數集 R 看作全集 U ，那麼，有理數集 Q 的補集 $C_U Q$ 就是全體無理數的集合。

三、例題：

例題 1：設全集 $U = \{-1,-2,-3,-4\}$，$A = \{x | x^2 + 5x + m = 0, x \in U\}$，求 $C_U A$、m 。

把 $x = -1,-2,-3,-4$ 代入中 $x^2 + 5x + m = 0$ 得 $m = 4$ 或 $m = 6$
當 $m = 4$ 時， $x^2 + 5x + 4 = 0$ ，即 $A = \{-1,-4\}$
當 $m = 6$ 時， $x^2 + 5x + 6 = 0$ ，即 $A = \{-2,-3\}$
所以當 $m = 4$ 時， $C_U A = \{-2,-3\}$；

當 $m = 6$ 時， $C_U A = \{-1,-4\}$ 。

例題 2：不等式組 $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 3x - 6 \le 0 \end{cases}$ 的解集為 A ，$U = R$ ，試求 A 及 $C_U A$ ，並把他們分別表示在數軸上。

解： $A = \{x | 2x - 1 > 0, 且 3 - 6 \le 0\} = \left\{ x \middle| \frac{1}{2} < x \le 2 \right\}$

從而 $C_U A = \left\{ x \middle| x \le \frac{1}{2}, 或 > 2 \right\}$ 。

四、鞏固練習：

課本 $P10$ ，練習1，2 。

五、課堂小結：

何為全集？何為補集？

六、家課：

課本 ***P11*** ，練習**4** ，**5** 。

1.3.1 交集、並集

教學目標：1.理解兩個集合的並集與交集的含義，會求兩個簡單集合的並集和交集。

2.能使用文氏圖表示集合的並集和交集運算結果，體會直觀圖對理解抽象概念　的作用。

教學重點：交集、並集運算的含義，識記與運用。

教學難點：弄清交集，並集的含義，認識符號之間的區別與聯繫。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

課本 ***P*10** ，練習**1** ，**2** 。

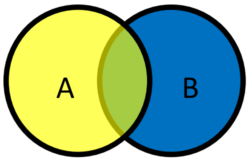
二、教授新課：

問題 1：圖中，綠色部份表示什麼？

A 而且 B 的意思

問題 2：圖中，有顏色部份表示什麼？

A 或者 B 的意思



交　集：由所有屬於集合 A 且屬於集合 B 的元素所組成的集合，叫做 A 與 B 的交集，記作 $A\cap B$(讀作“A 交 B”)，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A, 且 x\in B\}$

並　集：由所有屬於集合 A 或屬於集合 B 的元素所組成的集合，叫做 A 與 B 的並集，記作 $A\cup B$(讀作“A 並 B”)，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A, 或 x\in B\}$

三、例題：

例題 1：設 $A=\{x\mid x>-2\}$ ， $B=\{x\mid x<3\}$ ，求 $A\cap B$ 。

解： $A\cap B=\{x\mid -2<x<3\}$

例題 2：設 $A=\{x\mid x 是等腰三角形\}$ ， $B=\{x\mid x 是直角三角形\}$ ，求 $A\cap B$ 。

解： $A\cap B=\{x\mid x 是等腰直角三角形\}$

例題 3：設 $A=\{4,5,6,8\}$ ， $B=\{3,5,7,8\}$ ，求 $A\cap B$ ，　$A\cup B$ 。

解： $A\cap B=\{5,8\}$

$A\cup B=\{3,4,5,6,7,8\}$

例題 4：設 $A=\{x\,|\,x\text{是銳角三角形}\}$ ， $B=\{x\,|\,x\text{是鈍角三角形}\}$ ，求 $A\cup B$ 。
解： $A\cup B=\{x\,|\,x\text{是斜三角形}\}$

例題 5：設 $A=\{x\,|\,x-1<x<2\}$ ， $B=\{x\,|\,1<x<3\}$ ，求 $A\cup B$ 。
解： $A\cup B=\{x\,|\,-1<x<3\}$

四、鞏固練習：

課本 ***P*13** ，練習**1** 。

五、課堂小結：

補集,交集和並集的定義是什麼？思考“$A\cap C_U A=\phi$”的意義？思考集合 A ，B ， $A\cap B$ 和 $A\cup B$ 中元素的個數有何關係？

六、家課：

課本 ***P*13** ，練習**2** ， **3** ， **4** ， **5** 題。

1.3.2 交集、並集

教學目標：1.掌握關鍵的術語和符號，並會用它們正確進行集合的並集與交集運算。

2. 在思考中感知知識，在合作交流中形成知識，在獨立鑽研和探究中提升思維能力，嘗試實踐與交流相結合。

教學重點：集合的交集與並集的概念。

教學難點：集合的交集與並集“是甚麼”，“為甚麼”，“怎樣做”。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、複習提問：

問題 1：由交集的定義，得知

$A\cap A=$______	$A\cap\phi=$______	$A\cap B=$______

問題 2：由並集的定義，得知

$A\cup A=$______	$A\cup\phi=$______	$A\cup B=$______

二、例題：

例題 1：設 $A=\{(x,y)\,|\,y=-4x+6\}$，$B=\{(x,y)\,|\,y=5x-3\}$，求 $A\cap B$。(1) 代入 (2)

解：$\begin{cases} y=-4x+6\cdots(1) \\ y=5x-3\cdots(2) \end{cases}$

(1) 代入 (2) 得 $-4x+6=5x-3$

$-4x-5x=-6-3$

$-9x=-9$

$x=1$　　代入 (1)　　得 $y=-4+6=2$

$\therefore A\cap B=\{(1,2)\}$

本題中，(x,y) 可以看作直線上的點的座標，也可以看作二元一次方程的一個解。

偶數集：$\{x\,|\,x=2n, n\in Z\}$

奇數集：$\{x\,|\,x=2n+1, n\in Z\}$

例題 2：

已知 A 為奇數集，B 為偶數，Z 為整數集，求 $A\cap B$，$A\cap Z$，$B\cap Z$，$A\cup B$，$A\cup Z$ $B\cup Z$。

解： $A\cap B=\{奇數\}\cap\{偶數\}=\phi$

$A\cap \mathrm{Z}=\{奇數\}\cap \mathrm{Z}=\{奇數\}=\mathrm{A}$

$\mathrm{B}\cap \mathrm{Z}=\{偶數\}\cap \mathrm{Z}=\{偶數\}=\mathrm{B}$

$A\cup B=\{奇數\}\cup\{偶數\}=\mathrm{Z}$

$A\cup \mathrm{Z}=\{奇數\}\bigcup \mathrm{Z}=\mathrm{Z}$

$\mathrm{B}\cup \mathrm{Z}=\{偶數\}\bigcup \mathrm{Z}=\mathrm{Z}$

例題 3：設$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ， $A=\{3,4,5\}$ ， $B=\{4,7,8\}$，求$C_U A$， $C_U B$ ，

$(C_U A)\cap(C_U B)$ ，$(C_U A)\cup(C_U B)$ 。

解： $C_U A=\{1,2,6,7,8\}$

$C_U B=\{1,2,3,5,6\}$

$(C_U A)\cap(C_U B)=\{1,2,6\}$

$(C_U A)\cup(C_U B)=\{1,2,3,5,6,7,8\}$

例題 4：已知全集$U=R$ ，設集合$A=\{x\mid -2<x\leq 5\}$ ， $B=\{x\mid x\leq -4或\mathrm{x}\geq 3\}$求

$C_U A$ ， $A\cap B$ ，$C_U(A\cap B)$ ， $A\cup B$ 。

解： $C_U A=\{x|x\leq -2\ \ or\ \ x>5\}$

$A\cap B=\{x|3\leq x\leq 5\}$

$C_U(A\cap B)=\{x|x<3\ \ or\ \ x>5\}$

$A\cup B=\{x|x\leq -4\ \ or\ \ x>-2\}$

三、鞏固練習：

課本 ***P*14**，練習**1**，**2**，**3**，**4**。

四、課堂小結：

本堂課學習了什麼內容呢？

五、家課：

課本 ***P*15**，習題**1.3**，**5**，**7**，**8**。

1.4.1 含絶對值的不等式解法

教學目標：1.通過用數軸來表示含絶對值不等式的解集，培養學生數形結合的能力；

2.通過將含絶對值的不等式同解變化為不含絶對值的不等式，培養學生的化歸思想和轉化能力。

教學重點：簡單的$|\boldsymbol{x}|>\mathbf{a}$與$|\boldsymbol{x}|<\mathbf{a}$的兩種基本型含絶對值不等式的解法。

教學難點：利用對絶對值意義的理解和分析，解決實際問題。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

不等式的基本性質： **(1)**如果$a>b$，則$a+c>b+c$。 **(2)**如果$a>b$，$c>0$則$ac>bc$。 **(3)**如果$a>b$，$c<0$則$ac<bc$。	絶對值的定義：$\lvert a\rvert=\begin{cases}a, & a>0\\0, & a=0\\-a, & a<0\end{cases}$

二、教授新課：

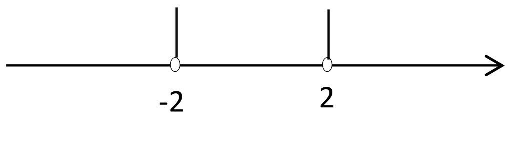
問題 1：求下列各式的解？

讓學生自行討論，發現一般含有絶對值不等式右面為零或負數時的解。

	$\lvert x\rvert=0$	$\lvert x\rvert>0$	$\lvert x\rvert<0$	$\lvert x\rvert>-2$	$\lvert x\rvert<-2$
解	$x=0$	$x\neq 0$且 $x\in R$	ϕ	$x\in R$	ϕ

問題 2：那麼絶對值不等式右面為正數的解呢？

先考慮$|x|=2$

	$\lvert x\rvert=2$
解	$x=2$或$x=-2$
數軸上表示	

可見2，-2把數軸分為三部分，紅、白、藍

	表示區域	該區域內取一些點	代入$\|x\|$	皆發現
	$-2<x<2$	$x=$___、___、___	$\|x\|=$___、___、___	$\|x\|<2$
	$x<-2$	$x=$___、___、___	$\|x\|=$___、___、___	$\|x\|>2$
	$x>2$	$x=$___、___、___	$\|x\|=$___、___、___	

注：小於取中間，大於取兩邊。

問題 3：$|x|=2$的幾何意義？解集是？答：表示數軸上到原點距離等於 2 的點的集合，

解集是$\{x|\ x=2$ 或 $x=-2\ \}$

問題 4：$|x|<2$的幾何意義？解集是？答：表示數軸上到原點距離小於 2 的點的集合，

解集是$\{x|\ -2<x<2\ \}$

問題 5：$|x|>2$的幾何意義？解集是？答：表示數軸上到原點距離大於 2 的點的集合，

解集是$\{x|\ x<-2$ 或 $x>2\ \}$

三、鞏固練習：

課本 ***P*17** ，練習 **1.(1 ~ 2)** 。

四、例題：

例題 1：解不等式$|x-500|\le 5$

解： $-5\le x-500\le 5$

$-5+500\le x\le 5+500$

$495\le x\le 505$

$\therefore \{x|\ 495 \le x \le 505\ \}$

例題 2：解不等式$|2x+5|>7$

解：$2x+5<-7$ 或 $2x+5>7$

$x<6$ 或 $x>1$

$\therefore \{x|\ x<6或x>1\ \}$

注：定義法：用$|x|<a$與$|x|>a(a>0)$型不等式的解法解決$|ax+b|<c$與

$|ax+b|>c(c>0)$型不等式

五、鞏固練習：

課本 ***P*17** ，練習 **2.(1 ~ 2)** 。

六、課堂小結：

含絕對值不等式	a的範圍	解集
$\|x\|>a$	$a>0$	$\{x\|\ x<-a或x>a\ \}$
	$a=0$	$\{x\|\ x\neq a\ \}$
	$a<0$	$x\in R$
$\|x\|<a$	$a>0$	$\{x\|\ -a<x<a\ \}$
	$a=0$	ϕ
	$a<0$	ϕ

七、家課：

課本 ***P*17** ，練習 **2.(1 ~ 2)** 。

1.4.2 含絕對值的不等式解法

教學目標：1.鞏固 $|ax+b|<\mathrm{c}$ 與 $|ax+b|>\mathrm{c}\ (\mathrm{c}>0)$ 型不等式的解法，並能熟練地解決問題；掌握分類討論的方法解決含多個絕對值的不等式以及含參數不等式；

2.激發學習數學的熱情，培養勇於探索的精神，勇於創新精神，同時體會事物之間普遍聯繫的辯證思想。

教學重點：分類討論的方法解決含多個絕對值的不等式以及含參數的不等式。

教學難點：如何正確分類與分段，簡單的參數問題。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

含絕對值不等式 $|x|>a$ 或 $|x|<a\quad(a>0)$；及 $|ax+b|<c$ 與 $|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式的解法。

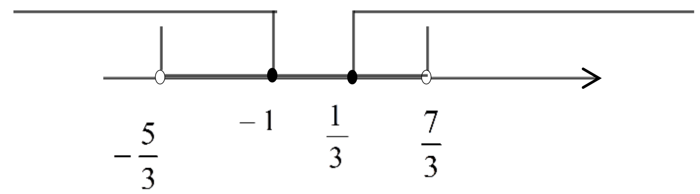
注：小於取中間，大於取兩邊。

二、教授新課

例題 1：解不等式 $2\le|3x+1|<6$

分析：原不等式等價哪些不等式？怎樣去掉絕對值？原不等式等價於

$\begin{cases}|3x+1|\ge 2\\|3x+1|<6\end{cases}$ 即解：

	$\|3x+1\|\ge 2$	及	$\|3x+1\|<6$
小於取中間 大於取兩邊	$3x+1\ge 2$ 或 $3x+1\le -2$		$-6<3x+1<6$
	$x\ge\frac{1}{3}$ 或 $x\le -1$		$-\frac{5}{3}<x<\frac{7}{3}$
數軸上表示	 		

解集	$\left\{x \middle\| -\frac{5}{3} < x \le -1 \text{或} \frac{1}{3} \le x < \frac{7}{3}\right\}$

一、鞏固練習：解不等式$1 < \|2x-1\| \le 5$

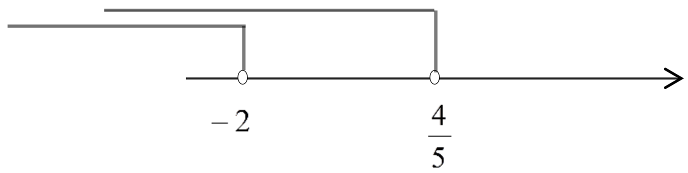
三、教授新課

例題 2：解不等式$\|2x-3\| > 3x-1$

分析：原不等式等價哪些不等式？怎樣去掉絕對值？

把不等右邊看作一個常數，則為 $\|ax+b\| > c(c>0)$ 型不等式的解法。

即解：

小於取中間 大於取兩邊	$2x-3 > 3x-1$	或	$2x-3 < -(3x-1)$
	$3x-2x < -3+1$		$3x+2x < 3+1$
	$x < -2$		$x < \frac{4}{5}$
數軸上表示			
解集	$\left\{x \middle\| x < \frac{4}{5}\right\}$		

四、鞏固練習：解不等式$|4x-3|>2x+1$

五、課堂小結：不等式型如$c<|ax+b|<d \quad (c>0, d>0)$及$|ax+b|>cx+d$的解法，則型如$d<|ax^2+bx+c|<e \quad (d>0, e>0)$及$|ax^2+bx+c|>dx+e$的解法

六、家課：

(1) $2<|2x-5|\le 8$

(2) $|4x+1|\le 3x-1$

(3) $|x^2-5x+5|<1$

1.4.3 含絕對值的不等式解法

教學目標：含兩個絕對值不等式的解法。

教學重點：培養數形結合的能力，分類討論的思想，培養通過換元轉化的思想方法，培養抽象思維的能力。

教學難點：$|x-a|+|x-b|>c$ 與 $|x-a|+|x-b|<c$ 型不等式的解法。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

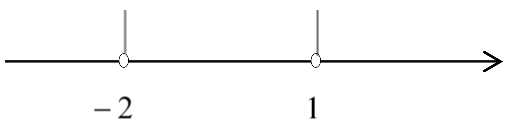
教學過程：

一、溫習舊知識：不等式型如 $c<|ax+b|<d \quad (c>0, d>0)$ 及 $|ax+b|>cx+d$ 的解法

二、教授新課

例題 1：解不等式 $|x+2|+|x-1|<4$

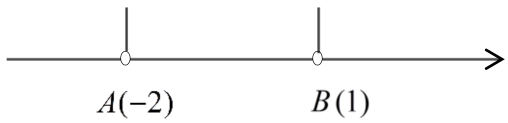
解法一分析：利用絕對值的代數定義

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$|x+2|=0$</td><td colspan="2">$|x-1|=0$</td></tr>
<tr><td>即</td><td colspan="3">$x=-2$</td><td colspan="2">$x=1$</td></tr>
<tr><td>把數軸分為三段即</td><td colspan="5">
</td></tr>
<tr><td>當</td><td>$x<-2$</td><td></td><td>$-2\le x<1$</td><td></td><td>$x\ge 1$</td></tr>
<tr><td></td><td>$x+2<0$
$x-1<0$</td><td></td><td>$x+2>0$
$x-1<0$</td><td></td><td>$x+2>0$
$x-1>0$</td></tr>
<tr><td>原不等式等</td><td>$-(x+2)-(x-1)<4$
$x>-\frac{5}{2}$</td><td>或</td><td>$(x+2)-(x-1)<4$
$3<4$
R</td><td>或</td><td>$(x+2)+(x-1)<4$
$x<\frac{3}{2}$</td></tr>
</table>

價於					
即	$-\frac{5}{2}<x<-2$		$-2\le x<1$		$1\le x<\frac{3}{2}$
答案	$\left\{x\middle\vert -\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}$				

注：零點分段法：通常適用於含有兩個及兩個以上的絕對值符號的不等式。

解法二分析：利用幾何意義，不等式$|x+2|+|x-1|<4$的幾何意義是表示數軸上與點$A(-2)$及點$B(1)$)兩點距離之和小於 4 的點，而AB兩點的距離為 3，因此只要找到與兩點的距離之和為 4 的點,即可。

	$\lvert x+2\rvert=0$	$\lvert x-1\rvert=0$
即	$x=-2$	$x=1$
把數軸分為三段即		
意即	把 B 點向右移$\frac{1}{2}$個單位，這時距離之和增加 1 個單位，即$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$； 把 A 點向左移$\frac{1}{2}$個單位，這時距離之和增加 1 個單位，即 $-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$	
答案	$\left\{x\middle\vert -\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}$	

三、鞏固練習：解不等式$|x-1|+|x-5|<7$

四、課堂小結：兩個及兩個以上的絕對值符號的不等式的解法。

五、家課：

(1) $|x+3|+|x-1|<1$

(2)對於任意$x\in R$，不等式$|x+1|+|x+2|\ge m$恒成立，求m的取值範圍。

1.5.1 一元二次不等式的解法

教學目標：1.進一步熟練掌握解一元一次不等式的解法；
2.利用一元一次不等式解決簡單的實際問題。
教學重點：一元一次不等式的應用。
教學難點：將實際問題抽象成數學問題的思維過程。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

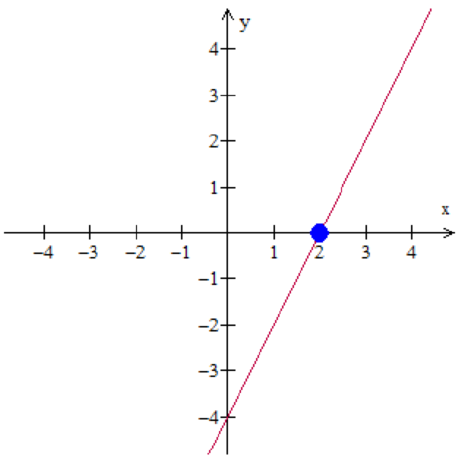
一、溫習舊知識：

$2x+6=1$	$3y-2>1$	$2x^2+3x=2$	$2x^2+3x<2$
一元一次方程式	一元一次不等式	一元二次方程式	?

答：一元二次不等式

問題 1：初中時我們學習過一次函數與一元一次不等式，它們有甚麼關係？

(1) 畫出 $y=2x-4$ 的圖像。
(2) 解方程 $2x-4=0$
(3) 解不等式 $2x-4>0$
(4) 解不等式 $2x-4<0$



x	0	2
y	-4	0

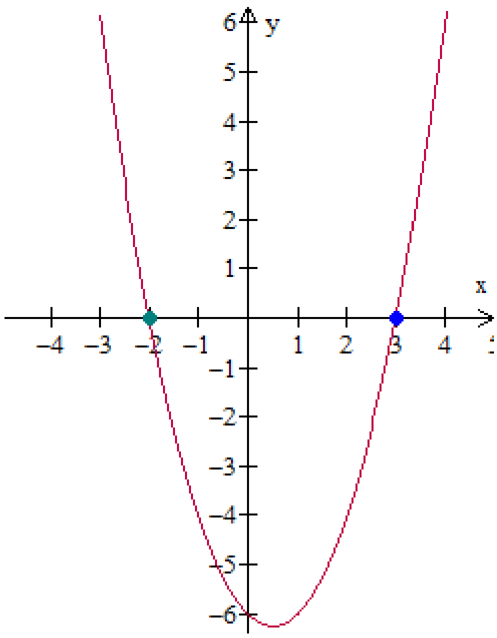
解：
(1)結合圖像
(2)發現 $x=2$ 實為函數 $y=2x-4$ 與 x 軸之交點的橫座標
(3)發現 $x>2$ 實為函數 $y=2x-4$ 與 x 軸之交點的上半部份
(4)發現 $x<2$ 實為函數 $y=2x-4$ 與 x 軸之交點的下半部份

注：解以上不等式的步驟可理解為
1.求對應函數與 x 軸的交點
2.畫對應函數出圖像

$y>0$	取對應函數與 x 軸之交點的上半部份
$y<0$	取對應函數與 x 軸之交點的下半部份

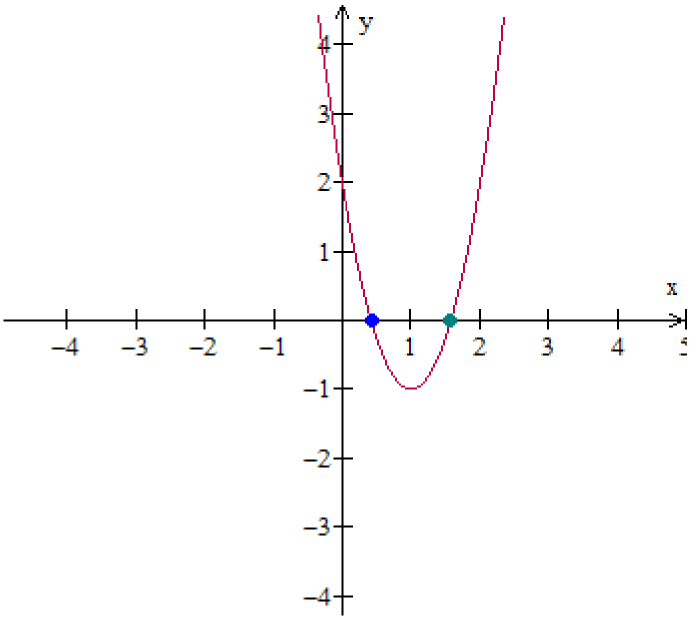
二、教授新課：

問題 2：按以上步驟解一元二次不等式 $x^2 - x - 6 > 0$

1.求對應函數與 x 軸的交點	解：$x^2 - x - 6 = 0$ $(x+2)(x-3) = 0$ $x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$
2.畫對應函數出圖像	
3. $y > 0$，取對應函數與 x 軸之交點的上半部份	$x < -2$或> 3 $\therefore \{x \mid x < -2$或$x > 3\}$

問題 3：按以上步驟解一元二次不等式 $-3x^2 + 6x > 2$

1.求對應函數與 x 軸的交點	解：整理得 $3x^2 - 6x + 2 < 0$ $3x^2 - 6x + 2 = 0$ $x_1 = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad x_2 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2.畫對應函數出圖像	
$y<0$，取對應函數與 x 軸之交點的上下半部份	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\therefore \left\{x \middle\| 1-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

注：1.與絕對值不等式一樣：小於取中間，大於取兩邊。

2.必需整理成二次項系數為正。

3.解題時可不畫圖。

三、例題：

例題 1：課本 ***P*22**，練習 **2**，x 是什麼數時，函數 $y=x^2-4x+1$ 的值：

(1)等於 0	**(2)**是正數	**(3)**是負數
解：$x^2-4x+1=0$ $x_1=2-\sqrt{3}$ 或 $x_2=2+\sqrt{3}$	解：$x^2-4x+1>0$ $\therefore \left\{x \middle\| x<2-\sqrt{3} \text{ 或 } x>2+\sqrt{3}\right\}$	解：$x^2-4x+1<0$ $\therefore \left\{x \middle\| 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}\right\}$

四、鞏固練習：

課本 ***P*22**，練習 **1.(1)**，**(2)**。

五、課堂小結：

解一元二次不等式時：

(1)先求對應方程的解(若有解)。

(2)再小於取中間，大於取兩邊。

六、家課：

課本 ***P*****22** ，練習 **3** 。

課本 ***P*****24** ，習題**1.5.3** 。

1.5.2 一元二次不等式的解法

教學目標：1.掌握用二次函數的圖像解一元二次不等式；
2.了解一元二次不等式、一元二次和二次函數之間聯繫，體會數形結合、化歸的數學思想。形成利用球與特殊的關宗決數學問題的能力。

教學重點：一元二次不等式的解法。

教學難點：利用二次函數的圖像解一元二次不等式。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

(1)解 $x^2-5x+6<0$

要求學生演說步驟

(2)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中，根的判別式 $\Delta=b^2-4ac$

當 $\Delta>0$，方程有兩個不相等的實根；
當 $\Delta=0$，方程有兩個相等的實根；
當 $\Delta<0$，方程無實根。

二、情景引入：

問題 1：於上題中 $x^2-5x+6=0$ 有解，所以我們已經學會如何解題，但如果方程無解時，我們應怎辦呢?

例如：解不等式 $x^2+x+2>0$

$\Delta=b^2-4ac=1-8=-7<0$

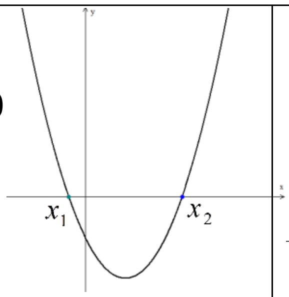
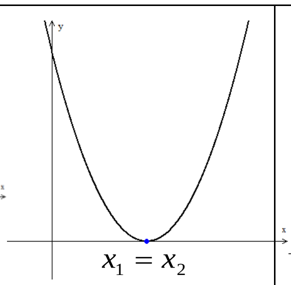
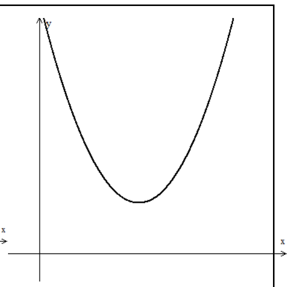
原方程無解。

上一節課，學習了方程的解即是對應的函數與 x 軸的交點，師生共同討論後，完成下表：

一元二次不等式

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集如下表。

判別式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

二次函數的 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 圖像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根			
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集			
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集			

三、例題

例題 1：解不等式 $x^2+x+2>0$

解：$\Delta=b^2-4ac=1-8=-7<0$

方程無實數解

$\therefore R$

例題 2：解不等式 $4x^2-4x+1>0$

解：$\Delta=b^2-4ac=0$

方程的解是 $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \left\{x \middle| x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$

例題 3：解不等式 $-x^2+2x-3>0$

解：整理得 $x^2-2x+3<0$

$\Delta<0$

方程無實數解

$\therefore \phi$

四、鞏固練習：

課本 ***P*22** ，練習**1.(3)** ，**(4)**。

五、課堂小結：

解一元二次不等式的步驟是？

六、家課：

課本 ***P*24** ，習題**1.5** ，**1** 。

1.5.A 集合與解含絶對值、一元二次不等式複習課

教學目標：重溫集合、解含絶對值不等式、解一元二次不等式。
教學重點：熟練集合、解含絶對值不等式、解一元二次不等式的解法。
教學難點：集合之間的運算。
授課類型：練習課。
教學過程：

一、填充題

1、-5___________N

2、ϕ_______ $\{9,10,12\}$

3、$\{1,2,3,4,5,6\}$_______ $\{1,3\}$

4、0___________$\mathbf{N}^*$

5、$\sqrt{\sqrt{16}}$ ___________ C_RQ

6、$C_R(C_RZ)=$______________

7、設 A={1，2，3} ，B={4，5，6}，則 A∩B=___________

8、 -3________ $\{x \mid x^2+6x+5=0\}$

9、不等式$x^2+2x+1>0$的解集是__________________

二、解下列不等式：

(1) $|x-5| \le 7$

(2) $|4x+1| \ge 2x$

(3) $3x^2-7x+2<0$

(4) $-6x^2-x+2 \le 0$

(5) $\dfrac{3x+2}{x-6}<0$

(6) $\dfrac{-x-2}{x+3}<0$

三、用列舉法表示下列集合，並於括號內指出它們是有限集或無限集：

(1) $\{x|x^2-9=0\}$

______________________(________________)

(2) 由小於 10 的所有正整數組成的集合

______________________(________________)

四、寫出{5，6，7}的子集及真子集

五、1、已知$U=\{x\,|\,0<x\leq 10, x\in N\}$，集合 $A=\{1,2,4,5,9\}$， $B=\{4,6,7,8,10\}$，$C=\{3,5,7\}$

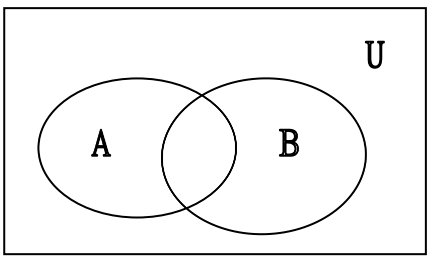
求(1) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$　(2) $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$　(3) $\mathrm{C_U B}$　(4) $\mathrm{C_U A}$　(5) $\mathrm{C_U}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$　(6) $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cap C$　(7) $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\cup C$

2、已知全集$U=R$，設集合 $A=\{x\,|-2<x\leq 5\}$， $B=\{x\,|\,x\leq -4 或 x\geq 3\}$

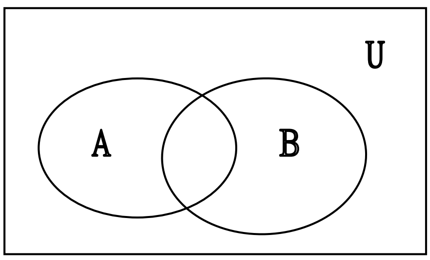
求(1) $\mathrm{C_U A}$　(2) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$　(3) $\mathrm{C_U}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$　(4). $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$

六、圖中 U 是全集，A，B，C 是 U 的兩個子集，用陰影表示：

(1) $(\mathrm{C_U}A)\cap(C_U B)$



(2) $(\mathrm{C_U}A)\cup(C_U B)$



1.6.1 邏輯聯結詞

教學目標：要求學生了解複合命題的意義，並能指出一個複合命題是有哪些簡單命題與邏輯聯結詞，並能由簡單命題構成含有邏輯聯結詞的複合命題。
教學重點：“或”、“且”、“非”的含義。
教學難點：用“或”、“且”、“非”表達關係。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：
問題 1：小明到茶餐廳點餐，跟侍應這樣說“一碗餐蛋面，粗面或幼面，總之不要公仔面。”
小明這句說話應用了哪些聯結詞？

或	粗面或幼面
且	午餐肉且雞蛋
非	不要公仔面

問題 2：初中時學過命題，可以判斷真假的語句叫做命題。以下如是命題的判斷是真命題還是假命題，如不是命題說出原因：經師生共同討論得出以下答案

(1) $12>5$	真命題
(2) 3是12的約數	真命題
(3) 0.5是的整數	假命題
(4) 3是12的約數嗎？	不涉及真假
(5) $x>5$	不能判斷真假
(6) 10可以被2或5整除	真命題
(7) 菱形的對角線互相垂直且平分	真命題
(8) 0.5非整數	真命題

以上哪幾題是比較杂的命？它應用了“或”、“且”、“非”的？
(6)或，**(7)**且，**(8)**非。
問題 3：以下不等式的解哪些用了“或”、“且”、“非”的聯結詞？

不等式	解集	聯結詞
$x^2-x-6>0$	$\{x\mid x<-2\text{或}x>3\}$	或
$x^2-x-6<0$	$\{x\mid -2<x<3\}$	且

邏輯聯結詞：“或”、“且”、“非”這些邏輯聯結詞。
複合命題：像以上**(6)**,**(7)**和**(8)**這樣的命題,它們由簡單命題與邏輯聯結詞構成，

是**複**合命題。**(6)**，**(7)**和**(8)**

我們常用小寫字母 p ，q ，r ，s ，…表示命題，以上**(6)**，**(7)**和**(8)**的構成形式分別是：

p 或 q

p 且 q

非 p

二、列題：

例題 1：分別指出下列複合命題的形式及構成它的簡單命題：

(1) 24 既是 8 的倍數，也是 6 的倍數

(2)李强是籃球運動員或跳高運動員

(3)平行線不相交

解：**(1)** p 且 q ，其中

p ：24 是 8 的倍數

q ：24 是 6 的倍數

(2) p 或 q ，其中

p ：李强是籃球運動員

q ：李强是跳高運動員

(3) 非 p ，其中

p ：平行線相交

平行線不相交為真，則平行線相交必為假。可見：

非 p 形式的複合命題：當 p 為真時，非 p 為假；當 p 為假時，非 p 為真。

填表：

p	非 p
真	
假	

答案：

p	非 p
真	假
假	真

24 是 8 的倍數為真，24 是 6 的倍數為真，24 是 5 的倍數為假。所以 24 既是 8 的倍數，也是 6 的倍數為真。但 24 既是 8 的倍數，也是 5 的倍數為假。可見：

p 且 q 形式的複合命題：當 p ，q 都為真時，p 且 q 為真；當 p ，q 至少有一個為假時，p 且 q 為假。

填表：

p	q	p 且 q
真	真	
真	假	
假	真	
假	假	

答案：

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

24是8的倍數為真，24是5的倍數為真，24是11的倍數為假。所以24是8或5的倍數為真。所以24是5或11的倍數為假。

p或q形式的複合命題：當p，q至少有一個為真時，p或q為真；當p，q都為假時，p或q為假。可見：

填表：

p	q	p或q
真	真	
真	假	
假	真	
假	假	

答案：

p	q	p或q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

p或q：一真為真，全假為假
p且q：全真為真，一假為假
非p： 真假相反

例題 2：分別指出由下列各組命題構成的"p或q"，"p且q"，"非p"的形式的複合命題的真假：

(1) p： $2+2=5$	q： $3>2$
(2) p： 9是質數	q：8是12的約數
(3) p： $1\in\{1,2\}$	q：$\{1\}\subset\{1,2\}$
(4) p： $\phi\subset\{0\}$	q：$\phi=\{0\}$

師生共同討論後填寫下表：
解：

(1)因為p為______，p為______，所以

"p或q"為______，p且q"為______，"非p"為______。

(2)因為p為______，p為______，所以

"p或q"為______，p且q"為______，"非p"為______。

(3)因為p為______，p為______，所以

"p或q"為______，p且q"為______，"非p"為______。

(4)因為p為______，p為______，所以

"p或q"為______，p且q"為______，"非p"為______。

例題 3：
判斷下列命題的真假：

(1) $2 \le 3$

(2) $2 \ge 2$

(3) $5 \le 4$

解：

(1) $p: 2 < 3$	真	$q: 2 = 3$	假	p 或 q	真
(2) $p: 2 > 2$	假	$q: 2 = 2$	真	p 或 q	真
(3) $p: 5 < 4$	假	$q: 5 = 4$	假	p 或 q	假

三、鞏固練習：

不等式$3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 > 0$的解用了哪種邏輯聯結詞？

解：$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

方程的解是$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \left\{ x \middle| x \ne \dfrac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

用了非。

四、課堂小結：

本節課我們學習了甚麼？

五、家課：

課本 ***P*31**，習題**1.6** ，**1** ，**2** ，**4** 。

1.7.1 四種命題

教學目標：1.了解命題的逆命題、否命題和逆否命題的含義，能寫出給定命題的逆命題、否命題、逆否命題；
2.會分析四種命題之間的相互關係；
3.會利用互為逆命題的兩個命題之間的關係判別命題的真假。

教學重點：了解命題的逆命題、否命題和逆否命的含義，能寫出給定命題的逆命題、否命題、逆否命題。

教學難點：會分析四種命題之間的相互關係。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、情景引入：

(1)同位角相等，兩直線平行；

(2)兩直線平行，同位角相等；

以上兩命題有什麼關係？

(1)與**(2)**的條件與結論互換

在兩個命題中，如果第一個命題的條件(或題設)是第二個命題的結論，且第一個命題的結論是第二個命題旳條件，那麼這兩個命題叫做**互逆命題**，如果把其中一個命題叫做**原命題**，那麼另一個叫做原命題的**逆命題**。

再看

(3)同位角不相等，兩直線不平行；

(4)兩直線不平行，同位角不相等；

(1)與**(3)**中，一個命題的條件和結論分別是另一個命題的條件的否定和結論的否定，這樣的兩個命題叫做**互否命題**。把其中一個命題叫做原命題，那麼另一個叫做原命題的**否命題**

(1)與**(4)**中，一個命題的條件和結論分別是另一個命題的結論的否定和條件的否定，這樣的兩個命題叫做**互為逆否命題**。把其中一個命題叫做原命題，那麼另一個叫做原命題的**逆否命題**

設為**(1)**原命題，那麼：**(2)**為逆命題，**(3)**為否命題，**(4)**為逆否命題。

用 p 和 q 分別表示原命題的條件和結論，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分別表示 p 和 q 的否定，於是四種命題的形式就是：

填表：

原命題	

答案：

原命題	若 p 則 q

逆命題	
否命題	
逆否命題	

逆命題	若 q 則 p
否命題	若 $\neg p$ 則 $\neg q$
逆否命題	若 $\neg q$ 則 $\neg p$

二、例題：

例題 1：把下列命題改寫成“若 p 則 q”的形式，並寫出它們的逆命題、否命題與逆否命題，並分別判斷它們的真假：

(1)負數的平方是正數

(2)正方形的四條邊相等

解：**(1)**

原命題	若一個數是負數，則它的平方是正數。	真
逆命題	若一個數的平方是正數，則它是負數。	假
否命題	若一個數不是負數，則它的平方不是正數。	假
逆否命題	若一個數的平方不是正數，則它不是負數。	真

(2)

原命題	若一個四邊形是正方形，則它的四條邊相等。	真
逆命題	若一個四邊形的四條邊相等，則它是正方形。	假
否命題	若一個四邊形不是正方形，則它的四條邊不相等。	假
逆否命題	若一個四邊形的四條邊不相等，則它不是正方形。	真

看完以上例題我已經知道，一般地一個命題真假與其他三個命題的真假有以下三條關係。

1. **原命題為真，它的逆命題不一定為真。**
2. **原命題為真，它的否命題不一定為真。**
3. **原命題為真，它的逆否命題一定為真。**

例題 2：設原命題是“當 $c>0$ 時，若 $a>b$，則 $ac>bc$”寫出它們的逆命題、否命題與逆否命題，並分別判斷它們的真假：

解：

逆命題	當 $c>0$ 時，若 $ac>bc$，則 $a>b$	真
否命題	當 $c>0$ 時，若 $a\le b$，則 $ac\le bc$	真
逆否命題	當 $c>0$ 時，若 $ac\le bc$，則 $a\le b$	真

注：互為逆否的兩個命題一定同為真或同為假

三、鞏固練習：

課本 ***P*33**，練習 **2**。

課本 ***P*35**，練習 **2**。

四、課堂小結：

原命題、逆命題、否命題與逆否命題。

思考大於，一定是，且，都是，都不是，至少有一個，至多有一個的否定形式是什麼？

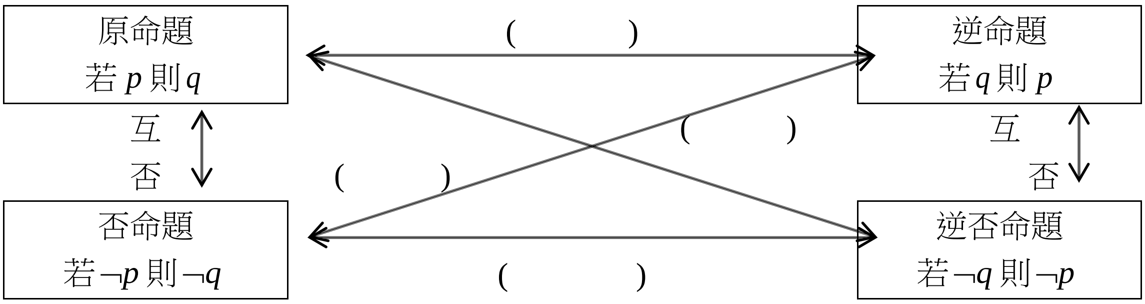
五、家課：

課本 ***P*36** ，習題**1.7** ，**1** ，**2** ，**4** 。

1.7.2 四種命題

教學目標：1.初步掌握反證法的概念及反證法證題的基本步驟；
2.通過四種命題之間關係的學習，培養學生邏輯推理能力；
3.培養學生用反證法簡單推理的技能，從而發展學生的思維能力。
教學重點：四種命題之間的關係。
教學難點：反證法的運用。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
上一節課我們學習了什麼？
學生答：原命題、逆命題、否命題與逆否命題。
它們有什麼關係？



原命題與它的逆否命題是同真或同假的
等價命題：對於 A 與 B 來說，如果有 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，那麼命題 A 、 B 叫做等價命題。原命題與其逆否命題就是等價命題。(“$\Rightarrow$”推出符號)

二、情景引入：
反證法：從命題結論的反面出發，引出矛盾，從而證明命題成立。
反證法證明的步驟一般有：
(1)假設命題的結論不成立，即假設結論的反面成立。
(2)從這個假設出發，通過推理論證，得出矛盾。
(3)由矛盾判定假設不正确。

三、例題：

例題 1：用反證法證明：如果 $a > b > 0$，那麼 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

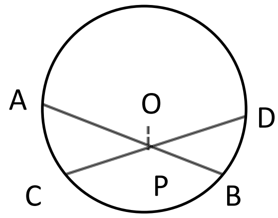
證明：**(1)**假設 $\sqrt{a}$ 不大於 $\sqrt{b}$ ， 則 $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

(2)因為 $a>0$ ，$b>0$ ，

所以 $\sqrt{a}\le\sqrt{b}\Rightarrow\sqrt{a}\sqrt{a}\le\sqrt{b}\sqrt{b}$ ，即 $a\le b$

(3)與已知 $a>b>0$ 矛盾，所以 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$ 。

例題 2：用反證法證明：圓的兩條不是直徑的相交弦不能互相平分。
已知：如右圖，在圓 O 中，弦 AB 、CD 交於 P ，且 AB 、CD 不是直徑
求證：弦 AB 、CD 都不被 P 平分。
分析：假設弦 AB 、CD 都被 P 平分，連結 OP 後，可推出 AB 、CD 都與 OP 垂直，則出現矛盾
證明：假設弦 AB 、CD 都被 P 平分，由於 P 點一定不是圓心 O ，連結 OP ，根據垂徑定理的推論，
有 $OP\perp AB$ ，$OP\perp CD$ ，
即過點 P 有兩條直線與 OP 都垂直，這與垂線性質矛盾。
所以，弦 AB 、CD 都不被 P 平分。



四、鞏固練習：
　　課本 ***P*36** ，練習**1** 。

五、課堂小結：
　　原命題、逆命題、否命題與逆否命題。
　　思考大於，一定是，且，都是，都不是，至少有一個，至多有一個的否定形式是什麼？

六、家課：
　　課本 ***P*36** ，練習 **2** 。
　　課本 ***P*36** ，習題**1.7** ，**3** ，**5** 。

1.8.1 充分條件與必要條件

教學目標：1.會判斷“若 p 則 q”句式的真假；
2.通過對充分條件、必要條件的概念的理解和運同，培養學生分析，判斷和歸納的邏輯思維能加。

教學重點：充分條件、必要條件的概念。

教學難點：判斷命題的充分條件、必要條件。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

問題 1：魚非常需要水，沒有了水，魚就無法生存，但只有水，夠嗎?

探究：	p :“有水”	q :“魚能生存”
判斷：	“若 p 則 q”和“若 q 則 p”的真假	

問題 2：

判斷以下命題是真命題還是假命題。

(1)若 $x>0$ ，則 $x^2>0$	真
(2)若 $x^2>0$ ，則 $x>0$	假
(3)若兩三角形全等，則兩三角形的面積相等	真
(4)若兩三角形的面積相等，則兩三角形全等	假

上一節課我們學習“若 p 則 q”形式的命題，其中有些為真，有些為假？也就是說

若 p 則 q 為真，即 p 成立，那麼 q 一定成立，記作 $p \Rightarrow q$ （$q \Leftarrow p$），讀作 p 推出 q 。

若 p 則 q 為假，即 p 成立，q 不一定成立，記作 $p \not\Rightarrow q$ （$q \not\Leftarrow p$），讀作 p 推不出 q 。

題**(1)**中， $x>0 \Rightarrow x^2>0$

題**(2)**中， $x^2>0 \not\Rightarrow x>0$

定義：命題“若 $\boldsymbol{p}$ 則 $\boldsymbol{q}$”為真命題，即 $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ ，就說 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{q}$ 的**充分條件**； $\boldsymbol{q}$ 是 $\boldsymbol{p}$ 的**必要條件**。

例如題**(1)**， $x>0$ 是 $x^2>0$ 的充分條件， $x^2>0$ 是 $x>0$ 的必要條件。

例如題**(2)**，“兩三角形全等”是“兩三角形的面積相等”的充分條件，“兩三角形的

面積相等”是“兩三角形全等”的必要條件。

二、例題：

例題 1：指出下列各組命題中，p 是 q 的什麼條件，q 是 p 的什麼條件：

(1) $\boldsymbol{p}$**:** $\boldsymbol{x = y}$	$\boldsymbol{q}$**:** $\boldsymbol{x^2 = y^2}$
(2) $\boldsymbol{p}$**:**三角形的三條邊相等	$\boldsymbol{q}$**:**三角形的三個角相等

分析：可以根據“若 p 則 q ”與“若 q 則 p ”的真假進行判斷。

解：**(1)**由 $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ ，即 $\boldsymbol{x = y \Rightarrow x^2 = y^2}$

知 p 是 q 的充分條件，q 是 p 的必要條件。

(2) 由 $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ ，即三角形的三條邊相等$\Rightarrow$三角形的三個角相等

知 p 是 q 的充分條件，q 是 p 的必要條件；

反過來，由 $\boldsymbol{q \Rightarrow p}$ ，即三角形的三個角相等$\Rightarrow$三角形的三條邊相等

知 q 是 p 的充分條件， p 是 q 的必要條件。

三、鞏固練習：

課本 ***P*38** ，練習**1** 。

四、課堂小結：

什麼是充分條件？什麼是必要條件？

五、家課：

課本 ***P*36** ，習題**1.8** ，**3** 。

1.8.2 充分條件與必要條件

教學目標：1.會判斷題題的充分條件、必要條件；
2.通過對充分條件、必要條件的概念的理解和運同，培養學生分析，判斷和歸納的邏輯思維能加。
教學重點：充分條件、必要條件的概念。
教學難點：判斷命題的充分條件、必要條件。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：
在日常生活中，我們做事情需要具備一定的條件，有的條件能够保證我們完成這件事，而有的條件虽然不能保證完成這件事，但卻是完成它所必不可少的。
例如(1)：用 20 元錢買一本 19.80 元的書，那麼就書價而言，“20 元錢”就是“買一本 19.80 元的書”的充足的條件，即“充分條件”；
例如(2)：用水將生米煮成熟飯，那麼“水”就是“生米煮成熟飯”的必不可少的條件，即“必要條件”。

在數學中，若要得出一個結論，同樣需要具備一定的條件。
關於“ p 是 q 的**充分條件**”的理解是容易的，即為了使 q 成立，具備 p 條件就足够，“有它即可”。
關於“q 是 p 的**必要條件**”的理解，如果從“若 p ，則 q 的等價命題”“若不是 q ，則不是 p ”來看，則更易理解，即若沒有條件 q ，則事件 p 不能成立，因此對於 p 來說，條件 p 是必定需要的，“非它不行”。

二、例題：
例題 1：下列“若 p ，則 q ”形式的命題中，那些命題中的 p 是 q 的充分條件？
(1)若 $x=1$ ，則 $x^2-4x+3=0$ ；
(2)若 $f(x)=x$ ，則 $f(x)$ 為增函數；
(3)若 x 為無理數，則 x^2 為無理數。
解：(1)是(2)是(3)不是。
例題 2：
1. “a 和 b 都是偶數”是“a+b 也是偶數”的_____條件；
2. “四邊相等”是“四邊形是正方形”的______條件；
3. “$x\neq 3$”是“$|x|\neq 3$”的______條件；
4. “x-1=0”是“x^2-1=0”的______條件；
5. “兩個角是對頂角”是“這兩個角相等”的______條件；

6. “至少有一組對應邊相等”是“兩個三角形全等”的______條件；
7. 於一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（其中 a,b,c 都不為 0）來說，“$b^2-4ac\geq$”是“這個方程有兩個正根”的______條件；
8. “a=2，b=3”是“a+b=”的______條件；
9. “a+b 是偶數”是“a 和 b 都是偶數”的_______條件；
10. “個位數字是 5 的自然數”是“這個自然數能被 5 整除”的______條件。

答案：

1. 充分 2. 必要 3.充分 4. 充分 5. 充分 6. 必要 7. 必要 8. 充分 9. 必要 10. 充分

三、鞏固練習：

課本 ***P*38** ，練習 **2** 。

四、課堂小結：

本節課我們學習了甚麼？

五、家課：

課本 ***P*44** ，習題**1.8** ，**3** 。

1.8.3 充分條件與必要條件

教學目標：1.掌握充分不必要條件、必要不充分條件的概念；
2.會判斷命題的充分不必要條件、必要不充分條件；
3.會利用命題的等價性判斷充分不必要條件、必要不充分條件。
教學重點：講清充分不必要條件、必要不充分條件的概念。
教學難點：判斷命題的充分不必要條件、必要不充分條件
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識
問題 1： $p:x$既是2的倍數也是3的倍數，
$q:x$是6的倍數
p是q的什麼條件？
由$p\Rightarrow q$及$q\Rightarrow p$可知p是q的充分條件，p是q的必要條件。

一般地，如果既有$p\Rightarrow q$，又有$q\Rightarrow p$，就記作$p\Leftrightarrow q$
這時，既是的充分條件，又是的必要條件，我們就說是的充分必要條件，簡稱充要條件。
如此類推，則
(1)若$p\Rightarrow q$，但$p\not\Leftarrow q$，則說p是q的________________________條件；
(2)若$p\not\Rightarrow q$，但$p\Leftarrow q$，則說p是q的________________________條件；
(3)若$p\not\Rightarrow q$，但$p\not\Leftarrow q$，則說p是q的________________________條件。

例如：
“x是6的倍數”是“x是2的倍數”的________________________條件；
“x是2的倍數”是“x是6的倍數”的________________________條件；
“x是4的倍數”是“x是6的倍數”的________________________條件。

二、例題：
例題 1：指出下列各組命題中，p是q的什麼條件(在“充分而不必要條件”、“必要而不充分條件”，“充要條件”、“既不充分也不必要條件”中選出一種)？

(1) $p:(x-2)(x-3)=0$	$q:x-2=0$
(2) $p:$同位角相等	$q:$兩直線平行
(3) $p:x=3$	$q:x^2=9$
(4) $p:$四邊形的對角線相等	$q:$四邊形是平行四邊形

解：(1) $x-2=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$

$(x-2)(x-3)=0 \not\Rightarrow x-2=0$

所以 p 是 q 必要而不充分條件

(2) 同位角相等 $\Leftrightarrow$ 兩直線平行

所以 p 是 q 的充分必要條件

(3) $x=3 \Rightarrow x^2=9$

$x^2=9 \not\Rightarrow x=3$

所以 p 是 q 的充分而不必要條件

(4) 四邊形的對角線相等 $\not\Rightarrow$ 四邊形是平行四邊形

四邊形是平行四邊形 $\not\Rightarrow$ 四邊形的對角線相等

所以 p 是 q 的既不充分也不必要條件

例題 2：指出下列各組命題中， $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{q}$ 的什麼條件？並說明理由。

(1) $p: \boldsymbol{a^2 > b^2}$	$q: \boldsymbol{a > b}$
(2) $p:$ $\{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x > -2}$ 或 $\boldsymbol{x < 3}\ \}$	$q: \{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x^2 - x - 6 < 0}\ \}$

解：(1)因為 $\boldsymbol{a^2 > b^2}$ 不能推出 $\boldsymbol{a > b}$ ，且 $\boldsymbol{a > b}$ 不能推出 $\boldsymbol{a^2 > b^2}$ ，所以 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{q}$ 的既不充分也不必要條件。

(2)因為 $\{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x > -2}$ 或 $\boldsymbol{x < 3}\ \}$ 不能推出 $\{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x^2 - x - 6 < 0}\ \}$ ，而 $\{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x^2 - x - 6 < 0}\ \} \Rightarrow \{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x > -2}$ 或 $\boldsymbol{x < 3}\ \}$ ，所以 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{q}$ 的必要非不充分條件。

三、鞏固練習：

(1)“$a>0$ ，$b>0$”是“$ab>0$”的什麼條件？	充分不必要條件
(2)“四邊形為平行四邊形”是“這個四邊形為菱形”的什麼條件？	必要不充分條件
(3)在 ΔABC 中，$\lvert BC\rvert=\lvert AC\rvert$ 是 $\angle A=\angle B$ 的什麼條件？	充要條件
(4)“$a^2>b^2$”是“$a>b$”的什麼條件？	充分不必要條件

課本 ***P*39** ，練習**1** ，**2** 。

四、課堂小結：

定義：

(1) 若 $p \Rightarrow q$ ，則 p 是 q 的充分條件。	p 可能會多餘浪費
(2) 若 $q \Rightarrow p$ ，則 p 是 q 的必要條件。	p 可能還不足以使 q 成立
(3) 若 $q \Rightarrow p$ ，則 p 是 q 的充分必要條件。	p 不多不少，恰到好處

五、家課：

課本 ***P*44** ，習題**1.8** ，**1** ，**2** 。

1.9.A 集合與簡易邏輯複習課

教學目標：重溫集合與簡易邏輯。
教學重點：了解集合與簡易邏輯的概念。
教學難點：會運用集合與簡易邏輯的概念解決問題。
授課類型：練習課。
教學過程：

一、選擇題：

1.已知集合 M＝{0,1,2}，N＝{x|x＝2a，a∈M}，則集合 M∩N 等於( )

A．{0}　　B．{0,1}　　C．{1,2}　　D．{0,2}

解析 D 集合 N＝{0,2,4}，所以 M∩N＝{0,2}。

2．一個命題與它的逆命題、否命題、逆否命題這四個命題中( )

A．真命題與假命題的個數相同

B．真命題的個數一定是奇數

C．真命題的個數一定是偶數

D．真命題的個數可能是奇數，也可能是偶數

解析 C 在原命題、逆命題、否命題、逆否命題這四個命題中，互為逆否的命題是成對出現的，故真命題的個數和假命題的個數都是偶數。

3．已知 A 是△ABC 的內角，則“sin A＝2”是“tan A＝3”的 ( )

A．充分不必要條件　　B．必要不充分條件
C．充分必要條件　　D．既不充分也不必要條件

解析 B 由 sin A＝2 且 A 是△ABC 的內角，可得 A＝60°或 A＝120°，此時，

tan A＝3 未必成立，但反之成立。

4．已知命題 p：任意的 x∈R,2x2＋2x＋2<0；命題 q：存在 x∈R，sin x－cos x＝2.則下列判斷正確的是( )

A．p 是真命題　B．q 是假命題　C．非 p 是假命題　D．非 q 是假命題

解析 D 在命題 p 中，當 x＝－2 時，2x2＋2x＋2＝0，故為假命題；在命題

3πq 中，當 x＝4 非 q 是假命題。

5．設集合 A＝{1,2}，則滿足 A∪B＝{1,2，3}的集合 B 的個數是( )

A．1　B．3　C．4　D．8

解析 C 滿足條件的集合 B 可為{3}，{1,3}，{2,3}，{1,2,3}，共 4 個。

6．若集合 A＝{0，m，2}，B＝{1,2}，則“m＝1”是“A∪B＝{0，1，2}”的( )

A．充要條件　B．充分不必要條件
C．必要不充分條件　D．既不充分也不必要條件

解析 B 由 m＝1 可得集合 A＝{0,1}，所以 A∪B＝{0,1,2}；反之，若已知 A∪B＝{0,1,2}，則實數 m 也可取－1 或 2，故選 B。

7．命題“若$\boldsymbol{a^2+b^2=0}$，a，b∈R，則 a＝b＝0”的逆否命題是

A．若 a≠b≠0，a，b∈R，則$\boldsymbol{a^2+b^2=0}$

B．若 a＝b≠0，a，b∈R，則$\boldsymbol{a^2+b^2\neq 0}$

C．若 a≠0 且 b≠0，a，b∈R，則$\boldsymbol{a^2+b^2\neq 0}$

D．若 a≠0 或 b≠0，a，b∈R，則$\boldsymbol{a^2+b^2\neq 0}$

解析 D a＝b＝0 的否定為 a≠0 或 b≠0，a，b∈R；$\boldsymbol{a^2+b^2=0}$，a，b∈R 的否定為$\boldsymbol{a^2+b^2\neq 0}$，故選 D。

8・已知命題 p：任意的 x∈R，x>sin x，則 p 的否定形式為（ ）

A・非 p：存在 x∈R，x<=sin x

B・非 p：任意 x∈R，x≤sin x

C・非 p：存在 x∈R，x≤sin x

D・非 p：任意 x∈R，x<= sin x

解析 C 由於命題 p 為全稱命題，所以其否定形式為存在 x∈R，x≤sin x.

9・有金盒、銀盒、鉛盒各一個，只有一個盒子裡有肖像・金盒上寫有命題 p：肖像在這個盒子裡；銀盒上寫有命題 q：肖像不在這個盒子裡；鉛盒上寫有命題 r：肖像不在金盒裡。p、q、r 中有且只有一個是真命題，則肖像在( )

A・金盒裡　　B・銀盒裡　　C・鉛盒裡　　D・不能確定

解析 B ∵p⇔非 r，∴p 與 r 一真一假。

而 p、q、r 中有且只有一個真命題，∴q 必為假命題。

∴"非 q：肖像在這個盒子裡"為真命題，即肖像在銀盒裡。

二、填空題

1・命題"若 a≥b，則 a3≥b3"的逆命題是_______________。

解析 由逆命題的定義形式直接寫出。

答案：若 a3≥b3，則 a≥b

2・已知全集 U 為實數集，A＝{x|x2－2x<0}，B＝{x|x≥1}，則 A∩∁UB＝________.

解析 $A=\{x|0<x<2\}$，∁ub＝$\{x|x<1\}$，所以 a∩∁ub＝$\{x|0<x<1\}$，∁ub＝$\{x|x<1\}$，所以 a∩∁ub＝$\{x|0<x<1\}$。

答案：$\{x|0<x<1\}$

3．“x＝3”是“x2＝9”的________條件。

解析 若 x＝3，則 x2＝9，反之，若 x2＝9, 則 x＝±3，故答案：為充分不必要條件．

4．已知命題 p：∃x∈R，使 tan x＝1；命題 q：x2－3x＋2<0 的解集是$\{x|1<x<2\}$，下列結論：①命題“p∧q”是真命題；②命題“p∧(非 q)”是假命題；③命題“(非 p)∨q”是真命題；④命題“(非 p)∨(非 q)”是假命題。其中正確的是________ 。
下列結論：①命題“p∧q”是真命題；②命題“p∧(綈 q)”是假命題；③命題“(綈 p)∨q”是真命題；④命題“(綈 p)∨(綈 q)”是假命題．其中正確的是________ 。
解析 命題 p：∃x∈R，使 tan x＝1 正確，命題 q：x2－3x＋2<0 的解集是$\{x|1<x<2\}$也正確，∴①命題“p∧q”是真命題；②命題“p∧(非 q)”是假命題；③命題“(非 p)∨q”是真命題；④命題“(非 p)∨(非 q)”是假命題，也正確。
∴①命題“p∧q”是真命題；②命題“p∧(非 q)”是假命題；③命題“(非 p)∨q”是真命題；④命題“(非 p)∨(非 q)”是假命題。
答案：①②③④

三、解答題

1．已知集合 A＝{x|x2－5x＋6＝0}，B＝{x|mx＋1＝0}，且 A∪B＝A，求實數 m 的值組成的集合。

解析 A＝{x|x2－5x＋6＝0}＝{2,3}，

∵A∪B＝A，∴B⊆A.

①當 m＝0 時，B＝∅，B⊆A，故 m＝0；

②當 m≠0 時，由 mx＋1＝0，得 x＝－m.

∵B⊆A，∴－mA，

∴－m=2 或－m=3，

得 m=－2 或 m=－3

2．已知兩個命題 r(x)：sin x＋cos x＞m；s(x)：x2＋mx＋1＞0.如果任意的 x∈R，r(x)與 s(x)有且僅有一個是真命題，求實數 m 的取值範圍。

π 解析 ∵sin x＋cos x＝2sin x＋4 ≥2，

∴當 r(x)是真命題時，m＜－2.

又∵任意的 x∈R，s(x)為真命題，

即 x2＋mx＋1＞0 恒成立，

有 Δ＝m2－4＜0，

∴－2＜m＜2.

∴當 r(x)為真，s(x)為假時，

m＜－2，同時 m≤－2 或 m≥2，

即 m≤－2；

當 r(x)為假，s(x)為真時， m≥－2 且－2＜m＜2， 2≤m＜2

綜上所述，實數 m 的取值範圍是 {m|m≤－2 或－2≤m＜2}。

第二章、函 數

2.1.1 函數

教學目標：1.理解函數的定義；明確決定函數的三大要素：定義域、值域、和對應法則；

2.能够正確理解和使用“區間”、“無窮大”等記號；

教學重點：理解函數的概念，函數的三要素及其求法。

教學難點：函數的概念，簡單的分段函數及複合函數。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、情景引入：

問題 1：

初中時我們已學習了正比例函數、反比例函數、一次函數和二次函數

下列屬於哪一類型的函數：

(1) $y=2x^2+5$	二次函數
(2) $y=\dfrac{6}{x}$	反比例函數
(3) $y=2x+3$	一次函數
(4) $y=8x$	正比例函數

問題 2：初中學習了函數的概念，它是怎樣說的？

在一個變化過程中有兩個變量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$，如果對於 $\boldsymbol{x}$ 的每一個值，$\boldsymbol{y}$ 都有唯一的值與對應，那麼就說 $\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的函數，$\boldsymbol{x}$ 叫做自變量。

1.函數的有關概念

設 A，B 是非空的數集，如果按某個確定的對應關係 $\boldsymbol{f}$，使對於集合 A 中的任意一個 $\boldsymbol{x}$，在集合 B 中都有唯一確定的數 $\boldsymbol{f(x)}$ 和它對應，那麼就稱 $\boldsymbol{f:A\to B}$ 為從集合 A 到集合 B 的**函數**，記作

$$\boldsymbol{y=f(x)},\quad \boldsymbol{x\in A}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 叫**自變量**，$\boldsymbol{x}$ 的取值範圍 A 叫做函數 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 的**定義域**；與 $\boldsymbol{x}$ 的值相對應的 $\boldsymbol{y}$ 的值叫做函數值，函數值的集合 $\boldsymbol{\{f(x)\mid x\in A\}}$ 叫做函數的**值域.**。

一般地，函數的定義域是由問題的實際背景所確定的。如果只給出函數的解析式 $\boldsymbol{y=f(x)}$，而沒有指明它的定義，那麼函數的定義域就是指能使這個式子有意義的實數 $\boldsymbol{x}$ 的集合。

2.函數的三要素：

對應法則 f 、定義域 A 、值域 $\{f(x) \mid x \in A\}$

問題 3：填下表：

	定義域	值域
一次函數 $f(x)=ax+b(a \neq 0)$	R	R
反比例函數 $f(x)=\dfrac{k}{x}(k \neq)$		
二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$		

答案：

	定義域	值域
一次函數 $f(x)=ax+b(a \neq 0)$	R	R
反比例函數 $f(x)=\dfrac{k}{x}(k \neq)$	$A=\{x \mid x \neq 0\}$	$B=\{y \mid y \neq 0\}$
二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$	R	當 $a>0$ 時，$B=\left\{y \mid y \geq \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$
		當 $a<0$ 時，$B=\left\{y \mid y \leq \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$

函數除用符號 $f(x)$ 表示外，還常 $g(x)$ ，$F(x)$ ，$G(x)$ 等符號表示。研究函數常常用區間的概念。

3.區間的概念和記號

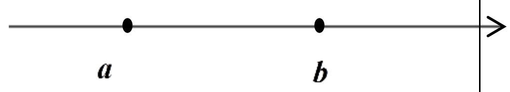
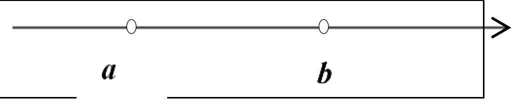
設 a ，b 是兩個實數，而且，我們規定：

(1)滿足不等式 $a \leq x \leq b$ 的實數 x 的集合叫**閉區間**，表示為 $[a,b]$ ；

(2)滿足不等式 $a < x < b$ 的實數 x 的集合叫**開區間**，表示為 (a,b) ；

(3) 滿足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的實數 x 的集合叫**半開半閉區間**，表示為 $[a,b)$，$(a,b]$。

這裏的實數 a 與 b 都叫做相應區間的**端點**。

定義	名稱	符號	數軸表示
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	閉區間	$[a,b]$	
$\{x \mid a < x < b\}$	開區間	(a,b)	

$\{x \mid a \le x < b\}$	半開半閉區間	$[a,b)$	
$\{x \mid a < x \le b\}$	半開半閉區間	$(a,b]$	

實數集 $\boldsymbol{R}$ 也可以用區間表示為 $(-\infty,+\infty)$，“∞”讀作“無窮大”，“$-\infty$”讀作“負無窮大”，“$+\infty$”讀作“正無窮大”。我們還可以把滿足 $x \ge a$，$x > a$，$x \le b$，　$x < b$
的實數 x 的集合分別表 $[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$。

二、例題：

例題 1：求下列函數的定義域：

(1)　$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

(2)　$f(x) = \sqrt{3x+2}$

(3)　$f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{2-x}$

解：(1)因為 $x-2=0$，即 $x=2$ 時，分式 $\dfrac{1}{x-2}$ 沒有意義，而 $x \ne 2$ 時，$\dfrac{1}{x-2}$ 有意義，所以，這個函數的定義域是 $\{x \mid x \ne 2\}$。

(2)因為 $3x+2<0$，即 $x < -\dfrac{2}{3}$ 時，根式 $\sqrt{3x+2}$ 沒有意義，而 $3x+2 \ge 0$，即 $x \ge -\dfrac{2}{3}$ 時，根式 $\sqrt{3x+2}$ 才有意義。所以，這個函數的定義域是 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$。

(3)使根式 $\sqrt{x+1}$ 有意義的實數 x 的集合是 $\{x \mid x \ge -1\}$，使分式 $\dfrac{1}{2-x}$ 有意義的實數 x 的集合是 $\{x \mid x \ne 2\}$。所以這個函數的定義域是

$$\{x \mid x \ge -1\} \cap \{x \mid x \ne 2\}$$
$$= [-1,2) \cup (2,+\infty)$$

三、鞏固練習：

　　課本 $\boldsymbol{P}\mathbf{55}$，練習 $\mathbf{4}$。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

五、家課：

課本 ***P*****156** ，習題 **2.1** ， **6** 。

2.1.2 函數

教學目標：理解同一函數的概念。
教學重點：1.自變量與函數值間的關係。
2.理解靜與動的辨證關係，激發學生學習數學的興趣和積極性。
教學難點：培養學生抽象概括能力和分析解決問題的能力。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
問題 1：函數的概念是怎樣的？

問題 2：函數的三要素是？
對應法則 f 、定義域 A 、值域 $\{f(x)\,|\,x\in A\}$

二、例題：

例題 1：已知函數 $f(x)=3x^2-5x+2$，求 $f(3)$， $f(-\sqrt{2})$，$f(a)$，$f(a+1)$。

解： $f(3)=3\times 3^2-5\times 3+2=14$

$$f(-\sqrt{2})=3\times(-\sqrt{2})^2-5\times(-\sqrt{2})+2$$

$$=6+5\sqrt{2}+2$$

$$=8+5\sqrt{2}$$

$$f(a)=3a^2-5a+2$$

$$f(a+1)=3(a+1)^2-5(a+1)+2$$

$$=3a^2+6a+3-5a-5+2$$
$$=3a^2+a$$

例題 2：已知函數 $f(x)$的定義域是 R ， $f(a+1)=a^2-1$，若 $a\in R$，求的解析式。

解：設 $t=a+1$，則 $a=t-1$，因為 $a\in R$ ，所以 $t\in R$

由 $f(a+1)=a^2-1$ 可知 $f(t)=(t-1)^2-1=t^2-2t$。即確定了一個實數集上的對應關係 f，表示函數值是自變量的平方減去自變量的兩倍。所以

$f(x)=x^2-2x, x\in R$

問題 3：$y=1(x\in R)$是函數嗎？
$y=1(x\in R)$是函數。因為對於實數集中的任何一個數，按對應法則"函數值總是 1"，在中都有唯一確定的值 1 與它對應，所以是的函數。

問題 4：$y=x$ 與 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是同一個函數？

$y=x$ 與 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 不是同一個函數。虽對應法則一樣，$y=x$ 的定義是 R，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定義是 $\{x|\ x\neq 0\}$

例題 3：下列函數中哪個與函數 $y=x$ 是同一個函數？

(1) $y=(\sqrt{x})^2$　　(2) $y=(\sqrt[3]{x})^3$　　(3) $y=\sqrt{x^2}$

解：(1) $y=(\sqrt{x})^2=x\ \ (x\geq 0)$，這個函數與函數 $y=x\ \ (x\in R)$虽然對應關係相同，但是定義域不相同。所以這兩個函數不是同一個函數。

(2) $y=(\sqrt[3]{x})^3=x\ \ (x\in R)$，這個函數與函數 $y=x\ \ (x\in R)$不僅對應關係相同，而且定義域也相同。所以這兩個函數是同一個函數。

(3) $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$

這個函數與函數 $y=x\ \ (x\in R)$的定義域都是實數集 R，但是當 $x<0$ 時它的對應關係與函數 $y=x\ \ (x\in R)$不相同。所以，這兩個函數不是同一個函數。

三、鞏固練習：
　　課本 **P56**，習題 **2.1**，**4**。

四、課堂小結：
　　本節課我們學習了什麼？

五、家課：
　　課本 **P56**，習題 **2.1**，**1**，**2**，**3**。

2.1.3 函數

教學目標：1.理解映射的概念及表示方法
2.重視基礎知識的教學、基本技能的訓練和能力的培養
教學重點：理解象與原象的概念
教學難點：會結合簡單的圖示，瞭解一一映射的概念。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

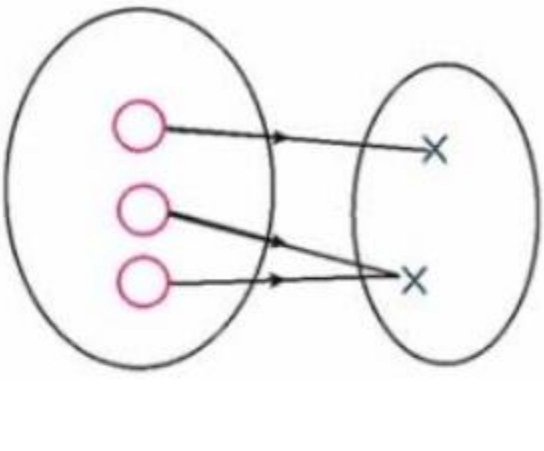
一、情景引入：
今天學習映射，我們先看日常生活的例子。
問題 1：假定我們有二組集合，{汽車}、{車牌號碼}和{學生}、{考試成績}，它們之間有什麼關係？
問題 2：對於車輛：有可能一汽車兩車牌號碼？
一輛汽車只能有一個車牌號碼。
問題 3：{學生}、{考試成績}呢？
學生考試的成績可能是從 0 分到 100 分，即：{0,1,2,3,……99,100}，也有可能分{A,B,C,D,E}五個等級。甚至只分{及格,不及格}二個等級。但無論如何，每個考生只對應一種成績。由此我們有二個映射的實例，第一個集合(汽車或學生)我們稱為**原象**，它裡面的每一個元素，恰巧可對應第二集合中的其中一個元素。第二個集合叫作**象**。

二、新課教授
如果將函數定義中的兩個非空數集擴展到任意元素的非空集合，我可以得到映射的概念。
映射的定義：
設 A，B 是兩個非空的數集，如果按某個確定的對應關係 $\boldsymbol{f}$ ，使對於集合 A 中的任何一個元素$\boldsymbol{a}$ ，在集合 B 中都有唯一確定的元素$\boldsymbol{b}$和它對應，那麼這樣的對應叫做集合 A 到集合 B 的映射，記作 $\boldsymbol{f: A \to B}$ ，其中$\boldsymbol{b}$稱為**象**，$\boldsymbol{a}$稱為**原象**。

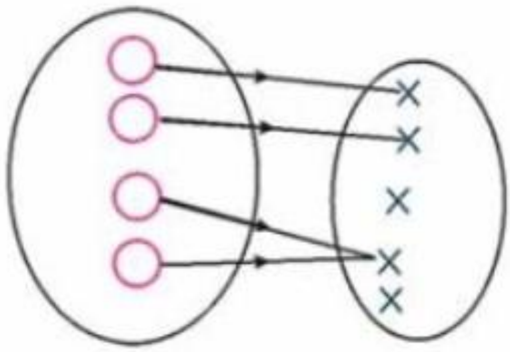
原象的每個元素可對應**象**集合的其中一個元素，**原象**的不同元素可以應**象**的相同元素(例如有好幾個學生都考了同樣的分數)，不能使**原象**有某個元素無法對應(某位考生沒有成績，只要參加考試，一定有成績，沒考試的學生要他補考，得出成績。)

三、例題：

例題 1：以下是不是映射？



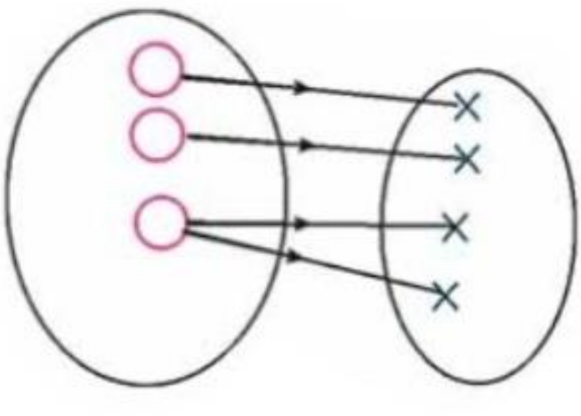
(A)



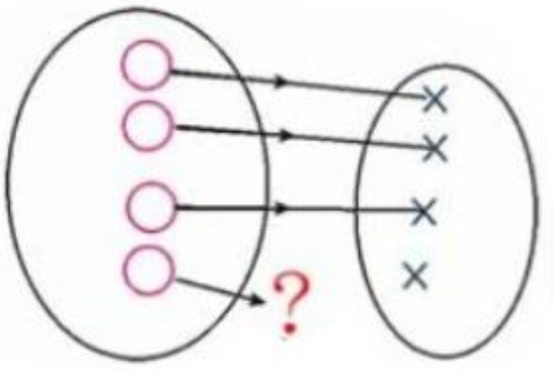
(B)

圖(A)、(B)：符合映射的定義，圖(b)象某個元素沒有對應到也沒有關係。

例題 2：以下是不是映射？



(C)



(D)

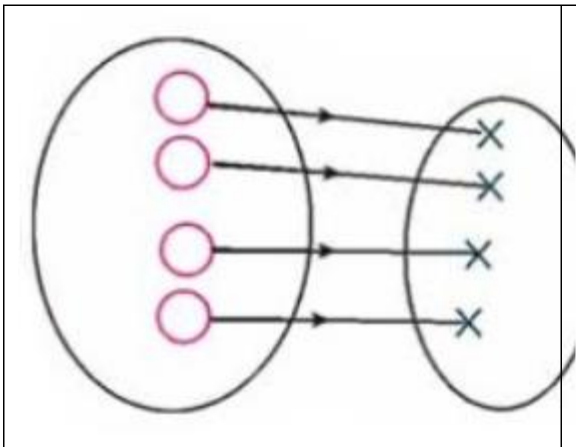
圖(C)、(D)：不是映射

圖(C)因為原象有一個元素對應到象的二個元素(譬如有一輛汽車，它有二個車牌號碼)，圖(D)也不是映射，因為原象有某個元素無法對應到象(譬如有一輛汽車，沒有車牌號碼)。

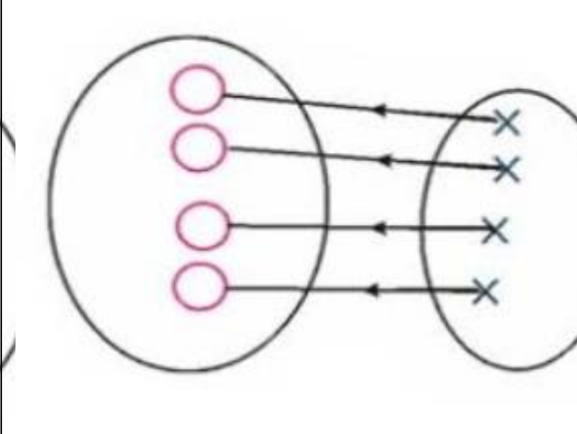
一對一配對或一對一對應

二個集合間若一個集合的每個元素，與另一個集合相配對，則稱為一一配對的集合。這二個集合的元素數目要一樣。

例題 3：以下是一對一對應的映射嗎？



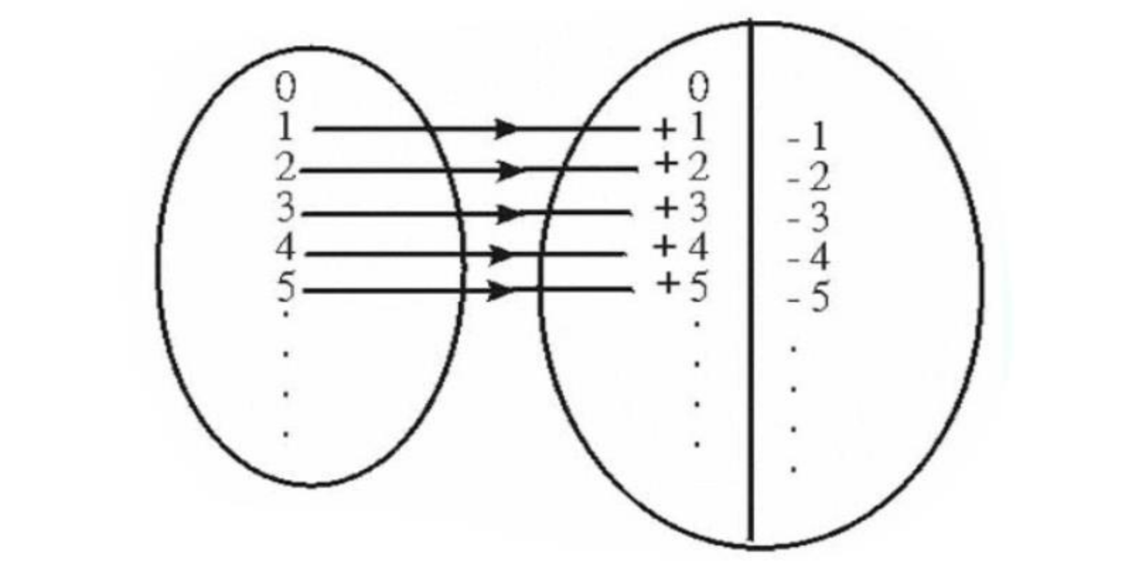
(E)



(F)

圖(E)是一對一對應的情況，如果把對應的箭頭倒轉，也就是原始集合和象集合對調，如圖(F)，結果仍然是一對一對應。

例題 4：以下是一對一對應的映射嗎？



(G)

圖(G){自然數}→{整數}是一對一映射，但不是一對一對應。

四、鞏固練習：

課本 ***P*57** ，習題**2.1** ，**7** 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

六、家課：

課本 ***P*57** ，習題**2.1** ，**8** 。

2.2.1 函數

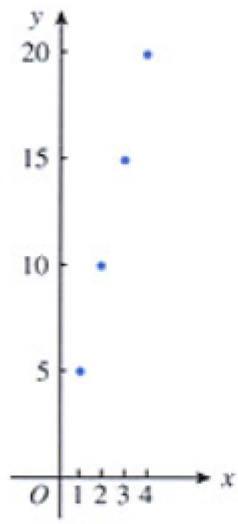
教學目標：掌握函數的解析法、列表法、圖像法三種主要表示方法。
教學重點：認識函數的解析法、列表法、圖像法的優點。
教學難點：培養數形結合、分類討論的數學思想方法，掌握分段函數的概念。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
問題 1：如何判定兩個函數是否相同？
看定義域，對應法則是否相同。

二、新課教授：
問題 2：那麼函數的表示方法常用的有哪些呢？
1.解析法：就是把兩變量的函數關係，用一個等式來表示，這個等式叫做函數的解析表達式，簡稱解析式。如 $S=\pi r^2$，$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 等。
優點：簡明扼要；給自變量求函數值。

2.列表法：就是列出表格來表示兩個變量的函數關係。如三角函數表，“利息表”。
優點：不需計算就可看出函數值。

3.圖像法：就是用函數圖像表示兩個變量之間的關係。如氣象局描繪溫度隨時間變的曲線。
優點：直觀形象，反映兩個變量的變化趨勢。

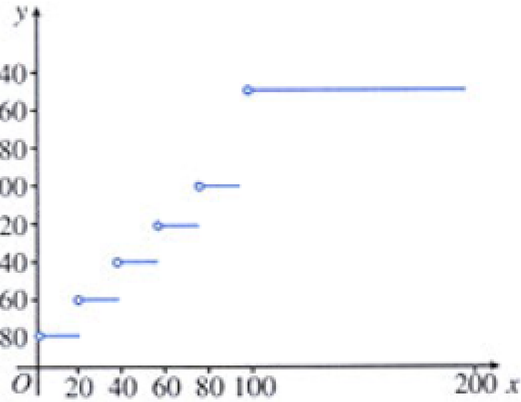


三、例題：
例題 1：某種筆記本每個 5 元，買 $x(x\in\{1,2,3,4\})$ 個筆記本的錢數記為 y (元)。試寫出以 x 自變量的函數 y 的解析式，並畫出這個函數的圖像。
解：這個函數的定義域是集合{1,2,3,4}，函數解析式為 $y=5x,(x\in\{1,2,3,4\})$
它的圖像由 4 個孤立點組成，如右圖，這些點的坐標分別是，$(1,5)$，$(2,10)$，$(3,15)$，$(4,20)$。

例題 2：國內投寄信函(外埠)，郵資按下列規則計算：
1.信函重量不超過 100g 時，每 20g 付郵資 80 分，即信函重量不超過 20g 付郵資 80 分，信函重量超過 20g 但不超過 40g 付郵資 160 分，依此類推；
2.信函質量大於 100g 且不超過 200g 時，每 100g 付郵資 200 分，即信函重量超過 100g，但不超過 200g 付郵資(A+200)分(A 為重量等於 100G 的信函的郵資)，信函質量超過 200g，但不超過 300g 付郵資(a+400)分，依此類推。
設一封 x g $(0 < x \le 200)$ 的信函應付的郵資為 y，試寫出以 x 自變量的函數 y 的解析式，並畫出這個函數的圖像。

解：這個函數的定義域是 $\{x \mid 0 < x \le 200\}$，函數的解析式為

$$y = \begin{cases} 80, x \in (0,20], \\ 160, x \in (20,40], \\ 240, x \in (40,60], \\ 320, x \in (60,80], \\ 400, x \in (80,100], \\ 600, x \in (100,200]. \end{cases}$$



例題 3：21 世紀遊樂園建造一個直徑為 20m 的圓形噴水池，計畫在噴水池的周邊靠近水面的位置安裝一圈噴水頭，使噴出的水柱在離池中心 4m 處達到最高，高度為 6m。另外還要在噴水池的中心設計一個裝飾物，使各方向的水柱在此處匯合。這個裝飾物的高度應當如何設計？
解：依題意，即

$$y = \begin{cases} a_1(x+4)^2 + 6(-10 \le x < 0), \\ a_1(x-4)^2 + 6(0 \le x \le 10). \end{cases}$$

由 $x = -10$， $y = 0$，得 $a_1 = -\frac{1}{6}$；由 $x = 10$， $y = 0$，得 $a_2 = -\frac{1}{6}$ 於是，所求函數解析式是 $y = \begin{cases} -\frac{1}{6}(x+4)^2 + 6(-10 \le x < 0), \\ -\frac{1}{6}(x-4)^2 + 6(0 \le x \le 10). \end{cases}$

當 $x = 0$， $y = \frac{10}{3}$

所以裝飾物的高度為 $\frac{10}{3}$ m。

四、鞏固練習：

課本 ***P*61** ，練習 **2** 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

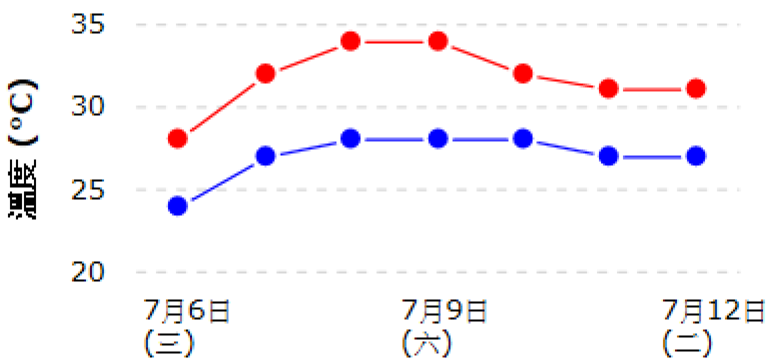
六、家課：

課本 ***P*61** ，習題 **2.2** ， **2** ， **4** 。

2.3.1 函數的單調性

教學目標：1.鞏固函數單調性的概念；
2.熟練掌握證明函數單調性的方法和步驟。
教學重點：熟練證明函數單調性的方法和步驟。
教學難點：單調性的綜合運用。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

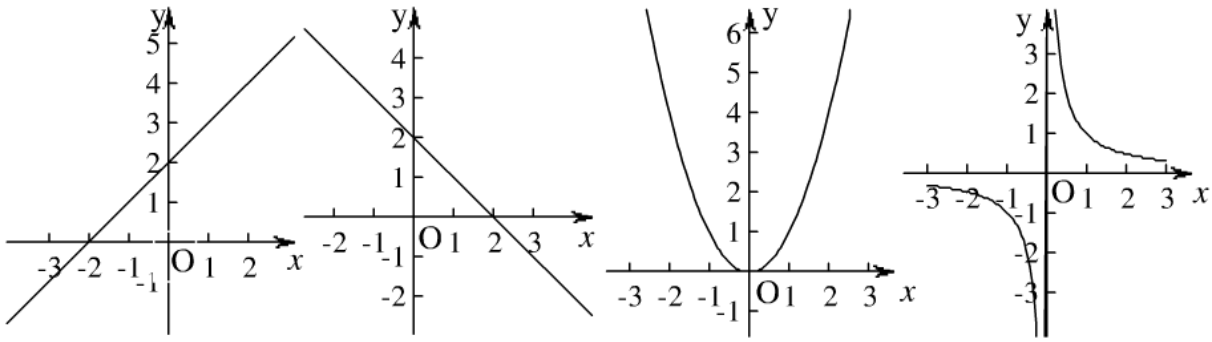
一、情景引入：
問題 1：下圖是澳門在 7 月 6 日到 7 月 12 日一星期間的溫度變化，觀察圖形能得到什麼訊息？



(1)當天的最高溫度、最低溫度；
(2)在某日的溫度；
(3)這一星期中某日溫度升到最高，某日溫度降低。
在生活中，我們關心很多數據的變化規律，了解這些數據的變化規律，對我們的生活是很有幫助的。
問題 2：還能舉出生活中其它的數據變化情況嗎？
股票價格，燃油價格等。
結論：用函數觀點看，其實就是隨自變量的變化，函數值是變大還是變小。

二、新課教授

問題 1：分別作出函數 $y=x+2$， $y=-x+2$， $y=x^2$， $y=\dfrac{1}{x}$ 並觀察，自變量變化時，函數值有什麼變化規律？

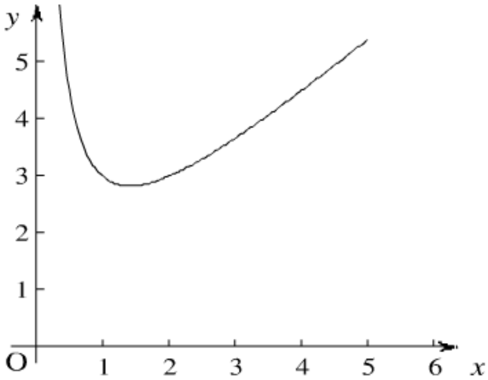


(1)函數 $y=x+2$ 在整個定義域內 y 隨 x 的增大而增大；
函數 $y=-x+2$ 在整個定義域內 y 隨 x 的增大而減小。
(2)函數 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上 y 隨 x 的增大而增大；
函數 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上 y 隨 x 的增大而減小；
(3)函數 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上 y 隨 x 的增大而減小；
函數 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上 y 隨 x 的增大而增大；
引導學生進行分類描述(增函數，減函數)。同時明確函數的單調性是對定義域內某個區間而言，是函數的局部性質。

問題 2：
能不能根據自己的理解說說什麼是增函數、減函數？
如果函數 $f(x)$ 在某個區間上隨自變量 x 的增大， y 也越來越大，我們說函數在該區間上為增函數；如果函數 $f(x)$ 在某個區間上隨自變量 x 的增大， y 越來越小，我們說函數在該區間上為減函數。

這種認識是從圖像的角度得到的，是對函數單調性的直觀，描述性的認識。

問題 3：下圖是函數 $y=x+\dfrac{2}{x}\ (x>0)$ 的圖像，能說出這個函數分別在哪個區間為增函數和減函數嗎？



難以确定分界點的確切位置。
通過討論，使學生感受到用函數圖像判斷函數單調性虽然比較直觀，但有時不够精確，需要結合解析式進行
嚴密化，精確化的研究。

問題 4：如何從解析式的角度說明 $y = x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上為增函數？
(1)在給定區間內取兩個數，例如 1 和 2，因為 $1^2 < 2^2$，所以 $y = x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上為增函數。
(2)仿(1)，取很多組驗證均滿足，所以 $y = x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上為增函數。
(3)任取 x_1，$x_2 \in (0,+\infty)$，且 $x_1 < x_2$，因為 ${x_1}^2 - {x_2}^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0$，即 ${x_1}^2 < {x_2}^2$，所以 $y = x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上為增函數。

問題 5：你能用準確的數學符號語言表述出增函數的定義嗎？
增函數定義：
設函數 $f(x)$ 的定義域為 I：x_1，x_2，當 $x_1 < x_2$ 時，都有 $f(x_1) < f(x_2)$，那麼就說 $f(x)$ 在這區間上是增函數。
類比出
減函數定義：
設函數 $f(x)$ 的定義域為 I：x_1，x_2，當 $x_1 < x_2$ 時，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，那麼就說 $f(x)$ 在這區間上是減函數。

三、例題：
例題 1：判斷題：
(1)已知 $f(x) = \frac{1}{x}$，因為 $f(-1) < f(2)$，所以函數 $f(x)$ 是增函數。
(2)若函數 $f(x)$ 滿足 $f(2) < f(3)$，則函數 $f(x)$ 在區間 $[2,3]$ 上為增函數。
(3) 若函數 $f(x)$ 在區間 $(1,2]$ 和 $(2,3)$ 上均為增函數，則 $f(x)$ 在間 $(1,3)$ 上為增函數。
(4) 因為函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在區間 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是減函數，所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 上是減函數。
通過判斷題，强調三點：
(1)單調性是對定義域內某個區間而言的，離開了定義域和相應區間就談不上單調性。
(2)對於某個具體函數的單調區間，可以是整個定義域(如一次函數)，可以是定義域內某個區間(如二次函數)，也可以根本不單調(如常函數)。
(3)函數在定義內的兩個區間 A，B 上都是增(或減)函數，一般不能認為函數在 $A \cup B$ 上是增(或減)函數。

例題 2：證明函數 $f(x)=3x+2$ 在 R 上是增函數。

證明：設 x_1 ，x_2 是 R 上的任意兩個實數，且 $x_1<x_2$，則

$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1+2)-(3x_2+2)$

$=3(x_1-x_2)$

由 $x_1<x_2$，得 $x_1-x_2<0$

於是 $f(x_1)-f(x_2)<0$

即 $f(x_1)<f(x_2)$

所以，函數 $f(x)=3x+2$ 在 R 上是增函數。

四、鞏固練習：

課本 P66 ，練習1 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

六、家課：

課本 P66 ，習題2.3 ，4 ，5 ，6 。

2.3.2 函數的單調性

教學目標：1.初步了解複合函數單調性的判斷方法。

2.會求複合函數的單調區間，明確複合函數單調區間是定義域的子集。

教學重點：複合函數單調性的概念、判斷及證明。

教學難點：歸納抽象函數單調性的定義以及根據定義證明函數的單調性。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、新課教授：

複合函數的概念：

已知函數 $f(u)$，和 $u=g(x)$， $u=g(x)$ 在區間 (a,b) 上具有單調性，當 $x\in(a,b)$ 時，$u\in(m,n)$ 且 $y=f(u)$ 在 (m,n) 上也具有單調性，則複合函數 $y=f(g(x))$ 在區間 (a,b) 上具有單調性

複合函數的單調規律：

$y=f(u)$	增↗		減↘	
$u=g(x)$	增↗	減↘	增↗	減↘
$y=f(g(x))$	增↗	減↘	減↘	增↗

總結：同增異減

注：複合函數 $y=f(g(x))$ 的單調調區間必須是其定義域的子集。

二、例題：

例題 1：已知函數 $f(x)$ 在 R 上是增函數， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是減函數，

求證： $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上是減函數。

證明：設 x_1 ， $x_2\in[a,b]$ ，且 $x_1<x_2$ ，

因為 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是單調遞減

所以 $g(x_1)>g(x_2)$

又因為 $f(x)$ 在 R 上是單調遞增

又因為 $g(x_1)\in R$ ， $g(x_2)\in R$

所以 $f(g(x_1))>f(g(x_2))$

所以 $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上是減函數。

三、鞏固練習：

仿例題 1，分別證明以下各題：

(1) 已知函數 $f(x)$ 在 R 上是增函數，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函數，求證：$f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上是增函數。
(2) 已知函數 $f(x)$ 在 R 上是減函數，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函數，求證：$f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上是減函數。
(3) 已知函數 $f(x)$ 在 R 上是減函數，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是減函數，求證：$f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上是增函數。

例題 2：

求函數 $f(x)=\sqrt{x^2+x-6}$ 的單調區間。

解：先求 $f(x)$ 的定義域，即 $x^2+x-6\geq 0$

$$(x+3)(x-2)\geq 0$$

$x\leq -3$ 或 $x\geq 2$

x^2+x-6 即 $(x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}$

當 $x<-\frac{1}{2}$ 時，x^2+x-6 為減

當 $x>-\frac{1}{2}$ 時，x^2+x-6 為增

又 $g(u)=\sqrt{u}$ 為增函數。

所以函數 $f(x)=\sqrt{x^2+x-6}$ 的單調遞減區間為 $(-\infty,-3]$；

函數 $f(x)=\sqrt{x^2+x-6}$ 的單調區增區間為當為 $[2,+\infty)$。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

五、家課：

課本 $P66$，習題 2.3，7。

2.4.1 反函數

教學目標：1.理解反函數的概念，並能判定一個函數是存在反函數；
2.掌握求反函數的基本步驟，並能理解原函數和反函數之間的內在聯繫；
3.掌握觀察、比較、分析、歸納等數學試驗研事的方法。
教學重點：反函數的概念及求法。
教學難點：反函數定義域的確定。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
問題 1：回憶函數的定義。
設 A，B 是非空的數集，如果按某個確定的對應關係 f，使對於集合 A 中的任意一個 x，在集合 B 中都有唯一確定的數 $f(x)$ 和它對應，那麼就稱 $f: A \to B$ 為從集合 A 到集合 B 的**函數**，記作

$$y = f(x),\quad x \in A$$

問題 2：函數的三要素？
定義域、值域、對應法則。

二、新課教授
問題 3：數學中處處存在互逆現象，像原命題與逆命題等，那麼在函數中有沒有這種現象呢？
炎夏是水果銷售旺季，藍莓是 15 元一盒，某人買了 x 盒，問他花了多少錢(y)？
$y = 15x$
問題 4：定義域呢？值域呢？
$x \geq 0$，$y \geq 0$
問題 5：如果我們知道這客人付了 y 元，那麼他買了多少盒(x)？
$x = \dfrac{y}{15}$ 定義域：$y \geq 0$，值域：$x \geq 0$

問題 6：以上兩個函數有什麼關係？
反函數定義：
一般地，設函數 $y = f(x)(x \in A)$，設它的值域是 C，根據這個函數中 x，y 的關係，用 y 把 x 表示出，得到 $x = \varphi(y)$。如果對於 y 在 C 中的任何一個值，通過 $x = \varphi(y)$，x 在 A 中都有唯一的值和它對應，那麼，$x = \varphi(y)$ 就表示 y 是自變量，x 是自變量 y 的函數，這樣的函數 $x = \varphi(y)(y \in C)$ 叫做函數 $y = f(x)(x \in A)$ 的

反函數，記作 $x=f^{-1}(y)$，習慣上改寫成 $y=f^{-1}(x)$。

問題 7：根據反函數的定義，對於 $y=f(x)(x\in A)$，這是用 x 表示 y 的函數。那麼根據這函數用 y 來表示 x，得到 $x=\varphi(y)$，這是一個函數嗎？

是，根據定義它是一個函數。

問題 8：買藍莓的例子 $y=15x$（$x\geq 0$，$y\geq 0$）與 $x=\dfrac{y}{15}$（$y\geq 0$，$x\geq 0$）是什麼關係？

互為反函數。

問題 9：以下是同一函數嗎？

$y=6x+5(x\in R)$

$x=6y+5(y\in R)$

是。

習慣上我們把 x 稱為自變量，y 稱為因變量。所以可改為 $y=f^{-1}(x)$。

<table>
<tr><td colspan="2">$y=f(x)$</td><td>$x\in A$</td><td>$y\in C$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$x=f^{-1}(y)$</td><td>$y\in C$</td><td>$x\in A$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>因變量</td><td>自變量</td><td>定義域</td><td>值域</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">改為 $y=f^{-1}(x)$</td><td>$x\in C$</td><td>$y\in A$</td></tr>
</table>

問題 10：如何求反函數？

三、例題：

例題 1：求下列函數的反函數：

(1) $y=3x-1(x\in R)$

(2) $y=x^3+1(x\in R)$

(3) $y=\sqrt{x}+1(x\geq 0)$

(4) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\in R$，且 $x\neq 1)$

解：(1)由 $y=3x-1$，得 $x=\dfrac{y+1}{3}$，所以，函數 $y=3x-1(x\in R)$ 的反函數是

$x=\dfrac{y+1}{3}(x\in R)$

(2)由 $y=x^3+1$，得 $x=\sqrt[3]{y-1}$，所以，函數 $y=x^3+1(x\in R)$ 的反函數是

$y=\sqrt[3]{x-1}(x\in R)$

(3)由 $y=\sqrt{x}+1$，得 $x=(y-1)^2$，所以，函數 $y=\sqrt{x}+1(x\geq 0)$ 的反函數是

$x=(y-1)^2(x\geq 1)$

(4)由 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ ，得 $x=\dfrac{y+3}{y-2}$ ，所以，函數 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\in R$ ，且 $x\neq 1)$的反函數是

$y=\dfrac{x+3}{x-2}(x\in R$ ，且 $x\neq 2)$

問題 10：由上面的解題過程我們能否得出求反函數的步驟？

結論：(1)反解：用 y 把 x 表示出來；

(2)互換：對調字母 x ， y ；

(3)注明：函數的定義域。

注：(1)反函數的定義域由原來函數的值域得到，而不是由反函數的解析式得到。

(2)求反函數前先判斷一下這個函數是否有反函數,即判斷映射是否是一對一對應的映射。

四、鞏固練習：

課本 $P70$ ，練習**1** ，**2** 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

六、家課：

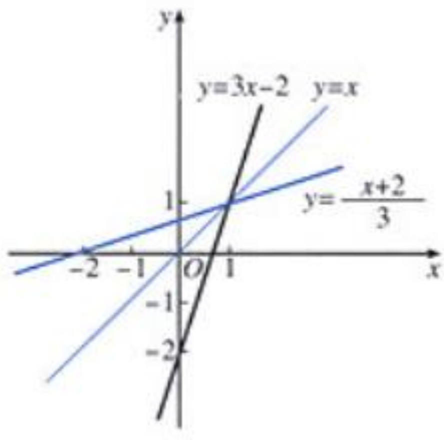
課本 $P66$ ，習題**2.4** ，**1** 。

2.4.2 反函數

教學目標：通過反函數概念的引入，函數及其反函數圖像特徵的主動探索，初步學會自主地學習、獨立地探究問題。
教學重點：反函數的圖像特徵。
教學難點：反函數的圖像及其性質。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
(1)互為反函數的兩個函數與之間的關係：
定義域、值域相反，對應法則互逆。
(2)求反函數的步驟：一解，二換，三注明。
(3)在平面直角座標係中：
a. $A(x,y)$點關於 x 軸對稱的點 $A'(x,-y)$
b. $A(x,y)$點關於 y 軸對稱的點 $A''(-x,y)$
c. $A(x,y)$點關於原點對稱的點 $A'''(-x,-y)$
問題 1： $A(x,y)$點關於 $y=x$ 對稱的點 B 的座標是？
我們已經知道兩個互為反函數的函數間有必然的聯係(在定義域、值域和對應法則方面)。函數圖像是從“形”的方面反映這個函數的自變量 x 與因變量 y 之間的關係，因此，互為反函數的函數圖像間也必然有一定的關係，今天通過觀察如下圖像研究，互為反函數的函數圖像間的關係。

二、新課教授
例題 1：
求函數 $y=3x-2(x\in R)$的反函數，并且畫出原來的函數和它的反函數的圖像。



解：由 $y=3x-2$ ，得 $x=\dfrac{y+2}{3}$ ，所以，函數 $y=3x-2(x\in R)$的反函數是

$$y=\frac{x+2}{3}(x\in R)$$

列表，畫出 $y=3x-2(x\in R)$及 $y=\dfrac{x+2}{3}(x\in R)$ 。

結論：函數 $y=f(x)$的圖像和它的反函數 $y=f^{-1}(x)$的圖像關於直線 $y=x$ 對稱。

逆命題成立：若兩個函數的圖像關係直線對稱，則這兩個函數一定是互為反函數。

應用：(1)利用對稱性作反函數的圖像

若 $y=f(x)$ 的圖像已作出或比較好作，那麼它的反函數 $y=f^{-1}(x)$ 的圖像可以由 $y=f(x)$ 的圖像關於直線 $y=x$ 對稱而得到；

(2)求反函數的定義域求原函數的值域；

(3)反函數的單調性與原函數的單調性相同。

三、例題：

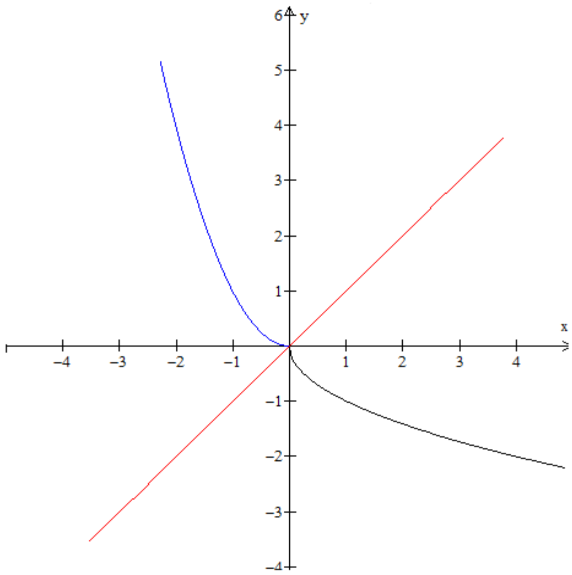
例題 2：求函數 $y=x^2(x<0)$ 的反函數，并且畫出原來的函數利用其關於直線 $y=x$ 對稱而求出反函數的圖像。

解：因為原函數的定義域是 $x<0$，值域是 $y>0$，

所以由 $y=x^2$ 解出 $x=-\sqrt{y}$，

所以函數 $y=x^2(x<0)$ 的反函數是 $y=-\sqrt{x}(x>0)$

作 $y=x^2(x<0)$ 的圖像，再作函數關於直線 $y=x$ 的對稱曲線，即為 $y=-\sqrt{x}(x>0)$ 函數的圖像。



例題 3：求函數 $y=\dfrac{5x+8}{3x-2}$ 的值域。

分析：靈活運用互為反函數的兩個函數定義域和值域之間的關係。

解：因為 $y=\dfrac{5x+8}{3x-2}$，所以 $x=\dfrac{2y+8}{3y-5}$，所以 $y\neq\dfrac{5}{3}$

所以函數的值域為 $\left\{y\middle|\ y\neq\dfrac{5}{3}\right\}$。

例題 4：已知 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}(x<-1)$，求 $f^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$。

解法一： $f(x)=y=\dfrac{1}{1-x^2}$，所以 $x^2=\dfrac{y-1}{y}$

因為 $x<-1$，所以 $x=-\sqrt{\dfrac{y-1}{y}}$

因為 $x<-1$，所以 $\dfrac{y-1}{y}\geq 1$，所以 $y<0$

所以 $f^{-1}(x)=-\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}(x<0)$，所以 $f^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-2$

解法二：分析：由 $y=f(x)$ 與 $y=f^{-1}(x)$ 互為反函數的關係可知：當 $y=f(x)$ 中的 $x=a$ 時 $y=b$，則 $y=f^{-1}(x)$，當 $x=b$ 時 $y=a$，即

$f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}=-\dfrac{1}{3}$，所以 $x^2-1=3$， $x^2=4$

又因為 $x<-1$，所以 $x=-2$。

解法二明顯比解法一簡便得多。

四、鞏固練習：

課本 $P71$，習題 2.4 ， 2 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

六、家課：

課本 $P71$，習題 2.4 ，3 ，4 。

2.5.1 指數

教學目標：1.理解方根的概念；
2.掌握整數指數冪和根式之間的互化；
3.培養學生觀察分析、抽象等的能力。
教學重點：整數指數冪的理解；
教學難點：分數指數冪概念的理解。
教學方法：發現教學法。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
問題 1：填表：整數指數冪

(1) $a^n =$ ______ $(n\in N^*)$
(2) $a^0 =$ ______$(a\neq 0)$
(3) $a^{-n} =$ _____ $(a\neq 0, n\in N^*)$

習題：

(1) $3^2\cdot 3^5 =$ _____
(2) $(3^2)^5 =$ _____
(3) $(3xy)^5 =$ _____
(4) $3^2\div 3^5 =$ ______

總結：整數指數冪有下面的運算性質：

(1)$a^m\cdot a^n =$ ______ $(m,n\in Z)$
(2) $(a^m)^n =$ ______ $(m,n\in Z)$
(3) $(ab)^n =$ ______ $(n\in Z)$
(4) $a^m\div a^n =$ ____ $(m,n\in Z)$

二、新課教授
問題 2：填表：

(1) $3^2=9$，3是9的_______根	即	$\sqrt{9}=3$
(2) $3^3=27$，3是27的_______根		______$=3$
(3) $3^4=81$，3是81的_______根		______$=3$
(4) $x^n=a\ (n>1, n\in N^*)$，x是a的_______根		______$=x$

a的n次方根定義：如果$x^n=a$，那麼x叫做a的n次方根，其中$(n>1, n\in N^*)$

根式定義：式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式，這裏n叫做根指數，a叫做被開方數。

問題 3：

(1)	25 的平方根是__________
(2)	0 的七次方根是_________
(3)	-27 的立方根是_________
(4)	-32 的五次方根是_______
(5)	16 的四次方根是________
(6)	a^6 的三次方根是_________

得出**性質：**

(1) n 為奇數時：正數的 n 次方根為____數，

負數的 n 次方根為_______數。記作：$x=\sqrt[n]{a}$

(2) n 為偶數時，正數的 n 次方根有______個(互為相反數)。記作：$x=\pm\sqrt[n]{a}$.

(3) 負數______偶次方根。

(4) 0 的任何次方根為_______ 。

注：當 $a\geq 0$ 時，$\sqrt[n]{a}\geq 0$，表示算術根，所以 $\sqrt[4]{16}=2$ 表示 16 的算術四次根，$\pm\sqrt[4]{16}=2$ 表示 16 的四次根。

根據 n 次方根的意義，可得 $(\sqrt[n]{a})^n=a$，但 $\sqrt[n]{a^n}$ 不一定等於 a。

當 n 為奇數時， $\sqrt[n]{a^n}=a$；

當 n 為偶數時， $\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a(a\geq 0) \\ -a(a<0) \end{cases}$。

三、例題：

例題 1：求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}$

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$

(2) $\sqrt{(-10)^2}$

(4) $\sqrt{(a-b)^2}\,(a>b)$

解：(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}=-8$

(2) $\sqrt{(-10)^2}=|-10|=10$

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=|3-\pi|=\pi-3$

(4) $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=a-b(a>b)$

問題 4：上題若$(a<b)$，則$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=-(a-b)=b-a(a<b)$

例題 2：求$\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}$的值。

解：原式

$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{4})^2-2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{4})^2-2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{2})^2}$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}+2-\sqrt{3}-2+\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

四、鞏固練習：
計算：

(1) $\sqrt[5]{-243}$

(2) $\sqrt[3]{x^6}\,(x<0)$

(3) $\sqrt[4]{(-7)^4}$

(4) $2\sqrt{3}\times\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$

五、課堂小結：
本節課我們學習了什麼？

六、家課：
課本 $P77$ ，習題 **2.5** ，**1** 。

2.5.2 指數

教學目標：1.理解分數指數冪的概念；
2.掌握指數冪和根式之間的互化；
3.掌握分數指數冪的運算性質。
教學重點：掌握並運用分數指數冪的運算性質。
教學難點：分數指數冪概念的理解。
教學方法：發現教學法。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：

當 n 為奇數時，$\sqrt[n]{a^n} = a$；當 n 為偶數時，$\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$。

問題 1：$\sqrt[5]{a^{10}} =$ _______ ；$\sqrt[3]{a^{12}} =$ _______

二、新課教授
問題 2：填表 $(a > 0)$：

(1) $\sqrt[5]{a^{10}} = \sqrt[5]{(\_\_\_\_)^5} = a^2 = a^{\frac{(\ )}{(\ )}}$	(3) $\sqrt{a^{10}} = \sqrt{(\_\_\_\_)^2} = a^5 = a^{\frac{(\ )}{(\ )}}$
(2) $\sqrt[3]{a^{12}} = \sqrt[3]{(\_\_\_\_)^3} = a^4 = a^{\frac{(\ )}{(\ )}}$	(4) $\sqrt{a^6} = \sqrt{(\_\_\_\_)^2} = a^3 = a^{\frac{(\ )}{(\ )}}$

問題 3：根據上題的結果填表：

(1) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{(\ )}{(\ )}}$ $(a > 0)$	(3) $\sqrt[4]{c^5} = c^{\frac{(\ )}{(\ )}}$ $(c > 0)$
(2) $\sqrt{b} = b^{\frac{(\ )}{(\ )}}$ $(b > 0)$	(4) $\sqrt[3]{d^3} = c^{\frac{(\ )}{(\ )}}$ $(d > 0)$

為此，我們規定

(1)正數的正分數指數冪的意義：

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0，m，n \in N^*，且 n > 1)$$

(2)正數的負分數指數冪的意義：

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0，m，n \in N^*，且 n > 1)$$

(3) 0 的正分數指數冪等於 0，0 的負分數指數冪沒有意義。

(4)有理指數冪的運算性質：

$a^r \cdot a^s =$ ________ $(a>0, r, s \in Q)$

$(a^r)^s =$ _______ $(a>0, r, s \in Q)$

$(ab)^r =$ ________ $(a>0, b>0, r \in Q)$

三、例題：

例題 1：求值：

(1) $8^{\frac{2}{3}}$　　(2) $100^{-\frac{1}{2}}$　　(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$　　(4) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$

解：(1) $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\times\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

(2) $100^{-\frac{1}{2}} = (10^2)^{-\frac{1}{2}} = 10^{2\times(-\frac{1}{2})} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

(3) $(\frac{1}{4})^{-3} = (2^{-2})^{-3} = 2^{(-2)\times(-3)} = 2^6 = 64$

(4) $(\frac{16}{81})^{-\frac{3}{4}} = (\frac{2}{3})^{4\times(-\frac{3}{4})} = (\frac{2}{3})^{-3} = \frac{27}{8}$

例題 2：用分數指數冪的形式表示下列各式：(式中 $a>0$)：

$a^2 \cdot \sqrt{a}$ ，$a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2}$ ，$\sqrt{a\sqrt{a}}$

解：$a^2 \cdot \sqrt{a} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{2+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{2}}$

$a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^3 \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{3+\frac{2}{3}} = a^{\frac{11}{3}}$

$\sqrt{a\sqrt{a}} = (a \cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$

四、鞏固練習：

課本 ***P*76** ，練習**1** ，**2** 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

六、家課：

課本 ***P*77** ，習題**2.5** ，**2** ，**3** 。

2.5.3 指數

教學目標：1 理解掌握分數指數冪的意義並能進行基本運算。
2.訓練學生思維的靈活性。
教學重點：掌握並運用分數指數冪的運算性質。
教學難點：分數指數冪的意義及其運算根據。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\text{ ，}a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}\ (a>0\text{ ，}m\text{ ，}n\in N^*\text{ ，且 }n>1)$$

二、例題：

例題 1：計算下列各式(式中字母都是正數)：

(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$　　(2) $(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8$

解：(1) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$

$$=[2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$$
$$=4ab^0$$
$$=4a$$

(2) $(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}})^8$

$$=(m^{\frac{1}{4}})^8(n^{-\frac{3}{8}})^8$$
$$=m^2n^{-3}$$
$$=\frac{m^2}{n^3}$$

例題 2：計算下列各式：

(1) $(\sqrt[3]{25}-\sqrt{125})\div\sqrt[4]{5}$　　(2) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}\ (a>0)$

解：(1) $(\sqrt[3]{25}-\sqrt{125})\div\sqrt[4]{5}$

$=(5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{3}{2}})\div 5^{\frac{1}{4}}$

$=5^{\frac{2}{3}}\div 5^{\frac{1}{4}}-5^{\frac{3}{2}}\div 5^{\frac{1}{4}}$

$=5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}-5^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}$

$=5^{\frac{5}{12}}-5^{\frac{5}{4}}$

$=\sqrt[12]{5^5}-5\sqrt[4]{5}$

(2) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}$

$=\dfrac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}}$

$=a^{2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{5}{6}}$

$=\sqrt[6]{a^5}$

例題 3：已知$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$求下列各式的值：

(1) $a+a^{-1}$	(2) a^2+a^{-2}	(3) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$

解：(1) $a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2=3^2-2=7$

(2) $a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=7^2-2=47$

(3) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}=\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})[(a^{\frac{1}{2}})^2+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2]}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}$

$=(a^{\frac{1}{2}})^2+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+(a^{-\frac{1}{2}})^2$

$=a+1+a^{-1}$

$=7+1=8$

三、鞏固練習：

課本 ***P*****77** ，練習**3** ，**4** 。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

五、家課：

課本 ***P*****77** ，習題**2.5** ，**5** ，**6** ，**7** 。

2.6.1 指數函數

教學目標：使學生理解指數函數的定義，
教學重點：指數函數的圖像和性質。
教學難點：底數的變化對函數性質的影響，突破難點的關鍵是利用多媒體動感顯示，通過顏色的區別，加深其感性認識。
教學方法：發現教學法、比較法、討論法。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：
問題 1：動手折紙，觀察對折次數與所得紙的層數的關係，得出折一次為 2 層紙，折兩次為 2^2 層紙，折三次為 2^3 層紙⋯求對折次數 x 與所得紙的層數 y 的關係式。

折次數 x	1	2	3	4	5	x
層數 y						

$y=2^x\,(x\geq 0)$

問題 2：《莊子·天下篇》中寫道："一尺之棰，日取其半，萬世不竭"。請你寫出取 x 次後木棰的剩留量 y 與 x 的函數關係式。

取次數 x	1	2	3	4	5	x
剩留量 y						

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x (x\geq 0)$$

二、新課教授：
指數函數的概念：
定義：函數 $y=a^x\,(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫做指數函數，其中 x 是自變量，函數的定義域是 R。注：(1)它與冪函數的區別：冪函數的底數是自變量；指數函數的指數是自變量；
(2)指數函數的定義域是 R；
(3)指數函數的底數 $a>0$，且 $a\neq 1$；
(4) $y=a^{-x}\quad(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 亦是指數函數。
問題 3：為什麼指數函數 $y=a^x$ 的底數 a 要滿足 $a>0$，且 $a\neq 1$

(1)當 $a<0$ 時，a^x 不一定有意義，如 $(-2)^{\frac{1}{2}}$

(2)當 $a=0$ 時，0^x 不一定有意義，如 0^0、0^{-2}

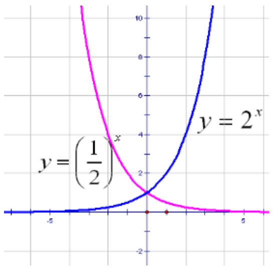
(3)當 $a=1$ 時， $y=1^x=1$ 是常數函數，
以上三種情況都不利於我們研究指數函數，所以規定 $a>0$ ，且 $a\neq 1$
問題 4：下列哪些是指數函數？

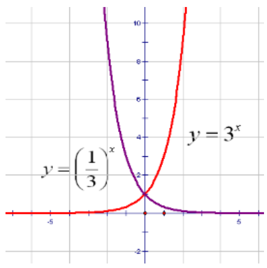
(1) $y=2^x$	(6) $y=2^x+1$
(2) $y=2^{-x}$	(7) $y=3\times 2^x$
(3) $y=-2^x$	(8) $y=2^{x+1}$
(4) $y=(-2)^x$	(9) $y=3^{\frac{x}{2}}$
(5) $y=x^3$	(10) $y=1$

指數函數的圖像：

用“描點法”畫出 $y=2^x$ 、 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 、 $y=3^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的圖像。

(學生分小組，每人各畫一個函數的圖像，展示學生成果。如下。)





問題 5：四個圖像有何共同特點？
它們的圖像都在 x 軸的上方，且都過同一個點 $(0,1)$ 。
圖像在 x 軸上方說明 $y>0$ ，向下與 x 軸無限接近；過點 $(0,1)$ 說明 $x=0$ 時，
$y=1$ 。
問題 6：再看看它們有何不同之處？
當底數為 2 ， 3 時，函數圖像上升，為增函數。
當底數為 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ 時，函數圖像下降，為減函數。
根據我們上面共同發現的指數函數的圖像特徵，你能否概括出指數函數的性質？

<table>
<tr><th colspan="2">$y=a^x$</th><th>$a>1$</th><th>$0<a<1$</th></tr>
<tr><td colspan="2">圖 像</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">函數性</td><td>定義域</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>單調性</td><td></td><td></td></tr>
</table>

質	函數值的變化		

三、例題：

例題 1：比較下列各題中兩個值的大小：

(1) $1.7^{2.5}$和1.7^{3}　　(2) $0.8^{-0.1}$和$0.8^{-0.2}$　　(3) $1.7^{0.3}$和$0.9^{3.1}$

解：(1)考察指數函數 $y=1.7^{x}$，由於底數$1.7>1$，所以指數函數 $y=1.7^{x}$ 在 R 上是增函數。

又因為$2.5<3$

所以$1.7^{2.5}<1.7^{3}$。

(2)考察指數函數 $y=0.8^{x}$，由於底數$0<0.8<1$，所以指數函數 $y=0.8^{x}$ 在 R 上是減函數。

又因為$-0.1>-0.2$

所以$0.8^{-0.1}<0.8^{-0.2}$。

(3)由指數函數的性質知

$1.7^{0.3}>1.7^{0}=1$

$0.9^{3.1}<0.9^{0}=1$

所以$1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$。

四、鞏固練習：

課本 $P81$，習題 2.6，2(1,2)，。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

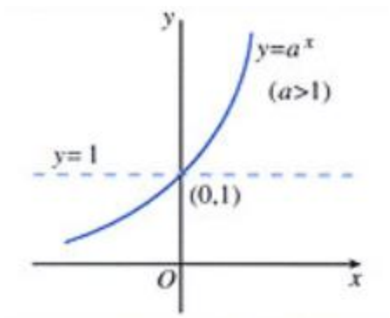
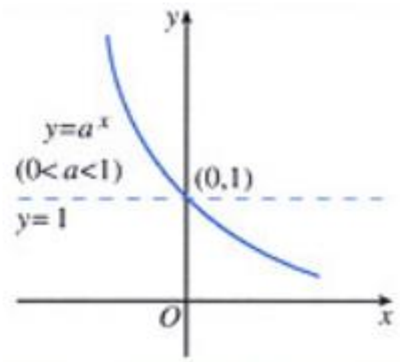
六、家課：

課本 $P82$，習題 2.6，2(3,4)，3。

2.6.2 指數函數

教學目標：初步掌握指數函數的圖像和性質。
教學重點：運用指數函數的圖像和性質解決日常生活中的問題。
教學難點：求函數的定義域和值域。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：

$y=a^x$		$a>1$	$0<a<1$
圖 像			
函數性質	定義域	R	
	值域	$(0,+\infty)$	
	過點	過點 $(0,1)$，即 $x=0$ 時，$y=1$。	
	單調性	在 R 上是增函數	在 R 上是減函數

二、例題：

例題 1：某種放射性物質不斷變化為其他物質，每經過 1 年剩留的這種物質是原來的 84%。畫出這種物質的剩留量隨時間變化的圖像，並從圖像上求出經過多少年，剩量留是原來的一半（結果保留 1 個有效數字）。

解：設這種物質量初的品質是 1，經過 x 年，剩留量是 y。

經過 1 年，剩留量 y=1×84%=0. 841；

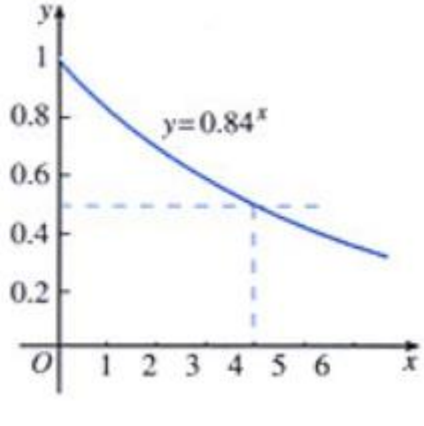
經過 2 年，剩留量 y=1×84%=0. 842；

……

一般地，經過 x 年，剩留量

$$y=0.84^x$$

根據這個函數關係式可以清單如下：



x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	0.84	0.71	0.59	0.50	0.42	0.35

畫出指數函數 $y = 0.84^x$ 的圖像。從圖上看出 y=0.5 只需 x≈4.

答：約經過 4 年，剩留量是原來的一半。

例題 2：求下列函數的定義域：

(1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$　　　　(2) $y = 5^{\sqrt{2x-1}}$

分析：(1)只要指數位置上的 $\frac{1}{x}$ 有意義，則原函數有意義。

(2)只要指數位置上的 $\sqrt{2x-1}$ 有意義，則原函數有意義。

解：(1)使 $\frac{1}{x}$ 有意義，即 $x \neq 0$，

所以原函數的定義域為 $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$。

(2) 使 $\sqrt{2x-1}$ 有意義，即 $2x-1 \geq 0$， $x \geq \frac{1}{2}$

所以原函數的定義域為 $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$。

例題 3：求下列函數的定義域和值域：

(1) $y = \sqrt{1-a^x}$　　　　(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x+3}}$

解：(1)要使函數有意義，必須 $1-a^x \geq 0$，即 $a^x \leq 1$
當 $a > 1$ 時， $x \leq 0$；
當 $0 < a < 1$ 時， $x \geq 0$；
因為 $a^x > 0$，所以 $0 \leq 1-a^x < 1$，所以值域為 $0 \leq y < 1$。
(2)要使函數有意義，必須 $x+3 \neq 0$，即 $x \neq -3$

因為 $\frac{1}{x+3} \neq 0$，所以 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x+3}} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$，所以值域為 $(0,1) \cup (1,+\infty)$。

三、鞏固練習：

課本 $P81$，練習 2。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

五、家課：

課本 ***P*81**，習題 **2.6** ，**1** 。

2.6.3 指數函數

教學目標：通過定義的引入，圖像特徵的觀察、發現過程使學生懂得理論與實踐的辯證關係，適時滲透分類討論的數學思想，培養學生的探索發現能力和分析問題、解決問題的能力。

教學重點：1.掌握指數函數的圖像和性質；
2.掌握函數平移的規律。

教學難點：熟練複合函數的單調性。

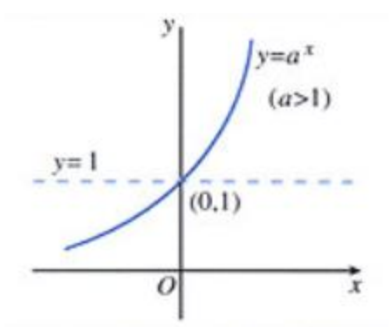
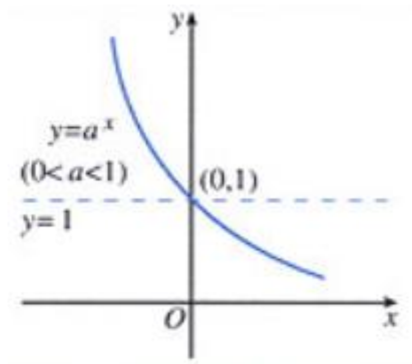
教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

指數函數的圖像和性質：

<table>
<tr><td colspan="2">$y=a^x$</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">圖 像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">函數性質</td><td>定義域</td><td colspan="2">$\boldsymbol{R}$</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>過點</td><td colspan="2">過點 $(0,1)$ ，即 $x=0$ 時， $y=1$ 。</td></tr>
<tr><td>單調性</td><td>在 $\boldsymbol{R}$ 上是增函數</td><td>在 $\boldsymbol{R}$ 上是減函數</td></tr>
</table>

二、例題：

例題 1：求函數 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$ 的單調區間。

解：用複合函數的單調性：

設： $u=x^2-2x=(x-1)^2-1$，則 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$

對任意的$1<x_1<x_2$，有$u_1<u_2$，又因為$y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$是減函數，

所以$y_1<y_2$，所以$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$在$(1,+\infty]$是減函數；

對任意的$x_1<x_2\le 1$，有$u_1>u_2$，又因為$y=\left(\frac{1}{2}\right)^u$是減函數

所以$y_1<y_2$，所以$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$在$(-\infty,1]$是增函數。

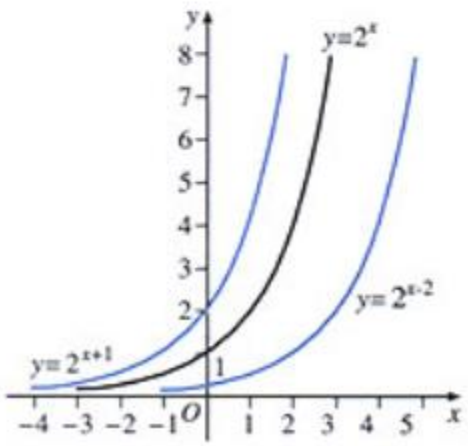
復合函數單調性的規律見下表：

$y=f(u)$	增↗		減↘	
$u=g(x)$	增↗	減↘	增↗	減↘
$y=f(g(x))$	增↗	減↘	減↘	增↗

例題 2：說明下列函數的圖像與指數函數$y=2^x$的圖像的關係，並畫出它的們的示意圖：

(1) $y=2^{x+1}$　　(2) $y=2^{x-2}$

解：



(1)將指數函數$y=2^x$的圖像向左平行移動 1 個單位長度，就得到函數$y=2^{x+1}$的圖像。

(2)將指數函數$y=2^x$的圖像向右平行移動 2 個單位長度，就得到函數$y=2^{x-2}$的圖像。

結論：$y=2^{x-m}$與$y=2^x$的關係：

(1)當 m______時，將指數函數$y=2^x$的圖像向______平行移動 m 個單位長度，就得到函數$y=2^{x-m}$的圖像；

(2)當 m______時，將指數函數$y=2^x$的圖像向______平行移動 m 個單位長度，就得到函數$y=2^{x-m}$的圖像。

例題 3：說明下列函數的圖像與指數函數$y=2^x$的圖像的關係。

(1) $y=2^x+1$　　(2) $y=2^x-1$

解：

(1)將指數函數$y=2^x$的圖像向上平行移動 1 個單位長度，就得到函數$y=2^x+1$的圖像。

(2)將指數函數 $y=2^x$ 的圖像向下行移動 1 個單位長度，就得到函數 $y=2^x-1$ 的圖像。

結論：$y=2^x+h$ 與 $y=2^x$ 的關係：
(1)當 h______時，將指數函數 $y=2^x$ 的圖像向______平行移動 h 個單位長度，就得到函數 $y=2^x+h$ 的圖像；
(2)當 h______時，將指數函數 $y=2^x$ 的圖像向______平行移動 h 個單位長度，就得到函數 $y=2^x+h$ 的圖像。
對於有些複合函數的圖像，則常用基本函數圖像+變換方法作出：
即把我們熟知的基本函數圖像，通過平移、作其對稱圖等方法，得到我們所要求作的複合函數的圖像，如上題，這種方法我們遇到的有以下幾種形式：

函 數	$y=f(x)$
$y=f(x+a)$	$a>0$ 時，向左平移 a 個單位；$a<0$ 時，向右平移 $\|a\|$ 個單位。
$y=f(x)+a$	$a>0$ 時，向上平移 a 個單位；$a<0$ 時，向下平移 $\|a\|$ 個單位。
$y=f(-x)$	$y=f(-x)$ 與 $y=f(x)$ 的圖像關於 y 軸對稱。
$y=-f(x)$	$y=-f(x)$ 與 $y=f(x)$ 的圖像關於 x 軸對稱。
$y=-f(-x)$	$y=-f(-x)$ 與 $y=f(x)$ 的圖像關於原點軸對稱。
$y=f^{-1}(x)$	$y=f^{-1}(x)$ 與 $y=f(x)$ 的圖像關於直線 $y=x$ 對稱。

三、鞏固練習：
(1)由 $y=2^x$ 的圖像怎樣得到 $y=2^{x+4}$ ，　$y=2^{x-5}$ 的圖像？
(2)為了得到 $y=2^{x-3}+2$ 的圖像，只需把 $y=2^x$ 的圖像如何變換？
(3).函數 $y=2^{x-1}+1$ 的圖像可由函數 $y=2^x$ 的圖像(　　　　)
A.向右平移一個單位，再向上平移一個單位得到。
B.向左平移一個單位，再向上平移一個單位得到。
C.向右平移一個單位，再向下平移一個單位得到。
D.向左平移一個單位，再向下平移一個單位得到。
(4)若函數 $y=5^{x+2}+b$ 的圖像不經過第二象限，則 b 的取值範圍是______。

四、課堂小結：
本節課我們學習了什麼？

五、家課：
課本 ***P*82** ，習題**2.6** ，**3** ，**4** 。

2.7.1 對數

教學目標：1.能正確說出對數的意義；
2.熟練對數基本運算。
教學重點：引起演算對數算式之興趣。
教學難點：能正確說出對數可運算的範圍。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：
西元 1554 年，Michael Stifel 在"整數算術"一書中寫出兩個數列：

a	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	x	$\cdots$	y	$\cdots$	$x+y$
2^a	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	$\cdots$	M	$\cdots$	N	$\cdots$	$M\times N$

現在想要計算$M\times N$，如果能得知x，y的值(或是近似值)，根據指數律可知：

$M=2^x$，$N=2^y \Rightarrow M\times N=2^x\cdot 2^y=2^{x+y} \Rightarrow$因此只要能得出上表就可得出$x+y$所對的$M\times N$值這樣想法經過數學化之後就形成了對數的概念。

二、新課教授：
對數的概念：
給定底數2，大家知道2的3次方等於8。反過來說，如果已知8，我們想知道8是的2幾次方，這等於求方程式$2^x=8$的解，通常以符號$\log_2 8$表示之，即$3=\log_2 8$。

$$2^3=8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 8=3$$

$$10^2=100 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10}100=2$$

$$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \log_3\sqrt{3}=\frac{1}{2}$$

定義：一般地，如果 $a(a>0,a\neq 1)$的b次冪等於N，就是$a^b=N$，那麼數b叫做以a為底N的對數，記作 $\log_a N=b$，a叫做對數的底數，N叫做真數。

反過說，若$\log_a N=b$，則$a^b=N$，即$a^{\log_a N}=N$。

關於$\log_a N$這個符號：

正如我們對於$\sqrt{2}$的了解，它是一個無理數，我們可以對它作如下的描述：$\sqrt{2}$

代表一個正數，而這個正數的平方等於$\mathbf{2}$。而$\log_a N$我們也可以作如下的描述：

$\log_a N$代表一個數r，而a的r次方等於N，用符號$a^{\log_a N}=N$來表示。

問題 1：當$a^x=a^y$，$x=y$成立嗎？
不成立

問題 2：定義中，為何a要大於0，不等於1呢？
我們在討論指數a^x時，a必須大於0，所以規定對數時，我們也假設$a>0$，因為$a>0$，$a^x>0$所以只有正數的對數才有意義。因此b必須大於0，當$a=1$時，

因為$1^2=1$，$1^3=1$，那麼$\log_1 1$到底要代表2或是3呢？這就無法定義清楚了，

所以我們不以1為底數。

問題 3：由於$a^0=1$，$a^1=a\ (a>0$，且$a\neq 1)$寫出它們的對數形式。

結論：
(1) $\log_a N$有意義$\Leftrightarrow a>0, a\neq 1, N>0$

(2) $\log_a N=b \Leftrightarrow a^b=N \Leftrightarrow a^{\log_a N}=N$

(3) $\log_a 1=0\ (a>0且a\neq 1)$
(4) $\log_a a=1\ (a>0且a\neq 1)$

問題 4：**常用對數：** $\log_{10} 5$簡記為______；$\log_{10} 3.5$簡記為______。

問題 5：**自然對數：** $\log_e 3$簡記為_______；$\log_e 10$簡記為_______。

三、例題：
例題 1：將下列指數式寫成對數式：

(1) $5^4=625$　(2) $2^{-6}=\dfrac{1}{64}$　(3) $3^a=27$　(4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^m=5.73$

解：(1) $\log_5 625=4$　(2) $\log_2\dfrac{1}{64}=-6$　(3) $\log_3 27$　(4) $\log_{\frac{1}{3}} 5.73=m$

例題 2：將下列對數式寫成指數式：

(1) $\log_{\frac{1}{2}} 16=-4$　(2) $\log_2 128=7$　(3) $\lg_{0.01}=-2$　(4) $\ln 10=2.303$

解：(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$ (2) $2^7=128$ (3) $10^{-2}=0.01$ (4) $e^{2.303}=10$

例題 3：求下列各式的值：

(1) $\log_3 1$ (2) $\log_{0.5}\frac{1}{2}$ (3) $\log_2\sqrt{8}$ (4) $\log_{10}1000^{\frac{1}{10}}$ (5) $\log_4 8$ (6) $2^{\log_2 5}$

解：

(1) 0 (2) 1 (3) $\frac{3}{2}$ (4) $\frac{3}{10}$ (5) $\frac{3}{2}$ (6) 5

四、鞏固練習：

課本 $P85$，練習 **1**，**2**，**3**。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

六、家課：

課本 $P87$，習題 **2.7**，**1**，**2**。

2.7.2 對數

教學目標：理解對數運算之各性質(對數律)。

教學重點：1.能正確敘述並運用內相乘的對數值等於對數值外相加的性質；
2.能正確敘述並運用內相除的對數值等於對數值外相減的性質；
3.能正確敘述並運用內乘方的對數值等於次方與底數之對數值相乘的性質。

教學難點：正確運用公式計算。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

(1)對數定義是？底數的範圍是？真數的範圍是？

(2) $\log_a 1 =$ ______ ，$\log_a a =$ ________ $(a>0$ ，且 $a \neq 1)$ 。

(3) $a^{\log_a N} =$ _____ $(a>0$ ，且 $a \neq 1)$ 。

(4)指數的運算法則：$a^m \cdot a^n =$ ______ $(m,n \in R)$
$(a^m)^n =$ _______ $(m,n \in R)$
$(ab)^n =$ ________ $(n \in R)$

二、新課教授：

問題 1：前面學習了對數的概念，如果看到 $\log_a N = b$ 這個式子會有何聯想？

(1) $a>0$　(2) $a \neq 1$　(3) $N>0$　(3) $a^b = N$

概念上來說，對數與指數是同一件事，從運算上它們互為逆運算的關係，既然是一種運算，自然有相應的運算法則問題 2：$\log_2 2 + \log_2 16$ 等於 $\log_2 18$ 嗎？

不等

問題 3：計算 $\log_2 2 + \log_2 16$，$\log_2 32$，發現了甚麼？$\log_2 2 + \log_2 16 = 1+4=5$

$\log_2 32 = 5$

即 $\log_2 2 + \log_2 16 = \log_2 32$

問題 4：猜想 $\log_a M + \log_a N =$ ？

問題 5：同理猜想 $\log_a M - \log_a N =$ ？

結論：

對數的運算性質：

若 $a>0$ ，$a \neq 1$ ，$M>0$ ，$N>0$ ，那麼

(1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

(2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a M^n = n\log_a M (n \in R)$

證明：(1)設 $\log_a M = p$ ， $\log_a N = q$
由對數的定義可以得
$M = a^p$ ，N= $N = a^q$
所以 $M \cdot N = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
所以 $\log_a(MN) = p + q$ ，
即證得 $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ 。

同理可證性質(2)。

(3)設 $\log_a M = p$
由對數定義可以得 $M = a^p$ ，
$M^n = a^{np}$ ，
$\log_a M^n = np$ ，

即證得 $\log_a M^n = n\log_a M$

三、例題：
例題 1：根據上面的對數運演算法則，判斷下列各題的對錯，如果錯請說明理由：
(1) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 10 = 1$ ( )
(2) $\log_2(-3)(-5) = \log_2(-3) + \log_2(-5)$ ( )
(3) $\log_{10}(-10)^2 = 2\log_{10}(-10)$ ( )
(4) $\log_a(MN) = \log_a M \cdot \log_a N$ ( )
(5) $\log_a(M \pm N) = \log_a M \pm \log_a N$ ( )
(6) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x \div \log_a y$ ( )
(7) $(\log_a x)^n = n\log_a x$ ( )

例題 2：用 $\log_a x$ ， $\log_a y$ ， $\log_a z$ 表示下列各式：

(1) $\log_a \frac{xy}{z}$ (2) $\log_a \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

解：(1) $\log_a \frac{xy}{z} = \log_a(xy) - \log_a z = \log_a x + \log_a y - \log_a z$

(2) $\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \log_a(x^2\sqrt{y}) - \log_a \sqrt[3]{z}$

$= \log_a x^2 + \log_a \sqrt{y} - \log_a \sqrt[3]{z}$

$= 2\log_a x + \dfrac{1}{2}\log_a y - \dfrac{1}{3}\log_a z$

例題 3：求下列各式的值：

(1) $\log_2(4^7 \times 2^5)$	(2) $\lg\sqrt[5]{100}$	(3) $\lg 14 - 2\lg\dfrac{7}{3} + \lg 7 - \lg 18$

解：(1) $\log_2(4^7 \times 2^5) = \log_2 4^7 + \log_2 2^5$

$= 7\log_2 4 + 5\log_2 2$

$= 7 \times 2 + 5 \times 1 = 19$

(2) $\lg\sqrt[5]{100} = \dfrac{1}{5}\lg 10^2 = \dfrac{2}{5}\lg 10 = \dfrac{2}{5}$

(3) $\lg 14 - 2\lg\dfrac{7}{3} + \lg 7 - \lg 18$

$= \lg\left(14 \div \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 \times 7 \div 18\right) = \lg\dfrac{14 \times 9 \times 7}{49 \times 18} = \lg 1 = 0$

四、鞏固練習：

課本 $P87$ ，練習 **2** ， **3** 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

六、家課：

課本 $P87$ ，習題 **2.7** ， **3** ， **4** 。

2.7.3 對數

教學目標：1.增進演算對數算式的能力；
2.能注意聽講及細心演算對數。
教學重點：1.能正確敘述並運用對數換底的性質；
2. 能正確敘述並運用對數連鎖的性質。
教學難點：能正確運用公式計算。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：

對數的運算性質：

若 $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，那麼

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

(2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(3) $\log_a M^{n}=n\log_a M(n\in R)$

二、新課教授：

(1)換底公式： $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}(c>0，c\neq 1)$

(2)連鎖公式： $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$

證明：(1)設 $\log_a b=x$， 則 $a^x=b$

兩邊取以 c 為底的對數：$\log_c a^x=\log_c b\Rightarrow x\log_c a=\log_c b$

即 $x=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

所以 $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$。

$$=\frac{\log_2 56}{\log_2 42}=\frac{\log_2(2^3\times 7)}{\log_2(2\times 3\times 7)}=\frac{3+\log_2 7}{1+\log_2 3+\log_2 7}$$

(2) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\dfrac{\lg b}{\lg a}\cdot\dfrac{\lg c}{\lg b}\cdot\dfrac{\lg a}{\lg c}=1$。

三、例題：

例題 1：若$\log_2 3 = a$，$\log_3 7 = b$，以a，b表示$\log_{42} 56$。

解：利用換底公式，取 2 當新的底數

原式$=\dfrac{\log_2 56}{\log_2 42}=\dfrac{\log_2(2^3\times 7)}{\log_2(2\times 3\times 7)}=\dfrac{3\log_2 2+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 3+\log_2 7}=\dfrac{3+\log_2 7}{1+\log_2 3+\log_2 7}$

又$\log_2 7=\log_2 3\cdot\log_3 7=a\cdot b$

所以$\log_{42} 56=\dfrac{3+ab}{1+a+b}$。

例題 2：設a，b，c，d為實數且不等於 1，由$a^2=c^3$，$c^2=e^5$，求$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d e$的值。

解：已知$\begin{cases} a^2=c^3 \\ e^5=c^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=c^{\frac{3}{2}} \\ e=c^{\frac{2}{5}} \end{cases}$

原式$=\log_a e=\log_{c^{\frac{3}{2}}} c^{\frac{2}{5}}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{2}}\log_c c=\dfrac{4}{15}$

四、鞏固練習：

(1) $\dfrac{\frac{1}{2}\lg 5+\lg\sqrt{2}-\lg 128-\lg\frac{25}{32}}{1+2\lg 8+\lg 45+\lg\frac{15}{16}-3\lg 3}$

(2) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4-\log_9 2)$

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

六、家課：

(1) 已知$\lg 2=x$及$\lg 3=y$，試以x和y表示$\lg 240$。

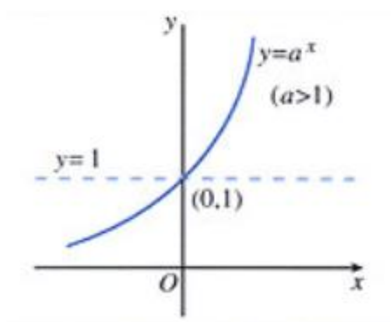
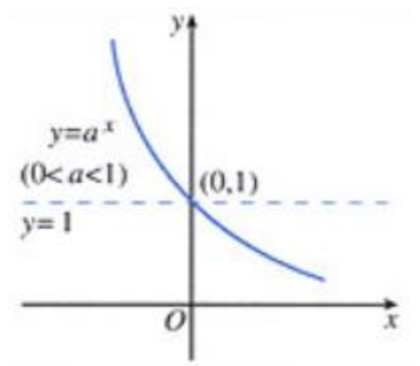
(2) 已知$\log_5 3=a$及$\log_7 5=b$，試以a和b表示$\log_{63} 25$。

(3) 計算$\log_2 3\cdot\log_7 64\cdot\log_3 5\cdot\log_5 49$。

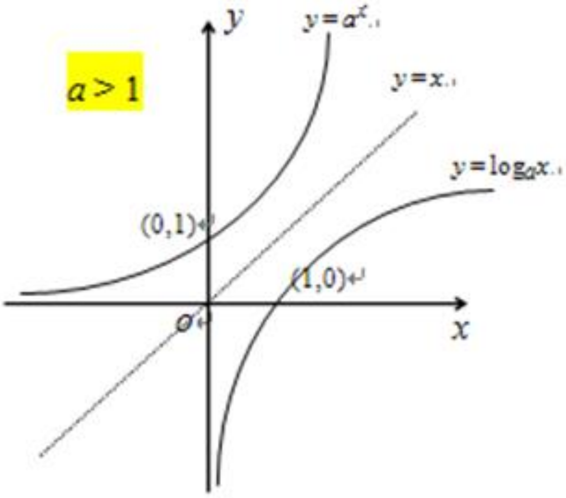
2.8.1 對數函數

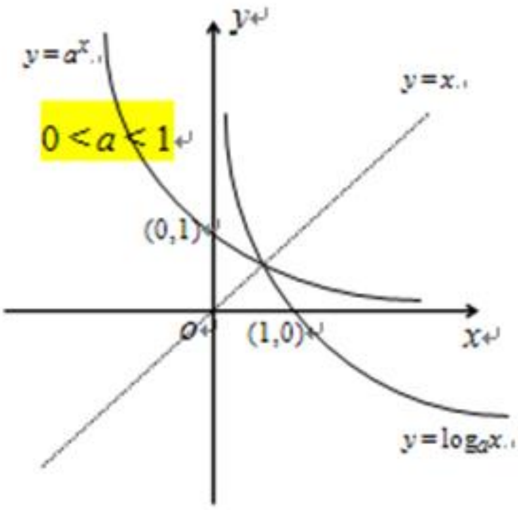
教學目標：了解對數函數的性質。
教學重點：增進圖形演練能力。
教學難點：能描繪對數函數的圖形。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
指數函數的圖像和性質：

<table>
<tr><th colspan="2">$y=a^x$</th><th>$a>1$</th><th>$0<a<1$</th></tr>
<tr><td colspan="2">圖 像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">函數性質</td><td>定義域</td><td colspan="2">$\boldsymbol{R}$</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>過點</td><td colspan="2">過點$(0,1)$，即$x=0$時，$y=1$。</td></tr>
<tr><td>單調性</td><td>在$\boldsymbol{R}$上是增函數</td><td>在$\boldsymbol{R}$上是減函數</td></tr>
</table>

二、新課教授：
問題 1：指數函數和對數函數有甚麼關係？
互為反函數
問題 2：互為反函數的函數圖像關於甚麼對稱？
關於直線$y=x$對稱
因此，只要將$y=a^x$之圖形對直線$y=x$作鏡射，
所得的像即是之圖形$y=\log_a x$





問題 3：根據反函數的概念，我們可以由指數函數來定義對數函數嗎？

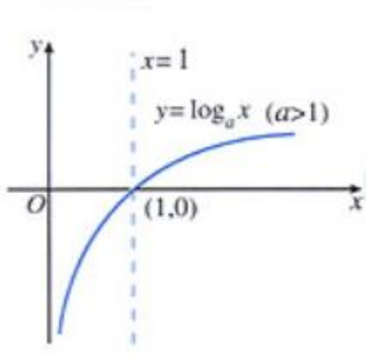
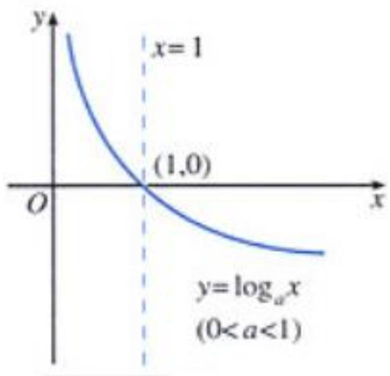
對數函數定義：

一般地，函數 $y=\log_a x\quad(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫做對數函數，它是指數函數 $y=a^x$

$(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的反函數。

問題 4：根據指數函數與對數函數為反函數填寫下表：
(提示指數函數的定義域，值域是對數函數的值域，定義域。)

$y=\log_a x$	$a>1$	$0<a<1$

<table>
<tr><td colspan="2">圖 像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">函數性質</td><td>定義域</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>過點</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>單調性</td><td></td><td></td></tr>
</table>

三、例題：

例題 1：下列哪些是對數函數？

(1) $y=-\log_3 x$	(3) $y=\lg x(x<1)$
(2) $y=\log_{(-4)} x$	(4) $y=\log_{(a-1)} x$ 其中 $(a>1)$ 且 $(a\neq 2)$

例題 2：求下列函數的定義域：

(1) $y=\log_a x^2$

(2) $y=\log_a (4-x)$

(3) $y=\log_a (9-x^2)$

解：(1)因為 $x^2>0$，即 $x\neq 0$，所以函數 $y=\log_a x^2$ 的定義域是 $\{x\mid x\neq 0\}$；

(2)因為 $4-x>0$，即 $x<4$，所以函數 $y=\log_a (4-x)$ 的定義域是 $\{x\mid x<4\}$；

(3)因為 $9-x^2>0$，即 $-3<x<3$，所以函數 $y=\log_a (9-x^2)$ 的定義域是

$\{x\mid -3<x<3\}$；

四、鞏固練習：

課本 $P94$，練習 2。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

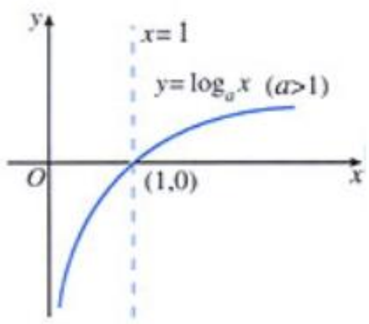
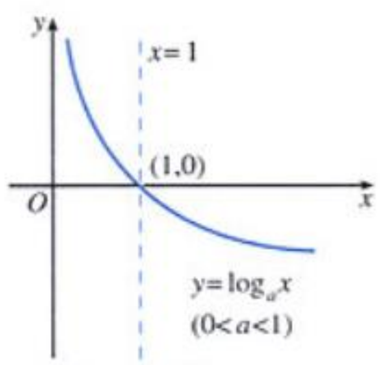
六、家課：

課本 ***P*94** ，習題**2.8** ，**1** ，**2** 。

2.8.2 對數函數

教學目標：了解對數函數圖形的變化。
教學重點：能分辨對數函數的圖形長相、及其各種特性。
教學難點：能說明不同對數函數數學式及圖形的變化關係。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
對數函數的圖像和性質：

$y=\log_a x$		$a>1$	$0<a<1$
圖 像			
函	定義域	$(0,+\infty)$	
數	值域	R	
性	過點	過點 $(1,0)$，即 $x=1$ 時，$y=0$。	
質	單調性	在 $(0,+\infty)$ 上是增函數	在 $(0,+\infty)$ 上是減函數

二、例題：
例題 1：比較下列各組數中兩個值的大小：
(1) $\log_2 3.4$，$\log_2 8.5$；
(2) $\log_{0.3} 1.8$，$\log_{0.3} 2.7$；
(3) $\log_a 5.1$，$\log_a 5.9$ $(a>0, a\neq 1)$。
解：(1)考察對數函數 $y=\log_2 x$，因為它的底數 $2>1$，所以它在 $(0,+\infty)$ 上是增函數，於是 $\log_2 3.4<\log_2 8.5$。
(2)考查對數函數 $y=\log_{0.3} x$，因為它的底數 0.3，即 $0<0.3<1$，所以它在 $(0,+\infty)$ 上是減函數，於是 $\log_{0.3} 1.8>\log_{0.3} 2.7$。
(3) 對數函數的增減性決定於對數的底數是大於 1，還是小於 1，而已知條件中並未明確指出底數 a 與 1 哪個大，因此需要對底數進行討論：
當 $a>1$ 時，函數 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函數，於是 $\log_a 5.1<\log_a 5.9$；

當$\mathbf{0<a<1}$時，函數$\mathbf{y=\log_a x}$在$\mathbf{(0,+\infty)}$上是減函數，於是$\mathbf{\log_a 5.1>\log_a 5.9}$。

問題 1：兩個同底數的對數比較大小的一般步驟是甚麼？

注：對未明確指定時，要分情況對底數進行討論來比較兩個對數的大小。

問題 2：當兩個底數不相同的對數，應如何比較其大小呢？

例題 2：比較下列各組數中兩個值的大小：

(1)$\mathbf{\log_6 7}$，$\mathbf{\log_7 6}$；

(2)$\mathbf{\log_3 \pi}$，$\mathbf{\log_2 0.8}$；

解：(1)因為$\mathbf{\log_6 7>\log_6 6=1}$

$\mathbf{\log_7 6<\log_7 7=1}$

所以$\mathbf{\log_6 7>\log_7 6}$。

(2)因為$\mathbf{\log_3 \pi>\log_3 1=0}$

$\mathbf{\log_2 0.8<\log_2 1=0}$

所以$\mathbf{\log_3 \pi>\log_2 0.8}$。

注：當不能直接進行比較時，可在兩個對數中間插入一個已知數(如 1 或 0 等)間接比較上述兩個對數的大小。

三、鞏固練習：

課本$\boldsymbol{P}$**94**，練習**3**。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

五、家課：

課本$\boldsymbol{P}$**94**，習題**2.8**，**3**，**4**。

2.9.1 函數的應用舉例

教學目標：1.掌握“增長率”、“利息”、“利潤最大”等應用問題的解法；
2.掌握根據已知條件建立函數關係式。

教學重點：根據已知條件建立函數關係式。

教學難點：數學建模意識。

教學方法：引導啟發。

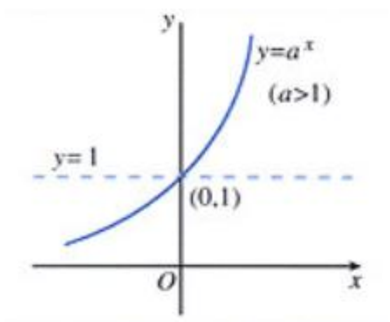
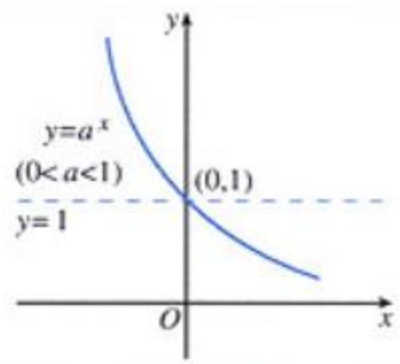
授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

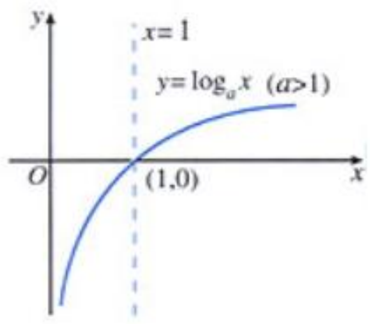
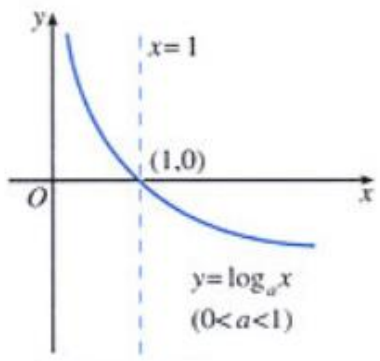
填寫以下兩表：

(1)指數函數的圖像和性質： $y=a^x\ (a>0,a\neq1)$

$y=a^x$		$a>1$	$0<a<1$
圖 像			
函數性質	定義域		
	值域		
	過點		
	單調性		

(2)對數函數的圖像和性質： $y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$

$y=\log_a x$	$a>1$	$0<a<1$

<table>
<tr><td colspan="2">圖 像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">函數性質</td><td>定義域</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>過點</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>單調性</td><td></td><td></td></tr>
</table>

二、例題：

例題 1：按複利計算利息的一種儲蓄，本金為a元，每期利率為r，設本利和為y，存期為x，寫出本利和y隨存期x變化的函數關係式.如果存入本金 1000 元，每期利率為 2.25%，試計算 5 期後本利和是多少？

解：已知本金為a元，

1 期後的本利和　$y_1 = a + a \times r = a(1+r)$

2 期後的本利和　$y_2 = a(1+r) + a(1+r)r = a(1+r)^2$

3 期後的本利和　$y_3 = a(1+r)^3$

x期後，本利和為：$y = a(1+r)^x$

將$a = 1000$元，$r = 2.25\%$，$x = 5$代入上式得

$y = 1000 \times (1+2.25\%)^5 = 1000 \times 1.0225^5$

由計算機算得：$y = 1117.68$(元)

答:複利函數式為$y = a(1+r)^x$，5 年後的本例和為 1117.68 元。

例題 2：已知某商品的價格上漲$x\%$，銷售的數量就減少$kx\%$，其中k為正常數，

(1)當$k = \dfrac{1}{2}$時，該商品的價格上漲多少，就能使銷售的總金額最大？

(2)如果適當的漲價，能使銷售總金額增加，求k的取值範圍。

解：(1)設商品現在定價a，賣出的數量為b個。

由題設：當價格上漲$x\%$時，銷售總額為$y = a(1+x)\% \cdot b(1-kx\%)$

即$y = \dfrac{ab}{10000}[-kx^2 + 100(1-k)x + 10000]$

取 $k=\frac{1}{2}$ 得， $y=\frac{ab}{10000}[-(x-50)^2+22500]$

當 $x=50$ 時， $y_{\max}=\frac{9ab}{8}$

即該商品的價格上漲 **50%** 時，銷售總金額最大。

(2)因為二次函數 $y=\frac{ab}{10000}[-kx^2+100(1-k)x+10000]$

在 $(-\infty,\frac{50(1-k)}{k}]$ 上遞增，在 $[\frac{50(1-k)}{k},+\infty)$ 上遞減

所以適當地漲價，即 $0<x<\frac{50(1-k)}{k}$

就是當 $0<k<1$，能使銷售總金額增加。

三、鞏固練習：

課本 ***P*98** ，練習 **1** ， **2** 。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

五、家課：

課本 ***P*99** ，練習 **3** ， **4** 。

課本 ***P*99** ，習題 **2.9** ， **3** 。

2.9.2 函數的應用舉例

教學目標：1.掌握“物理現象”等應用問題的解法；
2.掌握根據已知條件建立函數關係式。
教學重點：根據已知條件建立函數關係式。
教學難點：數學建模意識。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。

一、例題：
例題 1：設在海拔 x m 處的大氣壓強是 y Pa，y 與 x 之間的函數關係式是 $y=ce^{kx}$，其中 c，k 為常量，已知某地某天在海平面的大氣壓為 1.01×10^5 Pa，1000 m 高空的大氣壓為 0.90×10^5 Pa，求 600 m 高空的大氣壓強。(結果保留 3 個有效數字)。
解：將 $x=0$，$y=1.01\times10^5$；$x=1000$，$y=0.90\times10^5$，代入 $y=ce^{kx}$ 得：

$$\begin{cases} 1.01\times10^5=ce^{k\cdot0} \\ 0.90\times10^5=ce^{k\cdot1000} \end{cases}$$

得 $\begin{cases} c=1.01\times10^5 \\ 0.90\times10^5=ce^{1000k} \end{cases}$

將 $c=1.01\times10^5$ 代入 $0.90\times10^5=ce^{1000k}$ 得
$0.90\times10^5=1.01\times10^5e^{1000k}$，

所以 $k=\dfrac{1}{1000}\times\ln\dfrac{0.90}{1.01}$
計算得：$k=-1.15\times10^{-4}$

所以 $y=1.01\times10^5\times e^{-1.15\times10^{-4}x}$

將 $x=600$ 代入上述函數式得

$$y=1.01\times10^5\times e^{-1.15\times10^{-4}\times600}$$

由計算機得 $y=0.943\times10^5$ (Pa)
答：在 600 m 高空的大氣壓約為 0.943×10^5 Pa。
例題 2：設磷−32 經過一天的衰變，其殘留量為原來的 95．27%。現有 10 g 磷−32，設每天的衰變速度不變，經過 14 天衰變還剩下多少克（精確到 0.01g)？
分析：殘留量為原來的 95.27%的意思是，如果原來的磷−32 為 10 (g)，經過一天的衰變後，殘留量為 $10\times95.27\%$ (g)。

解：設 10g 磷−32 經過 x 天衰變，殘留量為 y g。依題意可以得到經過 x 天衰變，殘留量函數為 $y = 10 \times 0.9527^{x}$

故經過 14 天衰變，殘留量為 $y = 10 \times 0.9527^{14} \approx 5.07$ (g)

答：經過 14 天，磷−32 還剩下 5.07g。

二、鞏固練習：

課本 ***P*98** ，習題 **2.9** ，**1** 。

三、課堂小結：

本節課我們學習了什麼？

四、家課：

課本 ***P*99** ，習題 **2.9** ，**4** 。

2.9.A 函數的複習課

教學目標：重溫函數、反函數、指數函數及對數函數。
教學重點：熟練函數、反函數、指數函數及對數函數。
教學難點：函數的性質。
授課類型：練習課。
教學過程：

一、填充題：

(1). $y=\frac{1}{x+3}+\sqrt{6-x}$ 的定義域為 ______________________ 。

(2). $y=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-4}$ 的定義域為 ______________________ 。

(3). $y=\frac{x-1}{x+2}$ 的值域為 _________________________ 。

(4). $y=x^2+x+1$ 的值域為 ________________________ 。

(5). 已知函數 $f(2x+1)=x^2+3x-1$，則 $f(x)$ =________________________ 。

(6). $y=2x^4+6x^2+1$ 是______________(奇/偶)函數，圖像是關於 ______________對稱的。

(7). 比較兩數的大小：(a) $0.3^{-0.3}$ _____ $0.3^{-0.1}$ (b) $\log_9 5$ _____ $\log_8 9$

(@1.5%)

二、選擇題：

(1)下列函數中哪個與 $y=x$ 是同一函數？

A. $y=\sqrt{x^2}$ B. $y=\sqrt[3]{x^3}$ C. $y=\frac{x^2}{x}$ D. $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$

(2)函數 $f(x)=\log_3 x$，則 $f^{-1}(3)$ 的值為？

A. 1 B. 3 C. 9 D. 27

(3)函數 $y=ax+b$ 與 $y=3x+6$ 關於 $y=x$ 對稱，則 a，b 的值為？

A. $a=\frac{1}{3},b=-2$ B. $a=\frac{1}{3},b=2$ C. $a=3,b=-2$ D. $a=3,b=2$

三、已知 $f(x)=x^2+2$，求 $f(2)$、$f(-1)$ 及 $f(f(x))$。

四、下列函數的反函數：

(1) $y=\sqrt[3]{\frac{x+1}{3}}+2 \quad (x\in R)$

(2) $y=\frac{3x+2}{x-1} \quad (x\neq 1)$

五、判斷以下函數的奇偶性

(1) $y=x^3-x$

(2) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$

六、求下列函數之單調區間。

(1) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x}$

(2)

$y=\log_3\left(x^2+4x+3\right)$

七、判斷函數 $f(x)=\frac{1}{x}-2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函數還是減函數？並證明之。

第三章、數列

3.1.1 數列

教學目標：1.理解數列及其有關概念，理解數列和函數之間的關係；
2.理解數列的通項公式，並會用通項公式寫出數列的任意一項；
3.對於比較簡單的數列，會根據其前幾項寫出它的個通項公式。

教學重點：數列及其有關概念，通項公式的應用。

教學難點：根據一些數列的前幾項抽象、歸納數列的通項公式

教學方法：啟發式和討論式相結合，類比教學。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、情景引入：

問題 1：國際象棋的棋盤上共有 8 行 8 列，構成 64 個格子，國際象棋起源於古代印度，有這樣一個傳說。國王要獎賞國際象棋的發明者，問他有什麼要求，發明者說：“請在棋盤的第 1 格放上 1 顆麥粒，在棋盤的第 2 格放上 2 顆麥粒，在棋盤的第 3 格放上 4 顆麥粒，棋盤的第 4 格放上 8 顆麥粒，依此類推，直到第 64 格。”國王覺得這並不是很難辦到的事，就同意了。你覺得國王辦得到嗎？

學生思考得出：$1，2^1，2^2，2^3，\cdots，2^{63}$

問題 2：觀察下列一些數，它們有什麼共同等徵？

(1) $2^0，2^1，2^2，2^3，\cdots，2^{63}$

(2) $1，2，3，4，5$

(3) $5，4，3，2，1$

(4) $1，-1，1，-1，1 \ \cdots$

(5) $3，3，3，3，3，$

(6) $2，3，4，5，6，\cdots$

(7) $1，\frac{1}{2}，\frac{1}{3}，\frac{1}{4}，\frac{1}{5}，\cdots$

(8) $15，5，16，16，28$

數列：按一定次序排成的一列數。

問題 3：上題中(2) $1，2，3，4，5$和(3) $5，4，3，2，1$中是同一數列嗎?(不是，次序不一)

問題 4：(5) $3，3，3，3，3，\cdots$是數列嗎？(是，數字可重複)

數列的項：數列中的每一個數都叫做這個數列的項。

問題 5：(6) 2，3，4，5，6，…中首項是多少？6 是第幾項？

數列的一般形式可以寫成$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，其中$a_n$是數列的第 n 項。有時我們把上面的數列簡記作$\{a_n\}$。

通項公式：如果數列$\{a_n\}$的第 n 項a_n與 n 之間的關系可以用一個公式來示，那麼這個公式就叫做這個數列的通項公式。

問題 6：(7) 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，…中的通項公式是？

序號	1	2	3	4	5
	↓	↓	↓	↓	↓
項	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

問題 7：(1) 2^0，2^1，2^2，2^3，…，2^{63}中的通項公式是？

序號	1	2	3	⋯	64
	↓	↓	↓	⋯	↓
項	2^0	2^1	2^2	⋯	2^{63}

問題 8：(8) 15，5，16，16，28 有通項公式嗎？

並不是所有數列均有通項公式。

有窮數列：項數有限的數列。如(1)，(2)，(3)，(5) ，(8)。

無窮數列：項數無限的數列。如(4)，(6)，(7)。

遞增數列：從第 2 項起，每一項都大於它的前一項的數列叫做遞增數列。如(1)，(2)，(6)。

遞減數列：從第 2 項起，每一項都小於它的前一項的數列叫做遞減數列。如(3)，(7)。

從函數的觀點來看，數列可以看作是一個定義域為正整數集N^* (或它的有限子$\{1，2，\cdots n\}$)的函數當自變量從小到大依次取值時對應的一列函數值，而數列的通項公式也就是相應函數的解析式。

二、例題：

例題 1：根據下面數列$\{a_n\}$的通項公式，寫出它的前 5 項：

(1) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ；　　　　(2) $a_n = (-1)^n \cdot n$ ；

解：(1)在通項公式中依次取$n=1$，2，3，4，5，得到數列$\{a_n\}$的前 5 項為

$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{5}{6}$；

(2)在通項公式中依次取$n=1$，2，3，4，5，得到數列$\{a_n\}$的前 5 項為

-1，2，-3，4，-5。

注：在數列中出現正負正負情況，取$(-1)^n$；出現負正負正情況，取$(-1)^{n+1}$。

例題 2：寫出下面數列的一個通項公式，使它的前 4 項分別是下列各數：

(1) 2，4，6，8；
(2) 1，3，5，7；
(3) $\dfrac{2^2-1}{2}$，$\dfrac{3^2-1}{3}$，$\dfrac{4^2-1}{4}$，$\dfrac{5^2-1}{5}$；
(4) $-\dfrac{1}{1\times 2}$，$\dfrac{1}{2\times 3}$，$-\dfrac{1}{3\times 4}$，$\dfrac{1}{4\times 5}$。

解：(1)

序號	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓
項	2×1	2×2	2×3	2×4

$a_n = 2n$

注：偶數表達式為$2n$

(2)

序號	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓
項	$2\times 1-1$	$2\times 2-1$	$2\times 3-1$	$2\times 4-1$

$a_n = 2n-1$

注：比上題小 1，奇數表達式為$2n-1$。

(3)

序號	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓
項	$\dfrac{(1+1)^2-1}{1+1}$	$\dfrac{(2+1)^2-1}{2+1}$	$\dfrac{(3+1)^2-1}{3+1}$	$\dfrac{(4+1)^2-1}{4+1}$

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}$$

(4)

序號	1	2	3	4
	↓	↓	↓	↓
項	$\dfrac{(-1)^1}{1\times 2}$	$\dfrac{(-1)^2}{2\times 3}$	$\dfrac{(-1)^3}{3\times 4}$	$\dfrac{(-1)^4}{4\times 5}$

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

三、鞏固練習：

課本 ***P*****120** ，練習**2** ，**3** ，**4** 。

四、課堂小結：

數列的基本概念。

五、家課：

課本 ***P*****122** ，練習**3.1** ，**1** ，**2** 。

3.1.2 數列

教學目標：會根據遞推公式求出數列中的項，並能運用累加、累乘、待定系數等方法求數到的通項公式。

教學重點：根據數列的遞推關係式求通項公式。

教學難點：由遞推公式求通項公式。

教學方法：啟發式和討論式相結合，類比教學。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

1.寫出下列各數列的一個通項公式：

(1) 9，99，999，9999，$\cdots$；	$a_n = 10^n - 1$
(2) 3，5，9，17，33，$\cdots$；	$a_n = 2^n + 1$
(3) 1，-7，13，-19，25，-31，$\cdots$；	$a_n = (-1)^n(6n-5)$
(4) 0，1，0，1，0，$\cdots$；	$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$
(5) $\frac{2}{3}$，$\frac{4}{15}$，$\frac{6}{35}$，$\frac{8}{63}$，$\frac{10}{99}$，$\cdots$；	$a_n = \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$

二、新課教授：

問題 1：已知數列：1，2，3，4，$\cdots$，n，每一項與它的前一項有什麼關係，用式子表示？

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 1\ (n \geq 2)$

按以上式子，知道首項就可求出其它各項，這就是我們今天要學的遞推公式。

定義：已知數列$\{a_n\}$的第 1 項(或前n項)，任一項a_n與它的前一項a_{n-1}(或前n項)間的關係可以用一個公式來表示，那麼這個公式就叫做這個數列的**遞推公式**。遞推公式也是定義數列的一種方式。

問題 2：求遞推公式：$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 1 (2 \leq n \leq 7) \end{cases}$的通項公式？

即求數列4，5，6，$\cdots$，10的通項公式

所以$a_n = n + 3\ (1 \leq n \leq 7)$

三、例題：

例題 1：根據下列遞推公式寫出數列的前五項，並分別寫出它們的一個通項公

式：

(1) $a_1=0$，$a_{n+1}=a_n+(2n-1)$

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_2+2}$

解：(1) $a_1=0$，$a_2=a_1+1=1$，$a_3=a_2+3=4$，$a_4=a_3+5=9$，

$a_5=a_4+7=16$數列的前五項是0，1，4，9，16，所以數列的一個通項公式是$a_n=(n-1)^2$

(2) $a_1=1$，$a_2=\dfrac{2a_1}{a_1+2}=\dfrac{2}{3}$，$a_3=\dfrac{2a_2}{a_2+2}=\dfrac{2}{4}$，$a_4=\dfrac{2a_3}{a_3+2}=\dfrac{2}{5}$，$a_5=\dfrac{2a_4}{a_4+2}=\dfrac{2}{6}$

數列的前五項是$\dfrac{2}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{2}{6}$，所以數列的一個通項公式是$a_n=\dfrac{2}{n+1}$

例題 2：數列$\{a_n\}$的通項公式為$a_n=\dfrac{2}{n+1}$，通過等式$b_n=a_n-a_{n+1}$構造新的數列$\{b_n\}$，寫出b_n，並寫出它的前五項。

解：$b_n=\dfrac{2}{n+1}-\dfrac{2}{n+2}=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

所以$b_1=\dfrac{1}{3}$，$b_2=\dfrac{1}{6}$，$b_3=\dfrac{1}{10}$，$b_4=\dfrac{1}{15}$，$b_5=\dfrac{1}{21}$，

四、鞏固練習：

課本$P122$，練習1，2，3。

五、課堂小結：

數列的基本概念。

六、家課：

課本$P122$，練習3.1，3，4。

3.2.1 等差數列

教學目標：1.要求學生掌握等差數列的概念；
2.等差數列的通項公式，並能用來解決有關問題。
教學重點：1.能證明數列為等差數列；
2.等差數列的通項公式。
教學難點：等差數列"等差"的特點，公差是每一項(從第 2 項起)與它的前一項的差。
教學方法：啟發式和討論式相結合，類比教學。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：
問題 1：觀察下列數列，它們的共通點是？
(1) 1，3， 5，7，9，11，…
(2) 18，15，12，9，6，3， …
(3) 1，1，1，1，1，1，…
(4) 3， 0， −3，−6， −9， −12， …
共通點：從第二項起，每一項與它的前一項的差是常數。

二、新課教授：
等差數列：如果一數列從第 2 項起，每一項與它的前一項的差等於同一個常數，那麼這個數列就叫等差數列。即 $a_n - a_{n-1} = d$，$\left(n \geq 2, n \in N^*\right)$

問題 2：1， 2， 4，7， 11， 16， …此數列是等差數列嗎？(不是)
注：從第 2 項起，每一項與它的前一項的差盡管等於一個常數，這個數列不一定是等差數列。定義中"**同一個常數**"中"**同一個**"十分重要。

公差：該常數叫做等差數列的公差，公差通常用字母 d 表示。
問題 3：問題 1 中各題的公差是多少？是怎樣求得的
注：從第二項起，每一項減前一項，絕不可顛倒減數與被減數。

常數列：當 $d = 0$，數列為常數列。如(3)
遞增數列：當 $d > 0$，數列為遞增數列。如(1)。
遞減數列：當 $d < 0$，數列為遞減數列。如(2)，(4)。

問題 4：

已知等差數列 $\boldsymbol{a_1}$，$\boldsymbol{a_2}$，$\boldsymbol{a_3}$，…，$\boldsymbol{a_n}$，…

$a_2-a_1=$ ____	即	$a_2=a_1+$ ____
$a_3-a_2=$ ____		$a_3=a_2+$ ____ $=a_1+$ __ d
$a_4-a_3=$ ____		$a_4=a_3+$ ____ $=a_1+$ ___ d
$\vdots$		$\vdots$
$a_n-a_{n-1}=$ ____		$a_n=a_1+$ ______ d

由此而得到

等差數列的通項公式 1： $a_n=a_1+(n-1)d$

問題 5：由上式得 $a_1=a_n-(n-1)d$

當 $n=m$ ，得 $a_1=a_m-(m-1)d$

$a_n=a_1+(n-1)d=a_m-(m-1)d+(n-1)d=a_m+(n-m)d$

等差數列的通項公式 2： $a_n=a_m+(n-m)d$

三、例題：

例題 1：(1)求等差數列 8，5，2…的第 20 項

(2) -401 是不是等差數列 -5 ， -9 ， -13 ，…的項？如果是，是第幾項？

解：(1)由 $a_1=8$ ， $d=5-8=2-5=-3$ ， $n=20$ ，得

$a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49$

(2)由 $a_1=-5$ ， $d=-9-(-5)=-4$

得到這數列通項公式為

$a_n=-5-4(n-1)$

由題意可知，本題是要回答是否存在正整數 n ，使得

$-401=-5-4(n-1)$ 成立。解這個關於 n 的方程，得 $n=100$ ，即 -401 是這個數列的第 100 項。

例題 2：在等差數列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_5=10$ ， $a_{12}=31$ ，求 a_1 與公差 d 。

解法一：由題意可知

$\begin{cases}a_1+4d=10\\a_1+11d=31\end{cases}$ 解方程組得 $\begin{cases}a_1=-2\\d=3\end{cases}$

解法二：因為 $a_{12}=a_5+7d$

$31=10+7d$

$d=3$

又因為 $a_5=a_1+4d$

$$10 = a_1 + 4 \times 3$$

$$a_1 = -2$$

例題 3：梯子的最高一級寬 33cm，最低一級寬 110 cm，中間還有 10 級，各級的寬度成等差數列。計算中間各級的寬度。

解：由已知條件，有 $a_1 = 33$ ， $a_{12} = 110$ ， $n = 12$ ，

由通項公式，得 $a_{12} = a_1 + (12-1)d$

即 $110 = 33 + 11d$

解得 $d = 7$

因此 $a_2 = 40$，$a_3 = 47$，$a_4 = 54$，$a_5 = 61$，$a_6 = 68$，$a_7 = 75$，$a_8 = 82$，$a_9 = 89$，

$a_{10} = 96$ ， $a_{11} = 103$ 。

四、鞏固練習：

課本 $P126$ ，練習 1 ， 2 。

五、課堂小結：

兩個等差數列的通項公式，及其應用。

六、家課：

課本 $P127$ ，習題 3.2 ， 1 ， 2 ， 3 。

3.2.2 等差數列

教學目標：1.要求學生掌握等差中項的概念；
2.等差中項的公式，並能用來解決有關問題。
教學重點：1.等差中項的應用；
2.等差中項的性質。
教學難點：等差中項的性質的運用。
教學方法：啟發式和討論式相結合，類比教學。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
(1) 等差數列的通項公式 1：$a_n = a_1 + (n-1)d$
(2) 數列 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，1， …是等差數列嗎？它的通項公式是什麼？

二、新課教授：
問題 1：在以下的兩個數之間，插入一個數使這三個數成為一個等差數列：

(1) 5，______，9
(2) -6，______，6
(3) a，______，b

等差中項的概念：
如果在 a 與 b 中間插入一個數 A，使 a，A，b 成等差數列，那麼 A 叫做 a **與 b 的等差中項。**
由 a，A，b 成等差數列，得
$A - a = b - A$
所以 $A = \frac{a+b}{2}$
反過來，如果 $A = \frac{a+b}{2}$，那麼 $2A = a + b$， $A - a = b - A$，即 a，A，b 成等差數列。

問題 2：數列：2，4，6，8，10，12，14…中
8 是_____和_____的等差中項，_____和_____的等差中項，即
$a_3 + a_5 =$ ____+ ____
10 是_____和_____的等差中項，_____和_____的等差中項，即
$a_4 + a_6 =$ ____+ ____
總結：

在等差數列中，若$m+n=p+q$，則$a_m+a_n=a_p+a_q$(m，n，p，$q\in N^*$，)

三、例題：

例題 1：在等差數列$\{a_n\}$中，若$a_2+a_7=13$，$a_4=5$求a_5，a_{11}。

解：在等差數列$\{a_n\}$中

$a_2+a_7=a_4+a_5=13$

$a_5=8$

所以$d=a_5-a_4=8-5=3$

所以$a_{11}=a_4+7d=5+7\times3=26$

例題 2：等差數列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3+a_5=-12$，且$a_1\cdot a_3\cdot a_5=80$求通項a_n。

解：$a_1+a_5=2a_3$

所以$3a_3=-12$

$a_3=-4$

所以$\begin{cases}a_1a_5=-20\\ a_1+a_5=-8\end{cases}$

所以$\begin{cases}a_1=-10\\ a_5=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=2\\ a_5=-10\end{cases}$

所以$a_n=3n-13$或$a_n=-3n-+5$

四、鞏固練習：

(1)在等差數列$\{a_n\}$中，已知$a_5=10$，$a_{12}=31$，求首項a_1與公差d。

(2)在等差數列$\{a_n\}$中，若$a_3+a_8=m$，求a_5+a_6。

(3)在等差數列$\{a_n\}$中，已知$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=450$，求a_2+a_8。

五、課堂小結：

等差中項的性質，及其應用。

六、家課：

(1)在等差數列$\{a_n\}$中，若 $a_5=6$，$a_8=15$，求a_{14}。

(2)在等差數列$\{a_n\}$中，若$a_5 = a$，$a_{10} = b$，求a_{15}。

(3)在等差數列$\{a_n\}$中，若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 30$，$a_6 + a_7 + \cdots + a_{10} = 80$，求$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{15}$。

(4)在等差數列$\{a_n\}$中，若$a_1 - a_4 - a_8 - a_{12} + a_{15} = 2$，求$a_8$。

3.3.1 等差數列的前 n 項和

教學目標：1.探索並掌握等差數列的前 n 項和公式；
2.理解等差數列前 n 項和公式推導的過程；
3.能在具體的問題情境中，發現數列的等差關係並能用有關知識解決相應的問題。

教學重點：學會用公式解決一些實際問題。
教學難點：等差數列前 n 項和公式推導思路的獲得。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入
高斯的故事：
高斯－被譽為「數學王子」的德國大數學家，物理學家和天文學家。

高斯很小時就有很快的計算能力。當他還在小學讀書時，有一天，算術老師要求全班同學算出以下的算式：
1 + 2 + 3 + 4 + ...+ 98 + 99 + 100 = ?
在老師把問題講完不久，高斯就在他的小石板上端端正正地寫下答案 5050，而其他孩子算到頭昏腦脹，還是算不出來。最後只有高斯的答案是正確無誤。

原來　1 +100= 101
2 + 99 = 101
3 + 98 = 101
.
.
.
50 +51 = 101

前後兩項兩兩相加，就成了 50 對和都是 101 的配對了
即 $101 \times 50 = 5050$。

二、教授新課
問題 1：上面的問題，同學可以看出 1，2，3，⋯，99，100是什麼數列？首項是多少？公差是多少？
問題 2：計算 $1+2+3+\cdots+99+100=?$
$1 \quad + \; 2 \quad + \; 3 \quad + \; \cdots \quad + \; 99 \quad + \; 100 \qquad (1)$

100 + 99 + 98 + ⋯ + 2 + 1 (2)

把(1)+ (2)得到：$1+2+3+\cdots+99+100=\frac{100\times(100+1)}{2}=5050$

問題 2：計算 $1+2+3+\cdots+n-1+n=?$

1 + 2 + 3 + ⋯ + n-1 + n (1)

n + n-1 + n-3 + ⋯ + 2 + 1 (2)

把(1)+ (2)得到：$1+2+3+\cdots+n-1+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

等差數列$\{a_n\}$的前 n 項和：等差數列$\{a_n\}$的前 n 項和為S_n ，即

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

等差數列$\{a_n\}$的前 n 項和公式 1：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

證明：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$S_n=a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ (1)

$S_n=a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$ (2)

把(1)+ (2)得到：

$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_n+a_n)$

根據等差數列$\{a_n\}$的通項公式

$\therefore a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots\cdots$

$\therefore 2S_n=n(a_1+a_n)$

$\therefore S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

注：公式 1 中需要知邊什麼條件？

等差數列$\{a_n\}$的前 n 項和公式 2：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

$\because a_n=a_1+(n-1)d$

代入上式則 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

注：公式 2 中需要知邊什麼條件？

三、例題：

例題 1：某長跑運動員 7 天裏每天的訓練量(單位：m)是：

7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500

這位長跑運動員 7 天共跑了多少米？

分析：先觀察該 7 個數是成等差數列，應用公式 1 較為方便。

解： $n = 7$ ， $a_1 = 7500$ ， $a_7 = 10500$

$$S_7 = \frac{7 \times (7500 + 10500)}{2} = 63000$$

答：這位長跑運動員 7 天共跑了 63000 米。

例題 2：等差數列 -10 ， -6 ， -2 ， 2 ， $\cdots$ 前多少項的和是 54？

分析：此題不知 a_n 為多少，應使用公式 2。

解：設該等差數列前 n 項和為 S_n ，則 $a_1 = -10$ ， $d = -6 - (-10) = 4$ ， $S_n = 54$

$$n(-10) + \frac{n(n-1)}{2} \times 4 = 54$$

整理得 $n^2 - 6n - 27 = 0$

解得 $n_1 = 9$ ， $n_2 = -3$ (捨去)

因此等差數列 -10 ， -6 ， -2 ， 2 ， $\cdots$ 前 9 項的和是 54。

四、鞏固練習：

課本 ***P*131** ，練習**1** 。

五、課堂小結：

兩個等差數列的前 n 項和公式，及其應用。

六、家課：

課本 ***P*131** ，練習**2** ， **3** 。

課本 ***P*132** ，習題**3.3** ， **2** ， **3** ， **4** 。

3.3.2 等差數列的前 n 項和

教學目標：1.進一步熟練掌握等差數列的通項公式和前 n 項和公式；
2.了解等差數列的規律並會用它們解決一些相關問題；
3.會利用等差數列通頸公式與前項和公式研究最值問題。
教學重點：熟練掌握等差數列的求和公式。
教學難點：靈活應用求和公式解決問題。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：上節課學習了
等差數列的前 n 項和公式 1：____________________
等差數列的前 n 項和公式 2：____________________

二、例題：

例題 1：求集合 $M=\{m|m=7n,n\in N^{*}且m<100\}$中元素的個數，並求這些元素的和。

解：由 $7n<100$

得 $n<\frac{100}{7}$

即 $n<14\frac{2}{7}$

由於滿足上面不等式的正整數 n 共有 14 個,所以集合 M 中的元素共有 14 個，即 7，14，21，⋯，98。

即 $a_1=17$ ，$a_{14}=98$

$$S_n=\frac{14\times(17+98)}{2}=735$$

答：集合 M 共有 14 個元素，它們的和為 735。

例題 2：已知一個等差數列的前 10 項是 310，前 20 項的和是 1220，由此可以確定求其前 n 項和的公式嗎？

分析：把已知條件代入等差數列前 n 項和的公式後，可得到兩個關於 a_1 與 d 的關係式，然後確定 a_1 與 d ，從而得到所求前 n 項和的公式。

解：$S_{10}=310$ ，$S_{20}=1220$

得$\begin{cases} 10a_1+45d=310 \\ 20a_1+190d=1220 \end{cases}$

解方程組得$\begin{cases} a_1=4 \\ d=6 \end{cases}$

$\therefore \ S_n=4n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 6=3n^2+n$

這就是說，已知S_{10}與S_{20}可以確定這個數列的前 n 項和的公式，這個公式是

$S_n=3n^2+n$ 。

例題 3：設等差數列$\{a_n\}$的前 n 項和為S_n。已知：$a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$。
(1) 求公差的範圍；
(2) 指出S_1，S_2， $\cdots$，S_{12}中哪一個最大，並說明理由。

解：(1)依題意得$\begin{cases} S_{12}=12a_1+\dfrac{12\times 11}{2}d>0 \\ S_{13}=13a_1+\dfrac{13\times 12}{2}d<0 \end{cases}$

所以$\begin{cases} 2a_1+11d>0 \\ a_1+6d<0 \end{cases}$

因為$a_3=a_1+2d=12$所以$a_1=12-2d$代入上式

得$\begin{cases} 24+7d>0 \\ 12+4d<0 \end{cases}$

所以$-\dfrac{24}{7}<d<-3$ 。

(2)由$d<0$可知：該數列是遞減數列，所以當$1\le n\le 12$，$n\in N$中$a_n\ge 0$且

$a_{n+1}<0$時，S_n最大。因為$S_{12}=6(a_6+a_7)>0$，$S_{13}=13a_7<0$，所以$a_7<0$，

$a_6>-a_7>0$，所以在S_1，S_2， $\cdots$，S_{12}中S_6的值最大值

三、鞏固練習：

課本$P131$，練習4，5，6。

四、課堂小結：

等差數列的前 n 項和公式及其應用。

五、家課：

課本 $P132$ ，習題3.3 ，5 ，6 ，7 。

3.4.1 等比數列

教學目標：1.正確理解等比數列的定義，理解公比的概念；
2.明確一個數列是等比數列的限定條件，能根據定義判斷一個數列是等比數列。

教學重點：等比數列定義的歸納及運用。

教學難點：正確理解等比數列的定義，根據定義判斷或證明某些數列是否為等比數列。

教學方法：啟發式和討論式相結合，類比教學。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：等差數列的定義：$a_n - a_{n-1} = d$，$\left(n \geq 2, n \in N^*\right)$

等差數列是一類特殊的數列，現實生活中，除了等差數列，我們還會遇到下列一類特殊的數列。

二、情景引入：

還記得國際象棋發明者的故事嗎？得出以下一個數列

(1) 2^0，2^1，2^2，2^3，…，2^{63}

某市近十年的國內生產總值從 2000 億元開始，每年以 10%的速度增長，近十年的國內生產總值(單位：億元)分別是：

(2) 2000，2000×1.1，2000×1.1^2，…，2000×1.1^9

某種車購買時的價格是 10 萬元，每年的折舊率是 15%，這輛車各年開始時的會值(單位：萬元)分別是：

(3) 10，10×0.85，10×0.85^2，$10\times0.85^3\cdots$。

觀察數列(1)每一項起，每一項與前一項的比都等於 2；

觀察數列(2)每一項起，每一項與前一項的比都等於 1.1；

觀察數列(3)每一項起，每一項與前一項的比都等於 0.85。

按等差數列的定義，試歸納等比數列的定義。

等比數列：如果一數列從第 2 項起，每一項與它的前一項的比等於同一個常數，那麼這個數列就叫等比數列。即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q$，$\left(n \geq 2, n \in N^*\right)$

公比：該常數叫做等比數列的公比，公比通常用字母 q 表示($q \neq 0$)。

常數列：當 $q=1$，該數列為常數列。

等比數列的通項公式：$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$，$\left(a_1 \cdot q \neq 0\right)$

由等比數列的定義，有：

$$\frac{a_2}{a_1}=q$$

即 $a_2=a_1\cdot q$ ；

$a_3=$ ______ $\cdot q=$ ______ $\cdot q=$ ______ ；

$a_4=$ ______ $\cdot q=$ ______ $\cdot q=$ ______ ；

…

$a_n=$ ______ $\cdot q=$ ______ $\cdot q=$ ______ 。

疊乘法： $a_n=a_m\cdot q^{n-m}$ ， $(m<n)$

三、例題：

例題 1：判斷下列數列是否為等比數列？若是，找出公比，不是請說明理由。

(1) 1，4，16，32 。
(2) 0，2，4，6，8 。
(3) 1，-10，100，-1000，10000 。
(4) 81，27，9，3，1。
(5) a，a，a，a，a 。

例題 2：培育水稻新品種，如果第一代得到 120 粒種子，並且從第一代起，由以後各代的每一粒子都可以得到下一代的 120 粒種子，到第 5 代大約可以得到這個新品種的種子多少粒(保留兩個有效數字)？

解：依題意為等比數列， $a_1=120$ ， $q=120$

$$a_5=120\times120^{5-1}\approx2.5\times10^{10}$$

答：約可得到 2.5×10^{10} 粒。

例題 3：一個等比數列的第 3 項與第 4 項分別是 12 與 18，求它的第 1 項與第 2 項。

解：設這個等比數列的第 1 項是 a_1 ，公比是 q ，且 $a_3=12$, $a_4=18$ 那麼

$$q=\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{2}$$

$$a_3=12=a_1\cdot q$$

$$a_1\cdot\frac{3}{2}=12$$

$$a_1=\frac{16}{3}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = \frac{16}{3} \times \frac{3}{2} = 8$$

答：這個數列的第 1 項與 2 項分別是 $\frac{16}{3}$ ，8 。

四、鞏固練習：

課本 ***P*138** ，練習**1** 。

五、課堂小結：

等比數列通項公式及其應用。

六、家課：

課本 ***P*138** ，練習**2** ，**4** 。

3.4.2 等比數列

教學目標：1.理解等比數列在生活中的應用。
2.通過對等比數列概念的歸納，培養學生嚴密的思維習慣；
3.通過對等比數列的研究，逐步培養學生觀察、類比、歸納、猜想等思維能力並進一步培養學生善於思考，解決問題的能力。

教學重點：會用不同方法判斷是否等比數列，求等比中項。

教學難點：會運用公式解決問題。

教學方法：啟發式和討論式相結合，類比教學。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

	等差數列	等比數列
定義：	$a_n - a_{n-1} = d$	$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$
通項公式：	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
中項：	$A = \frac{a+b}{2}$	

二、新課教授

問題 1：按等差中項的概念，怎樣推導出等比中項？

等比中項：如果在 a 與 b 中間插入一個數 G，使 a，G，b 成等比數列，那麼 G 叫做 a 與 b 的等比中項。$G = \pm\sqrt{ab}$ (a 與 b 同號)

如果 G 是 a 與 b 的等比中項，那麼$\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$，即

$$G^2 = ab$$

$$G = \pm\sqrt{ab}$$

反過來，若 a 與 b 同號$G = \sqrt{ab}$或$G = -\sqrt{ab}$，即$G^2 = ab$，那麼 G 是 a 與 b 的等比中項。

例如：一等比數列為 2、4、8。

公比 $\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{8}{4} \Rightarrow 2$

$$G^2 = 2 \times 8 = 16$$

$G=\pm\sqrt{2\times 8}=\pm\sqrt{16}=4$

問題 2：等比數列中，如何把 a_2 以 a_1 與 a_3 表示？

$a_1=a_1$ ， $a_2=a_1\cdot q^1$ ， $a_3=a_1\cdot q^2$

又 $a_2^2=a_1\cdot a_1\cdot q^2$

$a_2^2=a_1\cdot a_3$

即 $a_2=\pm\sqrt{a_1\cdot a_3}$

問題 3：判斷是否等比數列的方法有哪幾種？

(1) 定義法：利用 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ 是否是一個與 n 無關的常數。

(2) 中項公式法：判斷 a_n 與 $a_{n+1}\cdot a_{n-1}$ 的關係。

(3) 通項公式法：判斷 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

三、例題：

例題 1：有四個數，前三個成等比數列，其積 216，後三個數成等差數列，其平方和為 56，求這四個數。

解：依題意設前三個數為 $\dfrac{a}{q}$ ， a ， aq

則 $\dfrac{a}{q}\cdot a\cdot aq=216$

得　$q=6$

應用等差數列中項公式設後三個數為 6 ， q ， $12q-6$

則 $6^2+(6q)^2+(12q-6)^2=56$

得 $q_1=\dfrac{2}{15}$ ， $q_2=\dfrac{2}{3}$

則四個數分別為 45 ， 6 ， $\dfrac{4}{5}$ ， $-\dfrac{22}{5}$ 或 9 ， 6 ， 4 ， 2 。

注：(1)等比數列中若三個數成等比數列，可以設為 a ， aq ， aq^2 或 $\dfrac{a}{q}$ ， a ， aq 。

(2)等比數列中若四個數成等比數列，不能設為 $\dfrac{a}{q^3}$ ， $\dfrac{a}{q}$ ， aq ， aq^3 因為這種設法表示公比大於零。

例題 2：已知 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 是項數相同的等比數列，求證 $\{a_n\cdot b_n\}$ 是等比數列。

證明：設數列 $\{a_n\}$ 的首項是 a_1 ，公比為 p ； $\{b_n\}$ 的首項為 b_1 ，公比為 q ，那麼

數列$\{a_n \cdot b_n\}$的第 n 項與第 n+1 項分別為$a_1 \cdot p^{n-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-1}$與$a_1 \cdot p^n \cdot b_1 \cdot q^n$，即為

$a_1 b_1 (pq)^{n-1}$與$a_1 b_1 (pq)^n$因為$\dfrac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n} = \dfrac{a_1 b_1 (pq)^n}{a_1 b_1 (pq)^{n-1}} = pq$

它是一個與 n 無關的常數，所以$\{a_n \cdot b_n\}$是一個以 pq 為公比的等比數列。

四、鞏固練習：

課本 ***P*****138** ，練習**5** 。

五、課堂小結 ：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 ***P*****138** ，習題**1** ，**6** ，**9** 。

3.5.1 等比數列的前 n 項和

教學目標：1.探索並掌握等比數列的前 n 項和公式；
2.理解等差數列前比項和公式推導的過程；
3.能在具體的問題情境中，發現數列的等比關係並能用有關知識解決相應的問題。

教學重點：學會用公式解決一些實際問題。
教學難點：等比數列前 n 項和公式推導思路的獲得。
教學方法：啟發式和討論式相結合，類比教學。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：

(1)等比數列 $\{a_n\}$ 的通項公式：$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
(2)等比中項：$G = \pm\sqrt{ab}$

二、新課教授：
回想最初學習數列時，如何求數列 $\mathbf{1}$ ，$\mathbf{2}$ ，$\mathbf{4}$ ，$\mathbf{8}$ ，…，$\mathbf{2^{62}}$ ，$\mathbf{2^{63}}$ 的和
問題 1：觀察這是什麼數列？有何特徵？
是以 1 為首項、2 為公比的等比數列的前 64 項的和：

$$\boldsymbol{S_{64} = 1+2+4+8\cdots+2^{62}+2^{63}}$$

全式乘以公比 2，則

$$\boldsymbol{2S_{64} = 2+4+8\cdots+2^{62}+2^{63}+2^{64}}$$

對比(1)式，(2)式則發現除首和尾項其餘皆相等

$\boldsymbol{S_{64} = 1+2+4+8\cdots+2^{62}+2^{63}}$	(1)
$\boldsymbol{2S_{64} = \quad 2+4+8\cdots+2^{62}+2^{63}+2^{64}}$	(2)

則(2)式減(1)式得

$$\boldsymbol{S_{64} = 2^{64} - 1}$$

上題所用的是“錯項相減法”
問題 2：試以錯項相減法推導等比數列前 n 項和公式？
設有等比數列

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，

它的前 n 項和是$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

根據等比數列的通項公式，上式可寫成

(1)式乘以 q，則得

對比(1)式，(2)式則發現除首和尾項其餘皆相等

$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}}$	(1)
$\boldsymbol{qS_n = \quad a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n}$	(2)

則(1)式減(2)式得

$\boldsymbol{(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n}$

當$q \neq 1$時，等比數列$\{a_n\}$的前 n 項和的公式(1)：$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

因為$\boldsymbol{a_1q^n = (a_1q^{n-1})q = a_nq}$

所以面的公式還可以寫成

當$q \neq 1$時，等比數列$\{a_n\}$的前 n 項和的公式(2)：$S_n = \dfrac{a_1 - a_nq}{1-q}$

注：(1)每式均有 4 個變量，知道其中 3 個可求得另一量。

(2)知道 n 時用公式(1)；知道時a_n用公式(2)

問題 3：應用公式求數列$\boldsymbol{1}$，$\boldsymbol{2}$，$\boldsymbol{4}$，$\boldsymbol{8}$，…，$\boldsymbol{2^{62}}$，$\boldsymbol{2^{63}}$的和

$\boldsymbol{a_1 = 1}$，$\boldsymbol{q = 2}$，$\boldsymbol{n = 64}$所以

$\boldsymbol{S_{64} = \dfrac{1 \times (1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1}$

問題 4：求數列3，3，3，3，3，…前 20 項和？

此題公比$\boldsymbol{q = 1}$，不可應用以上兩公式，但易知答案為$\boldsymbol{S_{20} = 20 \times 3 = 60}$

問題 5：當$\boldsymbol{q = 1}$時，如何求等比數列$\{a_n\}$的前 n 項和？

由上題得知**當$q = 1$時，等比數列$\{a_n\}$的前 n 項和的公式：$S_n = na_1$**

三、例題：

例題 1：求等比數列$\frac{1}{2}$ ，$\frac{1}{4}$ ，$\frac{1}{8}$ ，…的前 8 項的和。

解：由$a_1=\frac{1}{2}$， $q=\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$n=8$，得

$$S_8=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}$$

例題 2：求$2+2^2+2^3\cdots+2^n=?$

解：觀察此數列是$a_1=2$， $q=2^2\div2=2$ ，$a_n=2^n$的等比數列

$$S_n=\frac{2-2^n\times2}{1-2}=2^{n+1}-2$$

例題 3：求等比數列1 ，2 ，4 ，…從第 5 項到第 10 項的和。

解： $S_{10}=\frac{1\times(1-2^{10})}{1-2}=1023$

$$S_4=\frac{1\times(1-2^4)}{1-2}=15$$

$$S_{10}-S_4=1023-15=1008$$

四、鞏固練習：

課本 $P143$ ，練習1 。

五、課堂小結 ：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 $P143$ ，練習$2.(2)$，習題3.5 ，1 。

3.5.2 等比數列的前 n 項和

教學目標：1.進一步熟練掌握等比數列的通項公式和前 n 項和公式；

2.了解等比數列的規律並會用它們解決一些相關問題；

3.會利用等比數列通頸公式與前項和公式研究最值問題。

教學重點：熟練掌握等比數列的求和公式。

教學難點：靈活應用求和公式解決問題。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

等比數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和的公式：

(1) 當 $q \neq 1$ 時， $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}$
(2) 當 $q = 1$ 時， $S_n = na_1$

二、例題：

例題 1：某商場第 1 年銷售電腦 5000 台，如果平均每年的銷售量比上一年增加 10%，那麼從第 1 年起，約幾內可使總銷售量達 30000 台(保留到個位)？

解：根據題意，即 $a_1 = 5000$ ， $q = 1 + 10\% = 1.1$ ， $S_n = 30000$

$$\frac{5000(1-1.1^n)}{1-1.1} = 30000$$

$$1.1^n = 1.6$$

$$n\lg 1.1 = \lg 1.6$$

$$n = \frac{\lg 1.6}{\lg 1.1} \approx \frac{0.20}{0.041} \approx 5$$

答：約 5 年內可以使總銷售量達 30000 台。

例題 2：求和：$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^n+\dfrac{1}{y^n}\right)$ $(x \neq 0, x \neq 1, y \neq 1)$ 。

分析：上面各個括號內的式子均由兩項組成，其中各括號內的前一項與後一項分別組成等比數列，分別求出這兩個等比數列的和，就能得到所求式子的和。

解：當 $x \neq 0, x \neq 1, y \neq 1$時，

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^n+\frac{1}{y^n}\right)$$

$$=(x+x^2+\cdots+x^n)+(\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\cdots+\frac{1}{y^n})$$

$$=\frac{x(1-x^n)}{1-x}+\frac{\frac{1}{y}(1-\frac{1}{y^n})}{1-\frac{1}{y}}$$

$$=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}+\frac{y^n-1}{y^{n+1}-y^n}$$

例題 3：已知 S_n 是等比數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和，S_3，S_9，S_6 成等差數列，求證 a_2，a_8，a_5 成等差數列。

分析：由 S_3，S_9，S_6 成等差數列，得 $S_3+S_6=2S_9$，要證 a_2，a_8，a_5 成等差數列，只要證 $a_2+a_5=2a_8$

證明：若 $q=1$，則 $S_3=3a_1$，$S_6=6a_1$，$S_9=9a_1$，由 $a_1\neq 0$，得 $S_3+S_6\neq 2S_9$，與題設矛盾，所以 $q\neq 1$

由 $S_3+S_6=2S_9$，得

$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q}$$

$$q^3+q^6=2q^9$$

由 $q\neq 0$，得 $1+q^3=2q^6$

$$a_2+a_5=a_1q+a_1q^4=a_1q(1+q^3)=a_1q(2q^6)=2a_1q^7=2a_8$$

所以 a_2，a_8，a_5 成等差數列。

三、鞏固練習：

課本 ***P*143** ，練習 **3** 。

四、課堂小結 ：

本節課我們學習了什麼內容？

五、家課：

課本 ***P*143** ，習題 **3.5** ， **2** ， **5** ， **6** ， **7** 。

3.5.A 數列的複習課

教學目標：重溫數列通項公式，等差數列，等比數列。
教學重點：熟練。數列通項公式，等差數列，等比數列。
教學難點：運用數列解決問題。
授課類型：練習課。
教學過程：

一、填充：

1.寫出數列 $\frac{2^2-1}{2}$，$-\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$-\frac{5^2-1}{5}$的通項公式$a_n=$

____

2.寫出數列$\frac{2}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}$，…，的通項公式$a_n=$ ________________

3.若一個數列的通項是 $a_n=2n^2+3n$，求該數列的第 4 項為________________。

4.數列 2，4，6，8，10... 的通項a_n=________________

5.在下列各空格中填入適當的數，使得每個數列成為等差數列：

5，-1，_____，_____。

6.在下列各空格中填入適當的數，使得每個數列成為等比數列：

5，-1，_____，_____。

7. 45 與 80 的等比中項為_____。

二、解答題：

1.求等差數列 12, 7, 2, －3, ... 的通項a_n。

2.已知一個等比數列的首項a_1是 2 而公比 q 是－4，求該數列的通項a_n。

3.在一個等差數列中，$\boldsymbol{a_{21}=-16}$ 及 $\boldsymbol{a_{25}=20}$。求首項、公差及第九項。

4. 在一個等比數列中，$\boldsymbol{a_3}=5$ 及 $a_6=135$，求該數列的首項和公比。

5.設一等差數列的首項為－31，前十二項和為 -174，求公差及第十二項。

6. 求等比數列 $\frac{3}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{8}$，…從第 3 項到第 7 項的和。

7.求 3 + 12 + 21 + ... + 147 之和。

8.求 $3+3^2+...+3^n$ 之和。

三、文字題：小明開始儲蓄，計劃每天的存款為前一天的四倍，第一天 1 元，請問至少幾天，儲蓄總金額超過 300 元？(答案以對數形式表示)

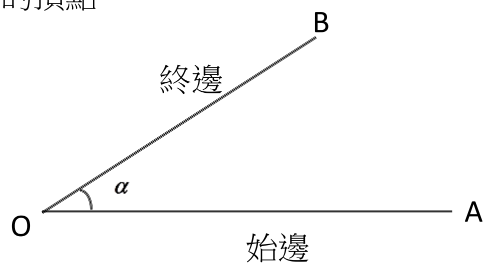
第四章、三角函數

4.1.1 角的概念的推廣

教學目標:掌握角的概念,理解“正角”“負角”“隊限角”“終邊相同的角”的含義。
教學重點：理解並掌握正角負角零角的定義，。
教學難點：掌握終邊相同的角、象限角、終邊在坐標軸上角的表示方法。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：
問題 1：初中我們學過角，那時是怎樣定義角？
從一個點出發引出的兩條射線構成的幾何圖形。
由圖形形狀來定義角，因此角的範圍是$[0^o, 360^o]$
問題 2：舉一些生活中的實例，顯示角不在範圍$[0^o, 360^o]$中。
體操運動員轉體720^o，跳水運動員向內，向外轉體1080^o
這些例子不僅不在範圍$[0^o, 360^o]$中，而且方向不同，有必要將角的概念推廣到任意角。

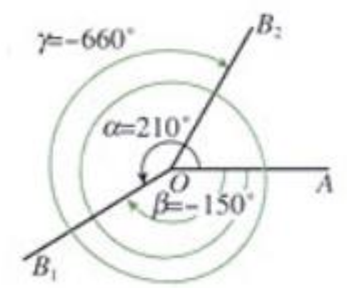
二、新課教授：
1.角的概念的推廣：
(1)“旋轉”形成角
一條射線由原來的位置 OA，繞它的端點 O 按一定方向旋轉到另一位置 OB，就形成角α。旋 轉開始時的射線 OA 叫做角α的始邊，旋轉終止的射線 OB 叫做角α的終邊，射線的端點 O 叫做角α的頂點。



(2)角的分類
正角：我們把按逆時針方向旋轉所形成的角。
負角：把按順時針方向旋轉所形成的角。
零角：當一條射線沒有作任何旋轉時所形成的角
角的概念推廣以後，它包括任意大小的正角、負角和零角。正角和負角是表示

具有相反意義的旋轉量，它的正負規定純系習慣，就好象與正數、負數的規定一樣，零角無正負，就好象數零無正負一樣，角的大小比較與實數類似。

如圖：$\alpha = 210^{O}$ ，$\beta = -150^{O}$ ，$\gamma = -660^{O}$



2.“象限角”

為了研究方便，我們往往在平面直角坐標系中來討論角，角的頂點重合於座標原點，角的始邊合於 x 軸的正半軸，角的終邊落在第幾象限，我們就說這個角是第幾象限的角。

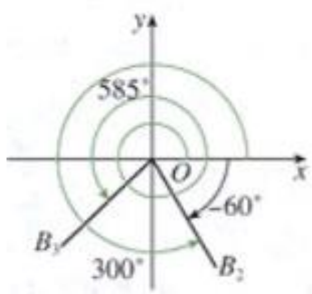
角的終邊落在坐標軸上，則此角不屬於任何一個象限

三、鞏固練習：

(1)課本 ***P*7** ，練習，**1** 。

(2)從右圖中可見

A. 30^{O} ，390^{O} ，-330^{O} 角，都是第____象限
B. 300^{O} ，-60^{O} 角，都是第____象限
C. 585^{O} 角，都是第____象限



(3)是非題：

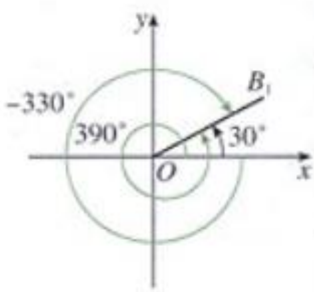
A. 1500^{O} 的角是第四象限角	( )
B. -300^{O} 的角與 160^{O} 的角的終邊相同	( )
C.相等的角的終邊一定相同	( )
D.終邊相同的角一定相等	( )
E.一個角的終邊在第幾象限，就說這是第幾象限角	( )

四、新課教授：

3.終邊相同的角

從右圖中可以看出，

(1) $390^{O} = 30^{O} +$_______ $= 30^{O} + k \cdot 360^{O}$ ($k =$ _____)
(2) $-330^{O} = 30^{O} -$_______ $= 30^{O} + k \cdot 360^{O}$ ($k =$ _____)



(3)$-1410^O = 30^O -$_______$= 30^O + k\cdot 360^O$($k=$_____)	
(4)$1830^O = 30^O +$_______$= 30^O + k\cdot 360^O$($k=$_____)	

設$S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot 360^O, k\in Z\}$

由此可見

(1)與30^O角終邊相同的角，連同30^O自己在內，都是集合S的元素；

(2)反之集合S的任一元素顯然與30^O角終邊相同。

我們有：

所有與角α終邊相同的角，連同角α在內，可以構成一個集合

$S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot 360^O, k\in Z\}$

即任一與角α終邊相同的角，都可以表示成角α與整數個周角的和。

注：(1)$k\in Z$

(2)α是任意角

(3)終邊相同的角不一定相等，但相等的角，終邊一定相同，終邊相同的角有無數多個，它們相差360^O的整數倍。

五、例題：

例題 1：在0^O到360^O範圍內，找出與下列各角終邊相同的角，並判定它們是第幾象限角。

(1) -120^O

(2) 640^O

(3) $-950^O 12'$

解：(1)$-120^O = 240^O - 360^O$

所以與-120^O角終邊相同的角是240^O角，它是第三隊限角；

(2) $640^O = 280^O + 360^O$

所以與640^O角終邊相同的角是280^O角，它是第四隊限角；

(3) $-950^O 12' = 129^O 48' - 3\times 360^O$

所以與$-950^O 12'^O$角終邊相同的角是$129^O 48'$角，它是第二隊限角。

例題 2：寫出與下列各角終邊相同的角的集合S，並把S中適合不等式$-360^O \le \beta < 720^O$的元素寫出來：

(1) 60^O

(2) -21^O

(3) $363^O 14'$

解：(1) $S=\{\beta \mid \beta=60^O+k\cdot 360^O, k\in Z\}$

S中適合$-360^O \le \beta < 720^O$的元素是

$60^O - 1\times 360^O = -300^O$

$60^O + 0\times 360^O = 60^O$

$60^O + 1\times 360^O = 420^O$

(2) -21^{o} 不是 0^{o} 到 360^{o} 的角，但仍可用上述方法來構成與 -21^{o} 角終邊相同的角的集合，即 $S=\{\beta \mid \beta=-21^{o}+k\cdot 360^{o}, k\in Z\}$

S 中適合 $-360^{o}\le\beta<720^{o}$ 的元素是

$-21^{o}+0\times 360^{o}=-21^{o}$

$-21^{o}+1\times 360^{o}=339^{o}$

$-21^{o}+2\times 360^{o}=699^{o}$

(3) $S=\{\beta \mid \beta=363^{o}14'+k\cdot 360^{o}, k\in Z\}$

S 中適合 $-360^{o}\le\beta<720^{o}$ 的元素是

$363^{o}14'-2\times 360^{o}=-356^{o}46'$

$363^{o}14'-1\times 360^{o}=3^{o}14'$

$363^{o}14'+0\times 360^{o}=363^{o}14'$

六、鞏固練習：

課本 $P7$ ，練習 **3** 。

七、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

八、家課：

課本 $P7$ ，練習 **4** ， **5** 。

課本 $P8$ ，習題 **4.1** ， **2** 。

4.1.2 角的概念的推廣

教學目標：掌握所有與角終邊相同的角(包括角)、隊限角、終邊在坐標軸上的角的表示方法，理解推廣後的角的概念。
教學重點：象限角，終邊角在坐標上的表示。
教學難點：熟練終邊相同的角、象限角、終邊在坐標軸上角的表示方法。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
(1)在 0^{O} 到 360^{O} 範圍內，找出與 -1000^{O} 終邊相同的角，並判定它們是第幾象限角
(2)寫出與 475^{O} 角終邊相同的角的集合 S ，並把 S 中適合不等式 $-360^{O} \le \beta < 360^{O}$ 的元素寫出來。

二、例題：
例題 1：寫出終邊在 y 軸上的角的集合(用 0^{O} 到 360^{O} 的角表示。)
解：在 0^{O} 到 360^{O} 範圍內，終邊在 y 軸上的角有兩個，即 90^{O} ，270^{O} 角。因此，所有與 90^{O} 角終邊相同的角構成集合

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\beta \mid \beta = 90^{O} + k \cdot 360^{O}, k \in Z\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^{O} + 2k \cdot 180^{O}, k \in Z\} \end{aligned}$$

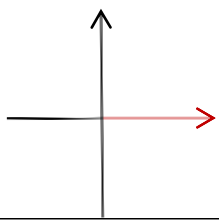
而所有與 270^{O} 角終邊相同的角構成集合

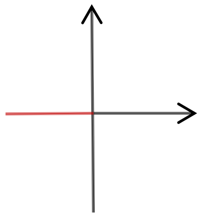
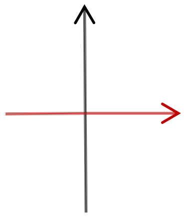
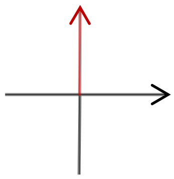
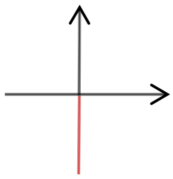
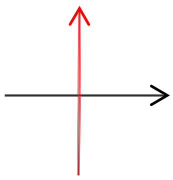
$$\begin{aligned} S_2 &= \{\beta \mid \beta = 270^{O} + k \cdot 360^{O}, k \in Z\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^{O} + 180^{O} + 2k \cdot 180^{O}, k \in Z\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^{O} + (2k+1)180^{O}, k \in Z\} \end{aligned}$$

於是，終邊在 y 軸上的角的集合

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^{O} + 2k \cdot 180^{O}, k \in Z\} \cup \{\beta \mid \beta = 90^{O} + (2k+1)180^{O}, k \in Z\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^{O} + 180^{O}\text{的偶數倍}\} \cup \{\beta \mid \beta = 90^{O} + 180^{O}\text{的奇數倍}\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^{O} + 180^{O}\text{的整數倍}\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^{O} + \mathrm{n} \cdot 180^{O}, n \in Z\} \end{aligned}$$

三、鞏固練習：1.填充：

(1)x 正半軸上的角的集合		

(2)x 負半軸上的角的集合		
(3)x 軸上的角的集合		
(4)y 正半軸上的角的集合		
(5)y 負半軸上的角的集合		
(6)y 軸上的角的集合		

例題 2：用集合的形式表示象限角。

解：第一象限角：$\{\ \alpha\ |k\cdot 360^{o}<\alpha<k\cdot 360^{o}+90^{o},k\in Z\ \}$

第二象限角：$\{\ \alpha\ |k\cdot 360^{o}+90^{o}<\alpha<k\cdot 360^{o}+180^{o},k\in Z\ \}$

第三象限角：$\{\ \alpha\ |k\cdot 360^{o}+180^{o}<\alpha<k\cdot 360^{o}+270^{o},k\in Z\ \}$

第四象限角：$\{\ \alpha\ |k\cdot 360^{o}+270^{o}<\alpha<k\cdot 360^{o}+360^{o},k\in Z\ \}$

鞏固練習：2.課本 ***P*8** ，練習 **3** 。

四、課堂小結 ：

本節課我們學習了什麼內容？

五、家課：

課本 ***P*8** ，習題**4.1** ，**5** 。

4.2.1 弧度制

教學目標：1.理解弧度制的概念以及弧長公式，掌握角度制與弧度制的換算。
2.理解角的弧度數與實數之間的一一對應關係。
3.通過教學使學生熟記特別角的弧度制的表示。
教學重點：理解弧度制的概念，掌握弧度制與角度制的換算。
教學難點：理解弧度制的概念。
教學方法：比較法，引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：

我們去買菜的時候，通常會問“多少錢一斤？”但是買生果的時候，會問“多少錢一磅？”在角度的度量裡面，也有類似的情況，一個是角度制，我們已經不再陌生，另外一個就是我們這節課要研究的角的另外一種度量制---弧度制。

問題 1：在初中幾中何中學習過角的度量，是怎樣定義的？

規定把周角的 $\frac{1}{360}$ 作為 1 度的角，用度做單位來度量角的制度叫做**角度制**。

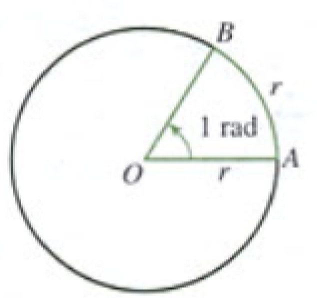
二、新課教授

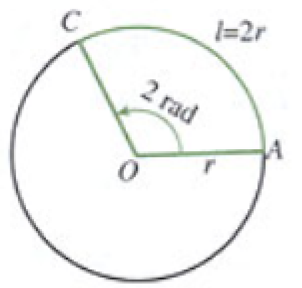
弧度制：

它的單位符號是 rad，讀作弧度。

我們把長度等於半徑長的弧所對的圓心角叫做1弧度的角,即用弧度制度量時，這樣的圓心角等於 1rad。

如下圖 $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角。如下圖 $\angle AOC$ 就是 2 弧度的角。





$\angle AOB=\frac{l}{r}=\frac{r}{r}=1$ ，$\angle AOC=\frac{l}{r}=\frac{2r}{r}=2$

問題 2：周角的弧度是多少？

$\frac{l}{r}=\frac{2\pi\ r}{r}=2\pi$

問題 3：平角的弧度是多少？

$$\frac{l}{r}=\frac{\pi\ r}{r}=\pi$$

由此可知，任一0^{o}到360^{o}的角的弧度數$x=\frac{l}{r}$必然適合不等式$0\le x<2\pi$。

問題 4：

(1)正角的弧度數是一個_____數；

(2)負角的弧度數是一個_____數；

(3)零角的弧度數是__________。

(4)角α弧度數的絕對值是__________。(其中l是以角α作為圓心角時所對弧的長，r是圓的半徑。)

注：(1)角度制、弧度制度量角的兩種不同的方法，單位、進制不同，改變的是不同的觀察、處理方法，因此結果就有所不同。

(2)用角度制和弧度制來度量零角，單位不同，但數量相同（都是 0）；

用角度制和弧度制來度量任一非零角，單位不同，量數也不同。

1.把角度換成弧度

因為周角的弧度數是2π，而角度制下它是360^{o}，所以

$$360^{o}=2\pi\ \ rad$$

$$180^{o}=\pi\ \ rad$$

$$1^{o}=\frac{\pi}{180}rad\approx 0.01745\ \ rad$$

2.把弧度換成角度

$$1\ \ rad=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{o}\approx 57.30^{o}=57^{o}18'$$

三、例題：

例題 1：把$67^{o}30'$化成弧度。

解：因為$67^{o}30'=\left(67\frac{1}{2}\right)^{o}$，所以

$$67^{o}30'=\frac{\pi}{180}rad\times 67\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\pi\ \ rad$$

例題 2：把 $\frac{3}{5}\pi\ rad$ 化成度。

解：$\frac{3}{5}\pi\ rad=\frac{3}{5}\times 180^{o}=108^{o}$

例題 3：計算：

(1) $\sin\frac{\pi}{4}$

(2) $\tan 1.5$

解：(1)因為 $\frac{\pi}{4}=45^{o}$ ，所以

$\sin\frac{\pi}{4}=\sin 45^{o}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)因為 $50.30^{o}\times 1.5=85.95^{o}=85^{o}57'$ ，所以

$\tan 1.5\approx\tan 85^{o}57'=14.12$

注：

(1)用弧度表示角的時候，“弧度”二字或“rad”通常略去，例如：2 表示 2 rad，

$\sin\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}\ rad$

(2)熟記下表。

一些特殊角的度數與弧度數的對應表：

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

四、鞏固練習：

課本 $P12$ ，練習 **1** ， **2** 。

五、課堂小結 ：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 $P13$ ，習題 **4.2** ， **2** ， **3** ， **4** ， **6** 。

4.2.2 弧度制

教學目標：使學生通過弧度制的學習，理解並認識到角弧度制都是對角度量的方法 ，二者是辨證統一的，不是弧立、割裂的關係。
教學重點：理解弧度制的概念，掌握弧度制與角度制的換算。
教學難點：弧度制的運用。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：

(1)

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

(2)

$\mathbf{360^{o} =}$ _______ $\boldsymbol{rad}$

$\boldsymbol{\pi\ rad =}$ _______ ^{o}

$\mathbf{1^{o} =}$ __________ $\boldsymbol{rad}$

$\mathbf{1}\ \boldsymbol{rad}$ _________ ^{o}

二、新課教授：

根據公式$\boldsymbol{|\alpha| = \frac{l}{r}}$，可以得到$\boldsymbol{l = |\alpha| r}$

這就是說，**弧長等於弧所對圓心角(的弧度數)的絕對值與半徑的積。**

這一弧長公式比采用角度制時的相應公式$\boldsymbol{l = \frac{n\pi\ r}{180}}$簡單。

三、例題：

例題 1：利用弧度製證明扇形面積公式$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} lR}$，其中$\boldsymbol{l}$是扇形的弧長，$\boldsymbol{R}$是圓形的半徑。

證：如圖：圓心角為$1rad$的扇形的面積為$\boldsymbol{\frac{1}{2\pi}\pi R^2}$，而弧長為$l$的扇形的圓心角的

大小為 $\frac{l}{R}rad$ ，所以它的面積 $S=\frac{l}{R}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\pi\cdot R^2=\frac{1}{2}lR$

例題 2：將下列各角化成 0 到 2π 的角加上 $2k\pi(k\in Z)$ 的形式：

(1) $\frac{19}{3}\pi$

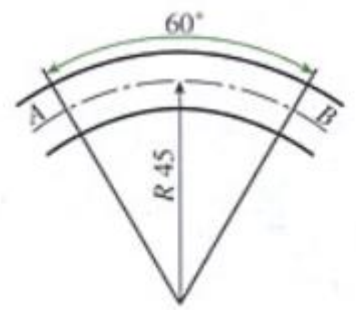
(2) -315^O

解：(1) $\frac{19}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+6\pi$

(2) $-315^O=45^O-360^O=\frac{\pi}{4}-2\pi$

例題 3：求圖中公路彎道處弧 AB 的長 l 。(精確到 1m。圖中長度單位：m)

解： 因為， $60^O=\frac{\pi}{3}$ 所以



$l=|\alpha|\cdot R=\frac{\pi}{3}\times 45\approx 3.14\times 15\approx 47(m)$

答：彎道處 AB 的長約為 47m。

四、鞏固練習：

課本 $P12$ ，練習 8 ， 9 。

五、課堂小結 ：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 $P13$ ，習題 4.2 ， 9 ， 10 ， 12 。

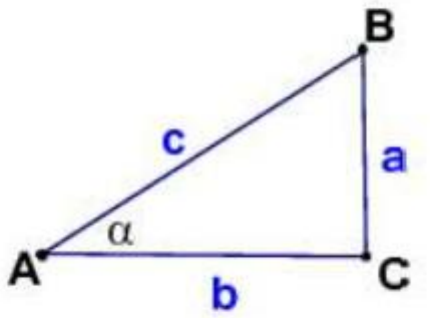
4.3.1 任意角的三角函數

教學目標：理解任意角的三角函數的定義；
2.會求任意角的三角函數值；
3.體會類比，數形結合的思想。
教學重點：理解任意角的三角函數的定義
教學難點：從函數的角度理解三角函數。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
問題 1：在初中我們學習了銳角三角函數，它是以銳角為自變量，邊的比值為函數值的三角函數：

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cot\alpha = \frac{a}{b}$$



二、新課教授：
定義：設 α 是一個任意角，在 α 的終邊上任取(異於原點的)一點 $P(x, y)$

則它與原點的距離是 $r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}>0$ ，那麼

比值 $\frac{y}{r}$ 叫做 α 的正弦　　記作：　$\sin\alpha=\frac{y}{r}$

比值 $\frac{x}{r}$ 叫做 α 的餘弦　　記作：　$\cos\alpha=\frac{x}{r}$

比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切　　記作：　$\tan\alpha=\frac{y}{x}$

比值 $\frac{x}{y}$ 叫做 α 的餘切　　記作：　$\cot\alpha=\frac{x}{y}$

比值 $\frac{r}{x}$ 叫做 α 的正割　　記作：　$\sec\alpha=\frac{r}{x}$

比值 $\frac{r}{y}$ 叫做 α 的餘割　　記作：　$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

問題 2：若點 P 在 α 的終邊上的位置改變，上述六個比值會否改變？
根據相似三角形的知識，對於終邊不在座標軸上確定的角 α ，上述六個比值都

不會隨 P 點在 α 的終邊上的位置的改變而改變。

問題 3：當角 α 的終邊在縱軸上時，上述六個比值是否有意義？

即 $\alpha = k\pi + \dfrac{\pi}{2}(k \in Z)$ 時，終邊上任意一點的橫座標 X 都為 0，所以 $\tan\alpha$，$\sec\alpha$ 無意義。

問題 4：當角 α 的終邊在橫軸上時，上述六個比值是否有意義？

即 $\alpha = k\pi(k \in Z)$ 時，終邊上任意一點的橫座標 Y 都為 0，所以 $\cot\alpha$ ，$\csc\alpha$ 無意義。

除此之外，對於確定的角 α ，上面六個比值都是唯一確定的實數，這就是說，正弦、餘弦，正切，餘切、正割、餘割都是以角為自變量，以比值為函數值的函數。

以上六種函數，統稱為**三角函數**。

問題 5：現在討論三角函數的定義域？

正弦函數：$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$ ，因為 $r > 0$，所以 $\dfrac{y}{r}$ 恆有意義，也就是說 $\sin\alpha$ 恆有意義，所以正弦函數的定義域是 R 。

餘弦函數：的定義域是 R 。

正切函數：$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$ ，因為 $x = 0$ 時，$\dfrac{y}{x}$ 無意義。即當且僅當 $\alpha = k\pi + \dfrac{\pi}{2}(k \in Z)$ 時，$\dfrac{y}{x}$ 無意義，所以正切函數的定義域是 $\alpha \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}(k \in Z)$。其它類同，即有

三角函數	定義域
$\sin\alpha$	R
$\cos\alpha$	R
$\tan\alpha$	$\left\{ \alpha \mid \alpha \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$
$\cot\alpha$	$\left\{ \alpha \mid \alpha \neq k\pi, k \in Z \right\}$
$\sec\alpha$	$\left\{ \alpha \mid \alpha \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$
$\csc\alpha$	$\left\{ \alpha \mid \alpha \neq k\pi, k \in Z \right\}$

三、例題：

例題 1：已知角 α 終邊經過點 $P(2,-3)$ ，求 α 的六個三角函數值。

解：因為 $x = 2$ ， $y = -3$ ，所以

$r=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

於是$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}$

$\cot\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{2}{3}$

$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{\sqrt{13}}{3}$

例題 2：求下列各角的六個三角函數值：

(1) 0

(2) π

(3) $\frac{3\pi}{2}$

解：(1)因為當$\alpha=0$時，$x=r$，$y=0$，所以

$\sin 0=0$　　$\cos 0=1$

$\tan 0=0$　　$\cot 0$不存在

$\sec 0=1$　　$\csc 0$不存在

(2)因為當$\alpha=\pi$時，$x=-r$，$y=0$，所以

$\sin\pi=0$　　$\cos\pi=-1$

$\tan\pi=0$　　$\cot\pi$不存在

$\sec\pi=-1$　　$\csc\pi$不存在

(3)因為當$\alpha=\frac{3\pi}{2}$時，$x=0$，$y=-r$，所以

$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$　　$\cos\frac{3\pi}{2}=0$

$\tan\frac{3\pi}{2}$不存在　　$\cot\frac{3\pi}{2}=0$

$\sec\frac{3\pi}{2}$不存在　　$\csc\frac{3\pi}{2}=-1$

四、鞏固練習：填寫下表：

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度數											
$\sin\alpha$											
$\cos\alpha$											
$\tan\alpha$											
$\cot\alpha$											
$\sec\alpha$											
$\csc\alpha$											

五、課堂小結 ：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 ***P*21**，練習 **2** 。

課本 ***P*22** ，習題 **4.3** ， **3** 。

4.3.2 任意角的三角函數

教學目標：1.掌握任意角的正弦、餘弦、正切的定義；
2.掌握正弦、餘弦、正切的定義域，和這三種函數在各象限的符號。
教學重點：任意角的正弦、餘弦、正切的定義域。
教學難點：任意角的正弦、餘弦、正切這三種函數在各象限的符號。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

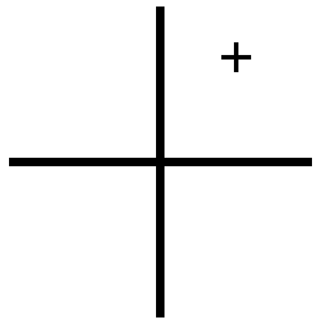
一、溫習舊知識：
設α是一個任意角，在α的終邊上任取(異於原點的)一點$P(x, y)$
則它與原點的距離是$r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}>0$，那麼

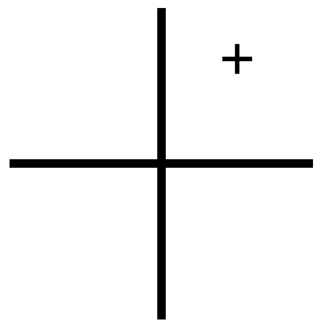
$\sin\alpha=$ ——	互為	$\csc\alpha=$ ——
$\cos\alpha=$ ——	⟷	$\sec\alpha=$ ——
$\tan\alpha=$ ——	倒數	$\cot\alpha=$ ——

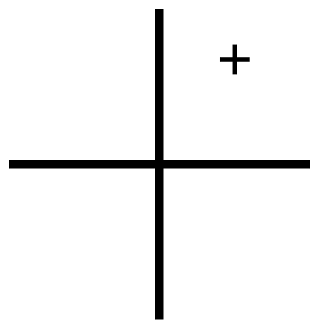
二、新課教授：
問題 1：由上題所知$\sin\alpha$和$\csc\alpha$，$\cos\alpha$和$\sec\alpha$，$\tan\alpha$和$\cot\alpha$正負號相同嗎？
相同，因為$\sin\alpha$和$\csc\alpha$，$\cos\alpha$和$\sec\alpha$，$\tan\alpha$和$\cot\alpha$均互為倒數。
所以只需討論$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$在不同象限的符號。

問題 2：三角函數的符號由什麼來決定？
由定義來分析因為$r>0$，所以只需看x，y的符號即可。

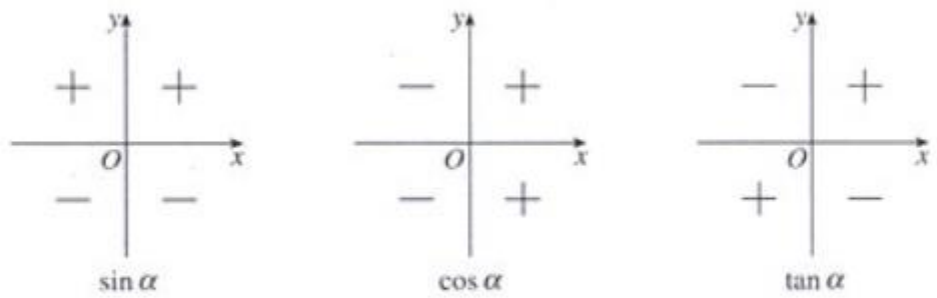
問題 3：填寫下表：

$\sin\alpha=\frac{y}{r}\,(r>0)$		結論：	圖形：
第一象限 $x>0$，$y>0$。	$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{+}{+}$	+	
第二象限 x__0，y__0。	$\sin\alpha=\frac{y}{r}=$——		
第三象限 x__0，y__0。	$\sin\alpha=\frac{y}{r}=$——		
第四象限 x__0，y__0。	$\sin\alpha=\frac{y}{r}=$——		

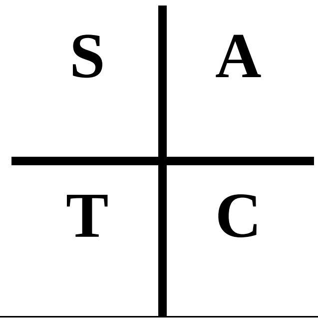
$\cos\alpha=\frac{x}{r}\ (r>0)$		結論：	圖形：
第一象限 $x>0$，$y>0$。	$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{+}{+}$	+	
第二象限 x__0，y__0。	$\cos\alpha=\frac{x}{r}=$——		
第三象限 x__0，y__0。	$\cos\alpha=\frac{x}{r}=$——		
第四象限 x__0，y__0。	$\cos\alpha=\frac{x}{r}=$——		

$\tan\alpha=\frac{y}{x}\ (r>0)$		結論：	圖形：
第一象限 $x>0$，$y>0$。	$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{+}{+}$	+	
第二象限 x__0，y__0。	$\tan\alpha=\frac{y}{x}=$——		
第三象限 x__0，y__0。	$\tan\alpha=\frac{y}{x}=$——		
第四象限 x__0，y__0。	$\tan\alpha=\frac{y}{x}=$——		

圖形：



綜合為：

		圖形：
A 代表 ALL	第一象限全正	
S 代表 $\sin\alpha$	第二象限只有 $\sin\alpha$ 為正，其餘為負	
T 代表 $\tan\alpha$	第三象限只有 $\tan\alpha$ 為正，其餘為負	
C 代表 $\cos\alpha$	第四象限只有 $\cos\alpha$ 為正，其餘為負	

注：熟記上圖。

由三角函數的定義，還可以知道：**終邊相同的角的同一三角函數的值相等**。

誘導公式一：

$$\sin(\alpha + k\cdot 360^{o}) = \sin\alpha \text{，}$$

$$\cos(\alpha + k\cdot 360^{o}) = \cos\alpha \text{ ,}$$

$$\tan(\alpha + k\cdot 360^{o}) = \tan\alpha \text{，其中 } k \in Z \text{ 。}$$

利用公式一，可以把求任意角的三角函數值，轉化為求 0^{o} 到 360^{o} 的三角函數值。

三、例題：

例題 1：確定下列三角函數值的符號：

(1) $\cos 250^{o}$

(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

(3) $\tan\left(-672^{o}\right)$

(4) $\tan\frac{11\pi}{3}$

解：(1)因為 250^{o} 是第三象限角，所以 $\cos 250^{o} < 0$ ；

(2) 因為$-\frac{\pi}{4}$是第三象限角，所以$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0$；

(3) 因為$\tan\left(-672^{o}\right)=\tan(48^{o}-2\times 360^{o})$

$$=\tan 48^{o}$$

而48^{o}是第一象限角，所以$\tan\left(-672^{o}\right)>0$；

(4) 因為$\tan\frac{11\pi}{3}=\tan\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi\right)=\tan\frac{5\pi}{3}$

而$\frac{5\pi}{3}$是第一象限角，所以$\tan\frac{11\pi}{3}<0$。

例題 2：求證角θ為第三象限角的充分必要條件是$\begin{cases}\sin\theta<0\\ \tan\theta>0\end{cases}$

證明：必要性：因為θ為第三象限角

所以$\begin{cases}\sin\theta<0\\ \tan\theta>0\end{cases}$

充份性：因為$\sin\theta<0$，所以θ角終邊可能位於第三或第四象限，也可能位於 Y 軸的非半軸上；

又因為$\tan\theta>0$，所以θ角終邊可能位於第一或第三象限；

所以θ角終邊只能位於第三象限。

例題 3：求下列三角函數值：

(1) $\sin 1480^{o}10'$

(2) $\cos\frac{9\pi}{4}$

(3) $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

解：(1) $\sin 1480^{o}10'=\sin(40^{o}10'+4\times 360^{o})$

$$=\sin 40^{o}10'=0.6451$$

(2) $\cos\frac{9\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3) $\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}-2\pi\right)$

$$=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

四、鞏固練習：

課本$P21$，練習4。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 ***P*22**，習題**4.3**，**4**，**8**。

4.4.1 同角三角函數的基本關係式

教學目標：1.掌握同角三角函數的基本關係式，理解同角公式都是恆等式的特定意義；

2.通過運用公式的訓練過程，培養學生解決三角函數求值、化簡、恆等式證明的解題技能，提高運用公式的靈活性。

教學重點：同角三角函數的基本關係式。

教學難點：已知某角的一個三角函數值，求它的其餘各三角函數值時，正負號的選擇。

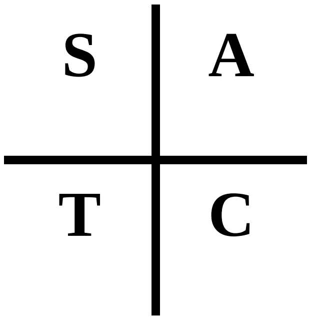
教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

(1)三角函數的符號。



(2)誘導公式一：

$\sin(\alpha+k\cdot 360^{O})=\sin\alpha$，

$\cos(\alpha+k\cdot 360^{O})=\cos\alpha$,

$\tan(\alpha+k\cdot 360^{O})=\tan\alpha$，其中 $k\in Z$ 。

二、新課教授：

根據三角函數的定義，可以探論同角三角函數間的一些基本關係。

由式子 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$ $\quad\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$ $\quad\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$ $\quad\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$

可以看出：

(1)當 $\alpha\neq k\pi$ 且 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$時，	$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=$ ——·—— = ____
(2) 當 $\alpha\neq k\pi$ $(k\in Z)$時，	$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$ ——÷—— = ——×—— = ___ = ___
(3)又通過 $x^2+y^2=r^2$，	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(-\right)^2+\left(-\right)^2=$ —— = ___

類似地，有同角的基本三角關係式如下

平方關係： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\quad\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$ $\quad\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$

商數關係：	$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$	$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$	
倒數關係	$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$	$\csc\alpha\cdot\sin\alpha=1$	$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1$

這是八個基本的三角關係式，除特殊注明況外，也都假定是在使兩邊都有意義的情況下的恆等式。

注：強調同角。

三、例題：

例題 1：已知$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，並且α是第二象限角，求$\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\cot\alpha$的值。

解：因為$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

又因為α是第二象限角，所以$\cos\alpha<0$。於是

$$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}-\frac{3}{5}$$

從而$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{3}{4}$$

例題 2：已知$\cos\alpha=-\dfrac{8}{17}$，求$\sin\alpha$，$\tan\alpha$的值。

解：因為$\cos\alpha<0$，且$\cos\alpha\neq 1$，所以α是第二或第三象限角。
如果α是第二象限角，那麼

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{15}{17}\times\left(-\frac{17}{8}\right)=-\frac{15}{8}$$

例題 3：已知$\tan\alpha$為非零實數，用$\tan\alpha$表示$\sin\alpha$，$\cos\alpha$。

解：因為$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

又因為$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，所以

$$\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$$

於是$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+1$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{\tan^2\alpha+1}$$

由$\tan\alpha$為非零實數，可知角α的終邊不在座標軸上。從而

$$\cos\alpha=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, & \text{當}\alpha\text{為第一、第四隊限角，}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, & \text{當}\alpha\text{為第二、第三隊限角；}\end{cases}$$

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\tan\alpha$$

$$\sin\alpha=\begin{cases}\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, & \text{當}\alpha\text{為第一、第四隊限角，}\\ -\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, & \text{當}\alpha\text{為第二、第三隊限角；}\end{cases}$$

四、鞏固練習：

課本 ***P*29** ，練習**2** 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 ***P*29** ，練習**1** ，**3** ，**4** 。

4.4.2 同角三角函數的基本關係式

教學目標：通過運用公式的訓練過程，培養學生解決三角函數求值、化簡、恆等式證明的解題技能，提高運用公式的靈活性；

教學重點：三角函數式的化簡。

教學難點：用不同的方法證明三角恆等式。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

同角三角函數的基本關係式：

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　　$\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$　　$\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$　　$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$

$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$　　$\csc\alpha\cdot\sin\alpha=1$　　$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1$

二、例題：

例題 1：化簡：$\sqrt{1-\sin^2 440^O}$

解：原式$=\sqrt{1-\sin^2(360^O+80^O)}=\sqrt{1-\sin^2 80^O}=\sqrt{\cos^2 80^O}=\cos 80^O$

例題 2：求證：$\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

證法 1：由$\cos x\neq 0$，知$\sin x\neq -1$，所以$1+\sin x\neq 0$，於是

左邊$=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$

$=\dfrac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=$右邊

所以原式成立。

證法 2：因為$(1-\sin x)(1+\sin x)$

$=1-\sin^2 x=\cos^2 x=\cos x\cdot\cos x$

且$1-\sin x\neq 0$，$\cos x\neq 0$，所以

$$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

證法 3：因為 $\frac{\cos x}{1-\sin x}-\frac{1+\sin x}{\cos x}$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2 x-(1-\sin^2 x)}{(1-\sin x)\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2 x-\cos^2 x}{(1-\sin x)\cos x}=0$$

所以 $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

注：證明一個等式，可以從它的任何一邊開始，證得它等於另一邊；還可以先證得另一個等式成立，從而推出需要證明的等式成立。

例題 3：已知 $\tan\alpha=2$，求 $\frac{\sin\alpha+\cos x}{\sin x-\cos\alpha}$ 的值。

解：$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\cdot\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{2+1}{2-1}=3$

三、鞏固練習：

課本 $P29$，練習 5。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

五、家課：

1.已知 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，求 $\frac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{5\sin\alpha+2\cos\alpha}$ 和 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$ 的值。

課本 $P30$，習題 4.4，5，6，8。

4.5.1 正弦、餘弦的誘導公式

教學目標：1.了解任意角的正弦、餘弦函數概念；
2.理解正弦、餘弦函數的幾何意義；
教學重點：正弦、餘弦函數的概念和誘導公式，及其性質。
教學難點：正弦、餘弦函數的誘導公式運用和性質應用。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
誘導公式一：

$\sin(\alpha + k\cdot 360^{o}) = \sin\alpha$，

$\cos(\alpha + k\cdot 360^{o}) = \cos\alpha$,

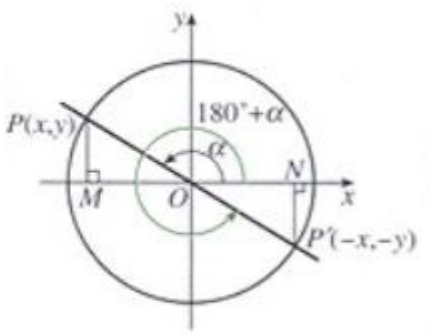
$\tan(\alpha + k\cdot 360^{o}) = \tan\alpha$，其中 $k \in Z$ 。

二、情景引入：
問題 1：我們已經學過誘導公式一，有了它就可以把任一角的三角函數求值問題，轉化為 0^{o} 到 360^{o} 間角的三角函數值問題。如求 $\cos(-330^{o})$ 的值。

$$\cos(-330^{o}) = \cos(-330^{o} + 360^{o}) = \cos 30^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

問題 2：那麼能否再把 0^{o} 到 360^{o} 間的角的三角函數求值，繼續化為我們熟悉的 0^{o} 到 90^{o} 間的角的三角函數求值問題呢？如求 $\cos 240^{o}$ 的值。

三、新課教授



已知任意角 α 終邊與單位圓相交於點 $P(x, y)$ 。由於 $180^{o} + \alpha$ 角就是角 α 終邊的反向延長線，角 $180^{o} + \alpha$ 的終邊與單位圓的交點 P' 與點 P 關於原點 O 對稱，由此可知，點 P' 的座標是 $(-x,-y)$，又因為單位圓半徑 $r = 1$，由正弦、餘弦函數的定義，可得

$\sin\alpha = y$ 　　　　$\cos\alpha = x$

$\sin(180^{o} + \alpha) = -y$ 　　　　$\cos(180^{o} + \alpha) = -x$

所以我得到

誘導公式二：

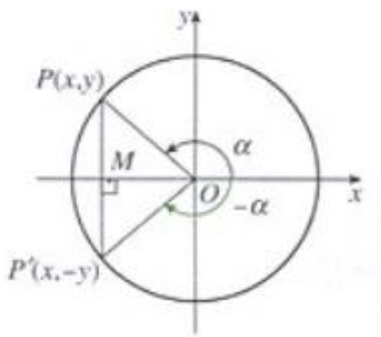
$\sin(180^{O}+\alpha)=-\sin\alpha$，

$\cos(180^{O}+\alpha)=-\cos\alpha$，

$\tan(180^{O}+\alpha)=\tan\alpha$ 。

應上題 $\cos 240^{O}=\cos(180^{O}+60^{O})=-\cos 60^{O}=-\frac{1}{2}$

問題 3：仿照以上做法，觀察右圖，同學可得出什麼結論？ $P(x,y)$， $P'(x,-y)$ 又因為單位圓半徑 $r=1$，由正弦、餘弦函數的定義，可得



$\sin(-\alpha)=-y$ $\cos(-\alpha)=x$

誘導公式三：

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$,

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$,

$\tan(-\alpha)=-tan\alpha$ 。

四、例題：

例題 1：求下列三角函數值：

(1) $\cos 225^{O}$

(2) $\sin\frac{11}{10}\pi$

解：(1) $\cos 225^{O}=(180^{O}+45^{O})=-\cos 45^{O}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\sin\frac{11}{10}\pi=\sin\left(\pi+\frac{1}{10}\pi\right)=-\sin\frac{1}{10}\pi=-\sin 18^{O}=-0.3090$

例題 2：求下列角函數值：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

(2) $\cos\left(-70^{O}6'\right)$

解：(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\left(-70^{O}6'\right)=\cos 70^{O}6'=0.5529$

例題 3：求下列角函數值：

(1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

(2) $\cos\left(-240^{O}12'\right)$

解：(1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(2) $\cos\left(-240^{O}12'\right)=\cos 240^{O}12')$

$=\cos(180^{O}+60^{O}12')$

$=-\cos 60^{O}12'=-0.4970$

注：步驟：

(1)負角的正弦、余弦函數化為正角的正弦、余弦函數

(2)化為銳角的正弦、余弦函數

五、鞏固練習：

課本 ***P*33** ，練習**1** ， **2** 。

六、課堂小結：

求三角函數值的步驟？

七、家課：

課本 ***P*33** ，練習**3** ， **4** 。

4.5.2 正弦、餘弦的誘導公式

教學目標：掌握正弦、餘弦函數的誘導公式及其推演過程

教學重點：理解並掌握誘導公式運用誘導公式求三角函數值，化簡或證明三角函數式。

教學難點：掌握利用數形結合思想分析問題、解決問題的技能。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

(1)誘導公式二：	(2)誘導公式三：
$\sin(180^{o}+\alpha)=-\sin\alpha$ ，	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ ，
$\cos(180^{o}+\alpha)=-\cos\alpha$ ，	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ ，
$\tan(180^{o}+\alpha)=\tan\alpha$ 。	$\tan(-\alpha)=-tan\alpha$ 。

二、新課教授

問題 1：我們學習了公式二和三，能否推出$180°-\alpha$與α的三角函數之間的關係？

因為$\sin(180°-\alpha)=\sin[180°+(-\alpha)]$

$=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(180°-\alpha)=\cos[180°+(-\alpha)]$

$=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$

可得

誘導公式四：

$\sin(180^{o}-\alpha)=\sin\alpha$ ，

$\cos(180^{o}-\alpha)=-\cos\alpha$ ，

$\tan(180^{o}-\alpha)=-tan\alpha$ 。

問題 2：同學還可利用公式一和公式自己推導$360°-\alpha$與α的三角函數之間的關係？

誘導公式五：

$\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$ ，

$\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha$ ，

$\tan(360°-\alpha)=-tan\alpha$ 。

五組誘導公式可概括為：

$\alpha + k \cdot 360°\ (k \in Z)$，$-\alpha$，$180° \pm \alpha$，$360° - \alpha$的三角函數值，等於$\alpha$的同名函數值，前面加上一個把$\alpha$看成銳角時原函數值的符號。簡言之，**函數名不變，符號看象限**。

三、例題：

例題 1：求下列三角函數值：

(1) $\cos(-150°15')$

(2) $\sin\frac{11}{6}\pi$

解：(1) $\cos(-150°15') = \cos(150°15')$

$= \cos(180° - 29°45')$

$= -\cos 29°45'$

$= -0.8682$

(2) $\sin\frac{11}{6}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

例題 2：求下列三角函數值：

(1) $\cos 519°$

(2) $\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$

解：(1) $\cos 519° = \cos(159° + 360°) = \cos 159°$

$= \cos(180° - 21°) = -\cos 21° = -0.9336$

(2) $\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3 \times 2\pi\right)$

$= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

四、鞏固練習：

課本 $P35$，練習 2 (1)，(2)；3 (1)，(2)。

五、課堂小結：

求三角函數值的步驟？

六、家課：

課本 $P35$，練習 2 (3)，(4)；3 (3)，(4)。

4.5.3 正弦、餘弦的誘導公式

教學目標：正弦、余弦的誘導公式及其探求思路，並能正確地運用這些公式進行任意角的正弦、余弦值的求解。
教學重點：運用誘導公式求三角函數值，化簡或證明三角函數式。
教學難點：任意角的正弦、余弦值的求解。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
(1)五組誘導公式分別是？
(2)利用誘導公式把任意角的三角函數轉化為銳角三角函數，一般可按下面步驟進行：

任意負角的三角函數	$\xrightarrow{(\quad\quad)}$	任意正角的三角函數	$\xrightarrow{(\quad\quad)}$	0^{o} 到 360^{o} 的角的三角函數	$\xrightarrow{(\quad\quad)}$	銳角三角函數

二、例題：

例題 1：化簡 $\dfrac{\cos(180°+\alpha)\cdot\sin(\alpha+360°)}{\sin(-\alpha-180°)\cdot\cos(-180°-\alpha)}$

解： $\sin(-\alpha-180°)=\sin[-(180°+\alpha)]$
$=-\sin(180°+\alpha)=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha$
$\cos(-180°-\alpha)=\cos[-(180°+\alpha)]$
$=\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$

所以原式$=\dfrac{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)}=1$

例題 2：化簡 $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\alpha-\pi)}$

解：原式$=\dfrac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{(-\cos\alpha)\sin(\pi-\alpha)[-\sin(\pi+\alpha)]}$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(-\cos\alpha)\sin(\alpha)[-(-\sin\alpha)]}$$

$$=-\frac{1}{\sin\alpha}$$

例題 3：已知 $\pi<\theta<2\pi$ ， $\cos(\theta-9\pi)=-\dfrac{3}{5}$ ，求 $\tan(10\pi-\theta)$ 的值。

解： $\cos(\theta-\pi)=-\dfrac{3}{5}$

所以$\cos(\pi-\theta)=-\frac{3}{5}$

$\cos\theta=\frac{3}{5}$

又因為$\pi<\theta<2\pi$

所以$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

$$\tan\theta=-\sqrt{\sec^2\theta-1}=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=-\sqrt{\frac{25}{9}-1}=-\frac{4}{3}$$

所以$\tan(10\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta=\frac{4}{3}$

三、鞏固練習：

課本 ***P*33** ，練習**4 (1)** ；

課本 ***P*35** ，練習**4 (1)** 。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

五、家課：

課本 ***P*33** ，練習**4 (2)** ；

課本 ***P*35** ，練習**4 (2)** ；

課本 ***P*36** ，習題**4.5** ，**3** 。

4.5.A 三角函數的複習課

教學目標：重溫誘導公式。
教學重點：熟練誘導公式解決問題。
教學難點：綜合解決問題。
授課類型：練習課。
教學過程：

所有與角α終邊相同的角，連同角α在內，可構成一個集合

$$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360^{O},k\in Z\ \}$$

即任一與角α終邊相同的角，都可以表示成角α與整數個周角的和。

一、在0^{O}到360^{O}範圍內，找出與下列各角邊相同的角，並判定它們是第幾象限角。

(1) 3030^{O}	(2) -2280^{O}	(3) 2370^{O}	(4) -1665^{O}

二、(1)若$\sin A>0$，且$\cos A<0$，則A是第_____象限角。
(2) 若$\tan A>0$，且$\cos A<0$，則A是第_____象限角。

三、若A是第三象限角，則$\dfrac{A}{2}$的終邊在第幾象限。

P9，10 把角度和弧度互換(常用特殊角對應表)

$360^{O}=2\pi$ rad，$180^{O}=\pi$ rad，$1^{O}=\dfrac{\pi}{180}$ rad，$1rad=(\dfrac{180}{\pi})^{O}\approx 57.30^{O}$ rad，

四、把角度和弧度互換

(1) $8\frac{3}{4}\pi$	(2) $-12\frac{2}{3}\pi$	(3) 1710^{O}	(4) -3195^{O}

P9，圓心角α所對弧長l和圓半徑r關係(注意：α必需是弧度的角)

$|\alpha| = \frac{l}{r}$ ， $l = r \cdot |\alpha|$

五、已知r為圓的半徑，弧長為$\frac{3r}{4}$的圓弧所對的圓心角等於多少度？

六、直徑為 20cm 的輪子以$25rad/s$的速度旋轉，求輪周上一點經 8s所轉過的弧長。

P14,15,17，正弦、餘弦和正切的三角函數

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ ， $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ ， $\tan\alpha = \frac{y}{x}$

七、已知角α的終邊過點$p(3,-4)$，求$\sin\alpha$ ，$\cos\alpha$ ，$\tan\alpha$的函數值。

八、已知角α的終邊過點$p(-5,12)$，求$\sin\alpha$ ，$\cos\alpha$ ，$\tan\alpha$的函數值。

九、已知角α的終邊過點$p(-7,-24)$，求$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的函數值。

P26,27，同角三角函數的基本關係式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，
$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

十、已知$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，並且α是第二象限角，求$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的函數值。

十一、已知$\tan\alpha=2\sqrt{3}$，並且α是第三象限角，求$\sin\alpha$，$\cos\alpha$的函數值。(答案保留根式)

十二、已知$A\in(\dfrac{3\pi}{2},2\pi)$，且$\cos A=\dfrac{15}{17}$，求$\sin\alpha$，$\tan\alpha$的函數值。(答案保留根式)

P31 至 34,19，正弦、餘弦和正切的誘導公式
公式一：$\sin(\alpha+k\cdot 360^0)=\sin\alpha$，$\cos(\alpha+k\cdot 360^0)=\cos\alpha$，
$\tan(\alpha+k\cdot 360^0)=\tan\alpha$，其中$k\in Z$
公式二：$\sin(180^0+\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(180^0+\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(180^0+\alpha)=\tan\alpha$
公式三：$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
公式四：$\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(180^0-\alpha)=-\tan\alpha$
公式五：$\sin(360^0-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(360^0-\alpha)=\cos\alpha$，$\tan(360^0-\alpha)=-\tan\alpha$

十三、求下列三角函數值：

(1) $\sin\frac{35}{4}\pi$	(2) $\tan(-\frac{38}{3}\pi)$	(3) $\cos 1710^{o}$	(4) $\cos - 3195^{o}$

十四、化簡下列各式

(1) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\sin(-\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)}$	(2) $\sqrt{1-\cos^2 620^0}$

4.6.1 兩角和與差的正弦、餘弦、正切

教學目標：1.理解兩角和差的餘弦公式，掌握其應用；

2.能靈活地應用這些公式進行計算、求值和證明，提高學生分析問題、解決問題的能力。

教學重點：掌握兩角和差的餘弦公式的推導過程。

教學難點：利用兩角和、差餘弦公式求非特殊角的餘弦值。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、情景引入：

問題 1：如何求出$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$，2α的三角函數值？

問題 2：在初中學過，如何求得數軸上兩點$A(x_1)$，　$B(x_2)$間的距離？

$|AB|=|x_2-x_1|$

問題 3：在座標平面內，如何求得兩點間的距離？

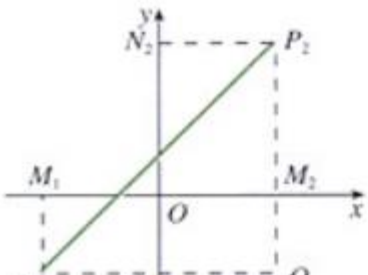
二、新課教授：

如右圖，座標平面內的任意兩點$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，從點P_1，P_2分作 x 軸的垂線P_1M_1，P_2M_2，與 x 軸交於點$M_1(x_1,0)$，$M_2(x_2,0)$； 再從點P_1，P_2分作 y 軸的垂線P_1N_1，P_2N_2，

與 y 軸交於點$N_1(0,y_1)$，$N_2(0,y_2)$。直線P_1N_1與P_2M_2相交於點 Q。那麼

$P_1Q=M_1M_2=|x_2-x_1|$

$QP_2=N_1N_2=|y_2-y_1|$



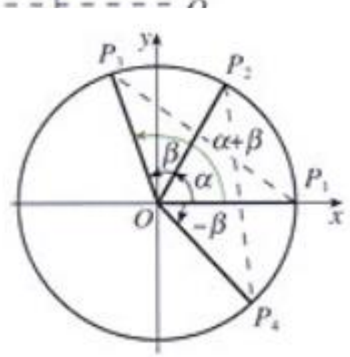
於是由勾股定理，可得

$P_1P_2{}^2=P_1Q^2+QP_2^2$

$=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$

$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

由此得到平面內$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$**兩點間的距離公式**



$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

問題 4：兩角和的餘弦$\cos(\alpha+\beta)$等於$\cos\alpha+\cos\beta$嗎？

如$\frac{1}{2}=\cos 60^{O}=\cos(30^{O}+30^{O})$

$\cos 30^{O}+\cos 30^{O}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

明顯 $\cos 60^O \neq \cos 30^O + \cos 30^O$)

問題 5：現在求兩角和的餘弦 $\cos(\alpha+\beta)$ 與 α ，β 的三角函數？
如右圖，在直角座標系 xOy 內作單位圓 O，並作出角 α ，β 與 $-\beta$ ，使角 α 的始邊為 Ox，交圓 O 於點 P_1 ，終邊交圓 O 於點 P_2 ；角 β 的始邊為 OP_2 ，交圓 O 於點 P_3 ，角 $-\beta$ 的始邊為 OP_1 終邊交圓 O 於點 P_4。這時點 P_1 ，P_2 ，P_3 ，P_4 的座標分別是

$P_1(1,0)$
$P_2(\cos\alpha,\sin\alpha)$
$P_3(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$
$P_4(\cos(-\beta),\sin(-\beta))$

問題 6：應用兩點間距離公式求 P_1P_3 及 P_2P_4 。

$$P_1P_3 = \sqrt{[\cos(\alpha+\beta)-1]^2+\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$P_2P_4 = \sqrt{[\cos\alpha-\cos(-\beta)]^2+[\sin\alpha-\sin(-\beta)]^2}$$

由 $P_1P_3 = P_2P_4$ 展開並整理得

$2-2\cos(\alpha+\beta) = 2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$ 所以

兩個角和差的餘弦公式：

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad C_{(\alpha+\beta)}$$

這個公式對於任意的角 α ，β 都成立

在公式中用 $C_{(\alpha+\beta)}$ 用 $-\beta$ 代替 β ，就得到

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad C_{(\alpha-\beta)}$$

三、例題：
例題 1：求下列各式的值：

(1) $\cos 105^O$

(2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

(3) $\cos 80^O\cos 20^O - \sin 80^O\sin 20^O$

解：(1) $\cos 105^O = \cos(60^O+45^O)$

$$= \cos 60^O\cos 45^O - \sin 60^O\sin 45^O$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(3) $\cos 80^{O}\cos 20^{O}+\sin 80^{O}\sin 20^{O}=\cos(80^{O}-20^{O})$

$$=\cos 60^{O}=\frac{1}{2}$$

四、鞏固練習：

課本 $P42$ ，練習 **2 (3)**；

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 $P42$ ，練習 **2 (4)** ，**5 (3)** 。

4.6.2 兩角和與差的正弦、餘弦、正切

教學目標：1.理解以兩角和差的餘弦公式為基礎，推導兩角和、差正弦和正切公式的方法，體會三角恆等變換特點的過程，理解推導過程，掌握其應用。
2.公式的推導過程，是利用它們內在聯繫的過程。教學過程要注意培養學生利用聯繫、變化的辯證唯物主義觀點去分析問題。

教學重點：兩角和、差正弦和正切公式的推導過程及運用。

教學難點：兩角和、差正弦、餘弦和正切公式的靈活運用。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

兩個角和差的餘弦公式：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad C_{(\alpha+\beta)}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad C_{(\alpha-\beta)}$$

二、新課教授：

把 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 公式中以 $\frac{\pi}{2}$ ，α 代入，則

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha$$
$$=\sin\alpha$$

再把此式中的 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 換成 α ，還可得到誘導公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

再運用 $C_{(\alpha+\beta)}$ 和上式誘導公式，便可得到

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]$$

$$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

在上式中用 $-\beta$ 代替 β ，又可得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

即得

兩個角和差的正弦公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad S_{(\alpha+\beta)}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad S_{(\alpha-\beta)}$$

問題 1：在求得 $C_{(\alpha+\beta)}$ ， $C_{(\alpha-\beta)}$ ， $S_{(\alpha+\beta)}$ ， $S_{(\alpha-\beta)}$ 後 ，怎樣求得 $\tan(\alpha+\beta)$ 及 $\tan(\alpha-\beta)$ ？

當 $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$ 時，

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

如果 $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$ ，我們可以將分子、分母都除以 $\cos\alpha\cos\beta$ ，從而得到

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad T_{(\alpha+\beta)}$$

因為 $\tan(-\beta)=\dfrac{\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}=\dfrac{-\sin\beta}{\cos\beta}=-\tan\beta$

所以公式 $T_{(\alpha+\beta)}$ 中用 $-\beta$ 代替 β ，又可得

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

兩個角和差的正切公式：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad T_{(\alpha+\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad T_{(\alpha-\beta)}$$

三、例題：

例題 1：求下列各式的值：

(1) $\sin 105^{o}$

(2) $\sin 69^{o}\cos 24^{o}-\cos 69^{o}\sin 24^{o}$

解：(1) $\sin 105^{o}=\sin(60^{o}+45^{o})$

$$=\sin 60^{o}\cos 45^{o}+\cos 60^{o}\sin 45^{o}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(2) $\sin 69^{o}\cos 24^{o}-\cos 69^{o}\sin 24^{o}=\sin(69^{o}-24^{o})$

$$=\sin 45^{o}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例題 2：利用和(差)角公式求 75^{o} ，15^{o} 的正弦、餘弦、正切值。

解：$\sin 75^{o}=\sin(45^{o}+30^{o})$

$$=\sin 45^{o}\cos 30^{o}+\cos 45^{o}\sin 30^{o}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos 75^{o}=\cos(90^{o}-15^{o})=\sin 15^{o}$

$$=\sin(45^{o}-30^{o})$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75^{o}=\frac{\sin 75^{o}}{\cos 75^{o}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$$

$$\cos 15^{o}=\cos(90^{o}-75^{o})=\sin 75^{o}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^{o}=\frac{\sin 15^{o}}{\cos 15^{o}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2-\sqrt{3}$$

例題 3：利用和角公式計算$\dfrac{1+\tan 15^{o}}{1-\tan 15^{o}}$的值。

分析：因為$\tan 45^{o}=1$，所以原式可以看成$\dfrac{\tan 45^{o}+\tan 15^{o}}{1-\tan 45^{o}\tan 15^{o}}$

這樣，我們就可以運用正切的和角公式，把原式化為

$\tan(45^{o}+15^{o})$

解：因為$\tan 45^{o}=1$，所以原式$=\dfrac{\tan 45^{o}+\tan 15^{o}}{1-\tan 45^{o}\tan 15^{o}}$

$$=\tan(45^{o}+15^{o})$$

$$=\tan 60^{o}=\sqrt{3}$$

四、鞏固練習：

計算$\dfrac{1-\tan 75^{o}}{1+\tan 75^{o}}$

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 ***P*42** ，練習**5** 。

4.6.3 兩角和與差的正弦、餘弦、正切

教學目標：1.熟練兩角和與差的正弦、餘弦、正切的公式。
2.通過這些公式的推導，使學生瞭解它們的內在聯繫，從而培養學生的邏輯推理能力。

教學重點：已知一個角的正弦或餘弦值，求兩角和差正弦、餘弦和正切值。

教學難點：利用兩角和與差的正弦、餘弦、正切的公式，作證明。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

(1)兩個角和差的正弦公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad S_{(\alpha+\beta)}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad S_{(\alpha-\beta)}$$

(2)兩個角和差的正切公式：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad T_{(\alpha+\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad T_{(\alpha-\beta)}$$

二、例題：

例題 1：已知$\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，求$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha+\beta)$。

解：由$\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，得

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

又由$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，得

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

所以$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

$$=\frac{-6-\sqrt{35}}{12}$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$$

由公式 $S_{(\alpha+\beta)}$ 可得 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{-6+\sqrt{35}}{12}$ ，所以

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{-6+\sqrt{35}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}$$

$$=\frac{-32\sqrt{5}+27\sqrt{7}}{17}$$

例題 2：求證

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}=1-\frac{\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}$$

證明：右邊

$$=\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}=1-\frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=1-\frac{\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}=\text{右邊}$$

所以原式成立。

例題 3：求證 $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\sin(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)$

證明：左邊

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)$$

$$=2\sin(\frac{\pi}{6}+\alpha)=\text{右邊}$$

所以原式成立。

例題 4：已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ （$a\neq 0$ 且 $a\neq c$）的兩個根為 $\tan\alpha$，$\tan\beta$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值。

解：由 $a\neq 0$ 和一元次方程根與係數的關，可知

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

且 $a\neq c$，所以

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{-\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{c}{a}}=-\frac{b}{a-c}=\frac{b}{c-a}$$

三、鞏固練習：

課本 $P44$，練習 4。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

五、家課：

課本 $P44$，習題 4.6，1，$2.(1\sim 2)$，$3.(1\sim 4)$，$7.(1\sim 3)$。

4.7.1 二倍角的正弦、餘弦、正切

教學目標：理解以兩角和差的正弦、餘弦、正切公式基础，推導二倍角的正弦、餘弦、正切公式的方法，體會三角恆等變換特點的過程，理解推導過程，掌握其應用。
教學重點：二倍角的正弦、餘弦、正切公式的推導。
教學難點：二倍角的正弦、餘弦、正切公式的理解及其靈活運用。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：兩角和與差的正弦、餘弦、正切公式如下

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$	$S_{(\alpha\pm\beta)}$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	$C_{(\alpha\pm\beta)}$
$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$	$T_{(\alpha\pm\beta)}$

二、新課教授：
問題 1：我們學了兩角和的正弦、餘弦、正切公式，公式中若兩個角相等，會出什麼情況？
會出現二倍的正弦、餘弦、正切公式當 $\alpha=\beta$

當 $\alpha=\beta$	$\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=$ ________________	$S_{(2\alpha)}$
當 $\alpha=\beta$	$\cos2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=$ ________________	$C_{(2\alpha)}$
當 $\alpha=\beta$	$\tan2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=$ ________________	$T_{(2\alpha)}$

倍角公式：

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $S_{(2\alpha)}$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $C_{(2\alpha)}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad T_{(2\alpha)}$$

問題 2：利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$， 公式 $C_{(2\alpha)}$ 還可以變為？

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\underline{\qquad\qquad}) - \sin^2\alpha = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

或

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (\underline{\qquad\qquad}) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

倍角公式：

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad C_{(2\alpha)}'$$

上面這些公式都叫做倍角公式。有了倍角公式，就可以用單角的三角函數表示二倍角的三角函數。這裏體會了將一般化歸為特殊這一基本數學思想在發現中所起的作用。

注：(1)公式 $(T_{2\alpha})$ 成立的條件是 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$，$\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$，$k \in Z$。

(2)熟悉“倍角”與“二次”的關係(升角---降次，降角---升次)。

三、例題：

例題 1：利用倍角公式求下列各式的值：

(1) $2\sin 67^{O}30'\cos 67^{O}30'$

(2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$

(3) $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$

(4) $1-2\sin^2 75^{O}$

解：(1) $2\sin 67^{O}30'\cos 67^{O}30' = \sin 135^{O} = \sin(180^{O} - 45^{O})$

$$= \sin 45^{O} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 = \cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $1-2\sin^2 75^{O} = \cos(2\times 75^{O}) = \cos 150^{O}$

$$= \cos(180^{O} - 30^{O}) = -\cos 30^{O} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例題 2：已知$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，求$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$。

解：因為$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$$

於是$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{120}{169}$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{119}{169}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{120}{169}\times\frac{169}{119}=-\frac{120}{119}$$

四、鞏固練習：

課本 P49，練習 3。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 P49，練習 1.(5 ~ 8)，

課本 P52，習題 4.7，1，2。

4.7.2 二倍角的正弦、餘弦、正切

教學目標：1.掌握二倍角的正弦、餘弦、正切公式；
2.能應用公式進行三角函數求值、化簡、證明。
教學重點：熟練運用二倍角的正弦、餘弦、正切公式解決問題
教學難點：靈活運用二倍角的正弦、餘弦、正切公式作證明題。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
二倍角的正弦、餘弦、正切：

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $S_{(2\alpha)}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $C_{(2\alpha)}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $T_{(2\alpha)}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ $C_{(2\alpha)}'$

二、例題：
例題 1：求 $\cos 20^O \cos 40^O \cos 80^O$

解： $\cos 20^O \cos 40^O \cos 80^O = \dfrac{2\sin 20^O \cos 20^O \cos 40^O \cos 80^O}{2\sin 20^O}$

$= \dfrac{\sin 40^O \cos 40^O \cos 80^O}{2\sin 20^O} = \dfrac{\sin 80^O \cos 80^O}{4\sin 20^O}$

$= \dfrac{\sin 160^O}{8\sin 20^O} = \dfrac{1}{8}$

例題 2：求證： $\dfrac{1+\sin 4\theta - \cos 4\theta}{2\tan\theta} = \dfrac{1+\sin 4\theta + \cos 4\theta}{1-\tan^2\theta}$

證明：原式等價於 $\dfrac{1+\sin 4\theta - \cos 4\theta}{1+\sin 4\theta + \cos 4\theta} = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

左邊 $= \dfrac{\sin 4\theta + (1-\cos 4\theta)}{\sin 4\theta + (1+\cos 4\theta)} = \dfrac{2\sin 2\theta\cos 2\theta + 2\sin^2 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta + 2\cos^2 2\theta}$

$= \dfrac{2\sin 2\theta(\cos 2\theta + \sin 2\theta)}{2\cos 2\theta(\sin 2\theta + \cos 2\theta)} = \tan 2\theta$

右邊=$\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\tan 2\theta$

所以左邊=右邊

所以原式得證。

例題 3：利用三角公式化簡$\sin 50^O(1+\sqrt{3}\tan 10^O)$

解：原式=$\sin 50^O(1+\sqrt{3}\tan 10^O)=\sin 50^O(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin 10^O}{\cos 10^O})$

$$=\sin 50^O\cdot\frac{2(\frac{1}{2}\cos 10^O+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^O)}{\cos 10^O}$$

$$=2\sin 50^O\cdot\frac{\sin 30^O\cos 10^O+\cos 30^O\sin 10^O}{\cos 10^O}$$

$$=2\cos 40^O\cdot\frac{\sin 40^O}{\cos 10^O}=\frac{\sin 80^O}{\cos 10^O}=\frac{\cos 10^O}{\cos 10^O}=1$$

三、鞏固練習：

課本 $P49$ ，練習**5** 。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

五、家課：

課本 $P52$ ，習題**4.7** ，**3** 。

4.7.3 半角的正弦、餘弦、正切

教學目標：1.了解半角公式的推導過程，能初步運用公式求三角函數值；
2.能應用公式進行三角函數求值、化簡、證明；
3.通過公式的推導，了解半角公式和倍角公式之間的內在聯繫，從而培養邏輯推理能力和辨證唯物主義觀點。

教學重點：半角的正弦、餘弦、正切公式。

教學難點：半角公式與倍角公式之間的內在聯繫，以及運用公式時正負號的選取。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：二倍角的正弦、餘弦、正切 (升角---降次，降角---升次)

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$　　$S_{(2\alpha)}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$　　$C_{(2\alpha)}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$　　$T_{(2\alpha)}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$　　$C_{(2\alpha)}'$

二、新課教授：

問題 1：我們既然學習了倍角公式，在同公式中可否推導半角公式？

以$\cos 2\alpha$表示$\sin\alpha$ ， $\cos\alpha$

公式中$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

公式中$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$

$\cos^2\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$

又因為$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha+1}{2}}} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

上式有理化又得$\tan\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

及 $\tan\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$

以上三式中以 $\dfrac{\alpha}{2}$ 代替 α ，則有

半角的正弦、餘弦、正切 (不要求同學記憶)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad S_{(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad C_{(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad T_{(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

三、例題：

例題 1：求證：

(1) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

(2) $\sin\theta+\sin\varphi = 2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}$

證明：(1)將公式 $S_{(\alpha+\beta)}$ 、公式 $S_{(\alpha-\beta)}$ 的左邊與左邊，右邊與右邊分別相加，得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

所以 $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

(2)在第(1)小題中，令 $\alpha+\beta=\theta$ ， $\alpha-\beta=\varphi$ ，則

$\alpha = \dfrac{\theta+\varphi}{2}$ ， $\beta = \dfrac{\theta-\varphi}{2}$

把 α ， β 的值代入，就有

$$\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\varphi}{2} = \frac{1}{2}(\sin\theta+\sin\varphi)$$

所以 $\sin\theta+\sin\varphi = 2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}$

四、鞏固練習：

課本 ***P*51**，練習 **2** ，**3** 。

當中是

積化和差公式：

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

和差化積公式：

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}$$

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

(1)已知 $\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ，求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值。

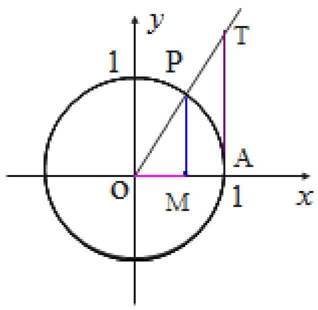
(2)求證 $\frac{\sin 4x}{1+\cos 4x}\cdot\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}$

4.8.1 正弦函數、餘弦函數的圖象和性質

教學目標：1.用單位圓中的正弦線畫出正弦函數的圖象；
2.能利用五點作圖法作出正弦、餘弦函數的簡圖；
3.正弦函數圖象與餘弦函數圖象的變換關係。
教學重點：正弦、餘弦函數的圖象及其畫法。
教學難點：1.利用正弦線畫出正弦函數的簡圖；
2.用正弦曲線和誘導公式畫出餘弦曲線。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
問題 1：$\sin\alpha$ ，$\cos\alpha$ ，$\tan\alpha$ 的幾何意義是什麼？
其中單位圓 O

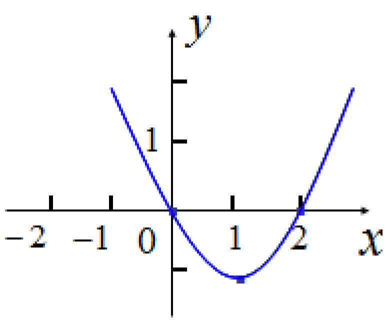
$\sin\alpha=\dfrac{MP}{OP}=MP$，$\cos\alpha=\dfrac{OM}{OP}=OM$， $\tan\alpha=\dfrac{AT}{OA}=AT$



我們稱：
正弦線 MP
餘弦線 OM
正切線 AT

二、新課教授：
問題 2：
我們如何用描點法作出函數 $y=x^2-2x$ 的圖象？
(1) 列表

x	-1	0	1	2	3
$y=x^2-2x$	3	0	-1	0	3

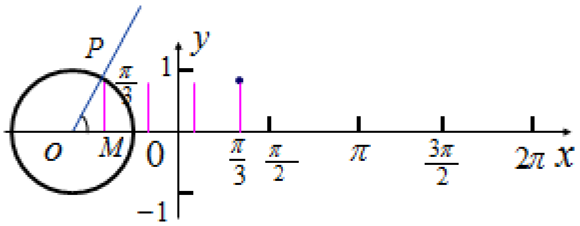


(2)描點
(3)連線

問題 3：能否用描點法作 $y=\sin x$ ， $x\in[0,2\pi]$的圖象？
只要能夠確定圖象上的點$(x,\sin x)$的座標，就可以用描點法作出函數圖象。而該圖象上點的座標可通過 x 的值由計算機中得到。

問題 4：能否不通過查表得到點$(x,\sin x)$的座標？

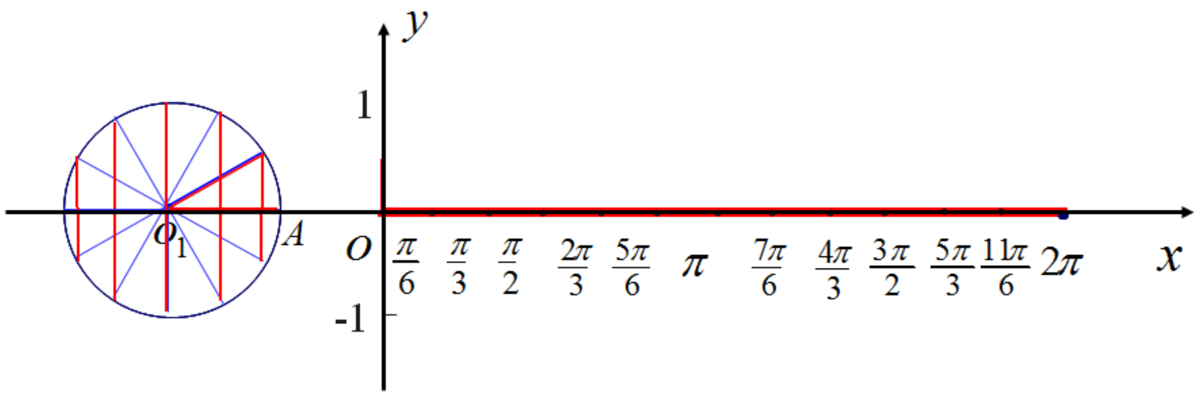
可以利用與單位圓有關的三角函數線，如點$(\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})$



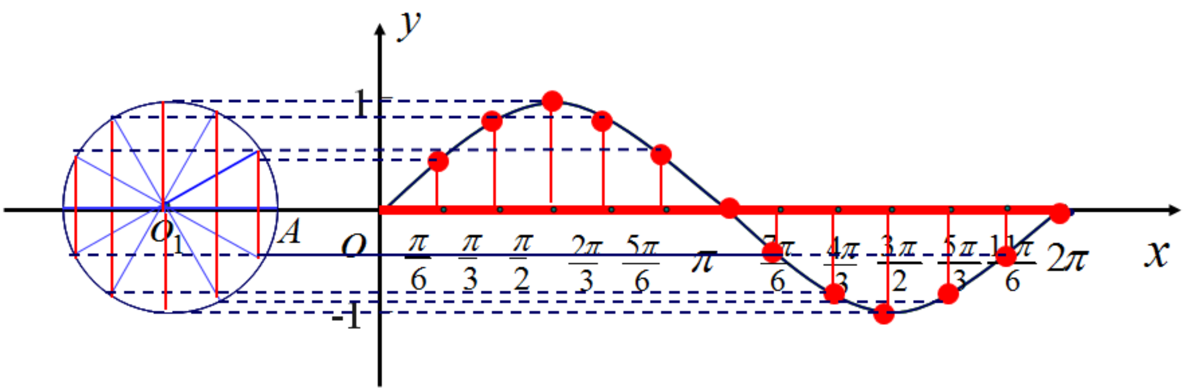
函數 $y=\sin x$ ， $x\in[0,2\pi]$的幾何作法

既然作與單位圓有關的三角函數線可得相應的角的三角函數值，那麼通過描點$(x,\sin x)$ ，連線即可得到函數的 $y=\sin x$ ， $x\in[0,2\pi]$圖象。

問題 5：試以描點法作 $y=\sin x$ ， $x\in[0,2\pi]$的圖象，完成下圖

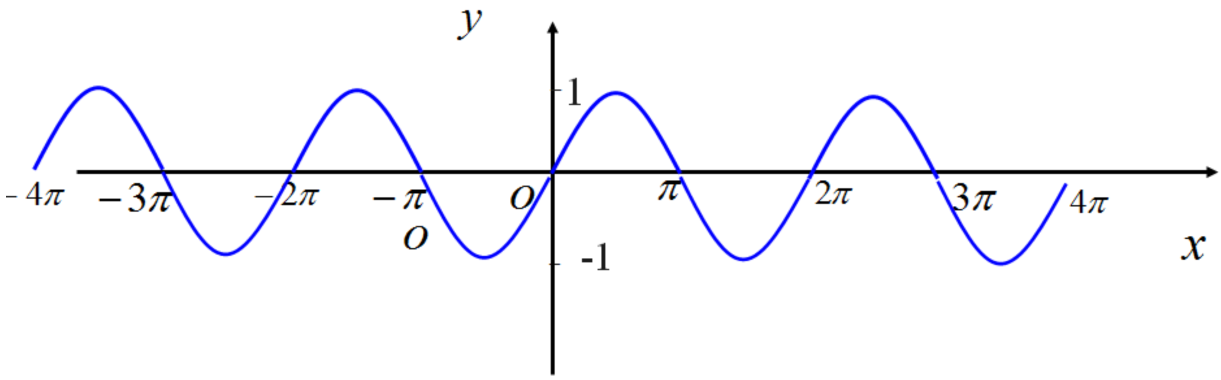


發現，



因為級邊相同的角有相同的三角函數值，所以函數 $y=\sin x$ ， $x\in[2k\pi,2(k+1)\pi]$ ，$k\in Z$ 且 $k\neq 0$ 的圖象，與 $y=\sin x$ ， $x\in[0,2\pi]$函數形狀完全相同，只是位置不同。只要通過平移 $y=\sin x$ ， $x\in[0,2\pi]$圖象就可以得到 $y=\sin x$ ， $x\in R$ 圖象函數。

$y=\cos x$ ， $x\in R$ 圖象函數

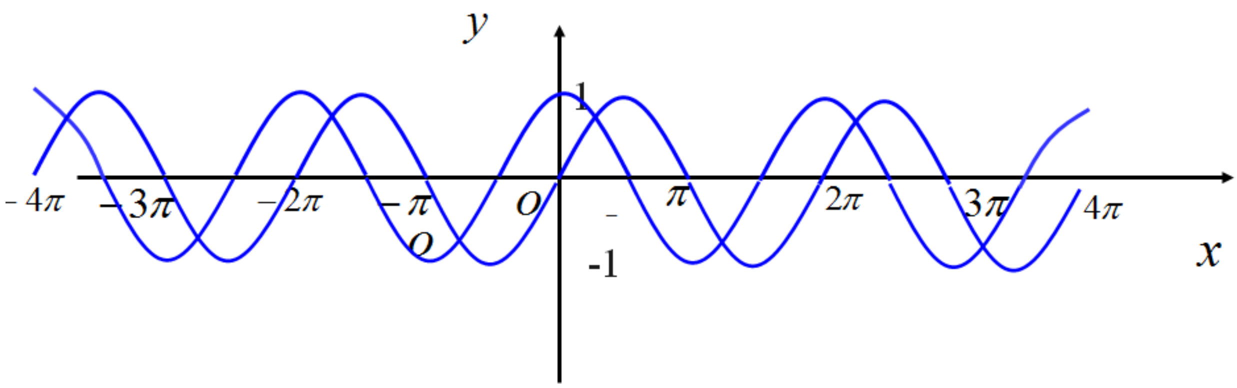


由誘導公式 $y=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ ，

可以看出：

餘弦函數 $y=\cos x$ ， $x\in R$ 與 $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ ， $x\in R$ 是同一個函數。餘弦函數

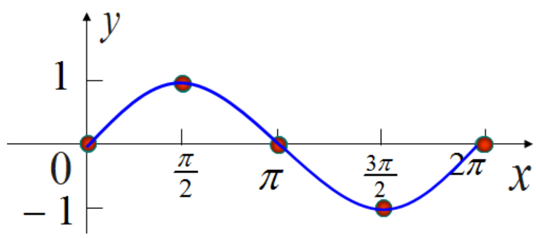
的圖象可通過將正弦曲線向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 個單位長度而得到。



關鍵點：

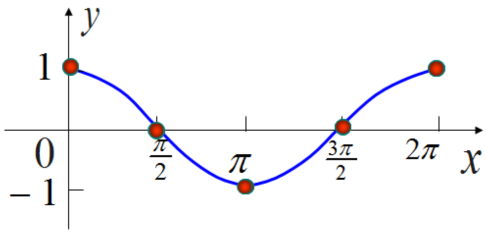
(1) $y=\sin x$ ， $x\in[0,2\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0



(2) $y=\cos x$ ， $x\in[0,2\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1



三、例題：

例題 1：畫出下列函數的簡圖：

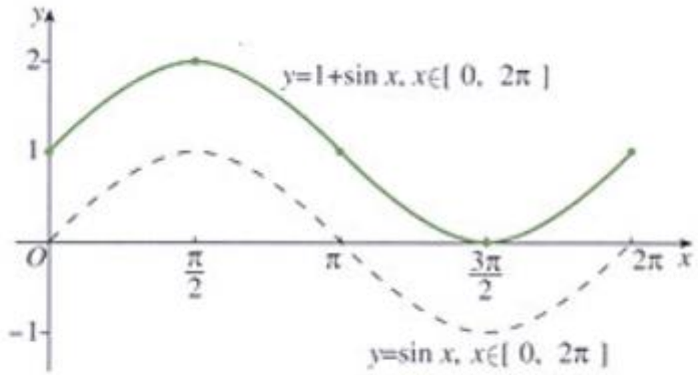
(1) $y=1+\sin x$ ， $x\in[0,2\pi]$

(2) $y=-\cos x$ ， $x\in[0,2\pi]$

解：(1)按五個關鍵點列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$1+\sin x$	1	2	1	0	1

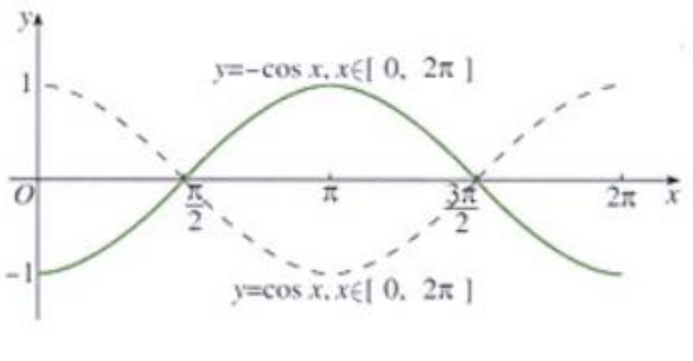
利用正弦函數的性質描點畫圖：



(2)按五個關鍵點列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

利用正弦函數的性質描點畫圖：



問題 6：上題(1)中 $y=1+\sin x$ 與 $y=\sin x$ 有什麼關係呢？

$y=1+\sin x$ 的函數圖象是把 $y=\sin x$ 的函數圖象上的每一點向上平行移動 1 個單位長度。而得到。

問題 7：從上題(2)中 $y=-\cos x$ 與 $y=\cos x$ 有什麼關係呢？
$y=-\cos x$ 的函數圖象與 $y=\cos x$ 的函數圖象關於 x 軸對稱。

四、鞏固練習：

課本 ***P*63**，練習 **3(1)**。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 ***P*63**，練習 **3(2 ~ 3)**。

4.8.2 正弦函數、餘弦函數的圖象和性質

教學目標：1.通過觀察正弦函數、餘弦函數的圖象歸納出其性質；

2.通過組織學生觀察、猜想、驗證與歸納，培養學生的數學能力。

教學重點：求正弦函數、餘弦函數的定義域，及求最值問題。

教學難點： 求正弦函數、餘弦函數的最值問題。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

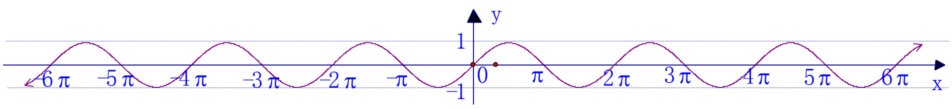
教學過程：

一、溫習舊知識：

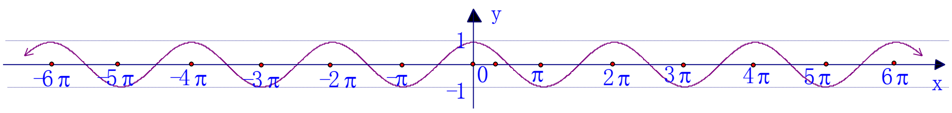
問題 1：用五點法作正弦和餘弦函數的圖象時，五個關鍵點是？

問題 2：正弦和餘弦函數的圖象是怎樣的？

$y = \sin x$



$y = \cos x$



二、新課教授：

觀察上圖可知

(1)定義域：

正弦函數、餘弦函數的定義域都是實數集 R，分別記作

$$y = \sin x \text{，} x \in R$$

$$y = \cos x \text{，} x \in R$$

其中 **R** 當然可以換成 $(-\infty,\infty)$

(2)值域：

因為正弦線、餘弦線的長度小於或等於單位圓的半徑的長度，所以 $|\sin x| \le 1$，

$|\cos x| \le 1$，即 $-1 \le \sin x \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1$

這說明正弦函數、餘弦函數的值域都是 $[-1,1]$。

其中

正弦函數

(1)當且僅當 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ，

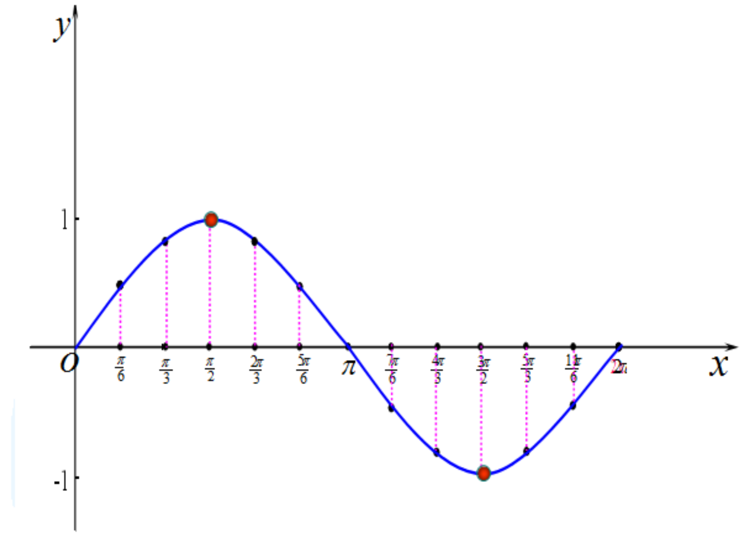
$k\in Z$ 時

$y_{\max}=1$

(2)當且僅當 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ，

$k\in Z$ 時

$y_{\min}=-1$



餘弦函數

(1)當且僅當 $x=2k\pi$ ，

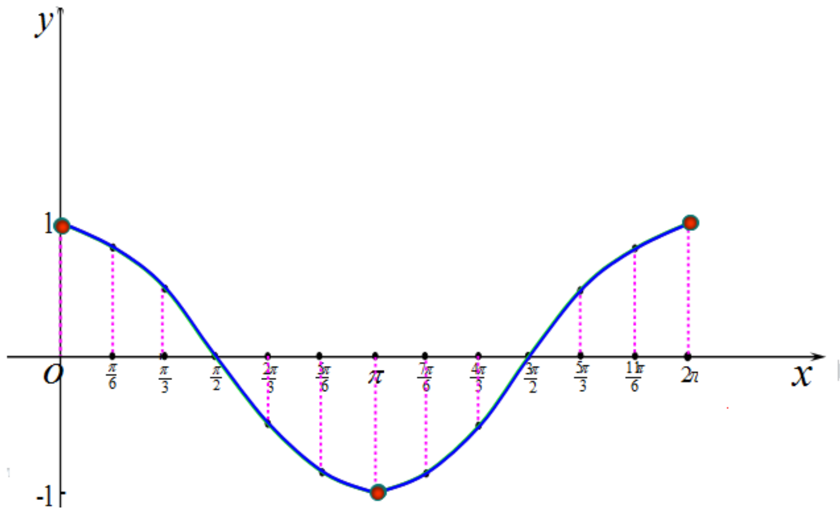
$k\in Z$ 時

$y_{\max}=1$

(2)當且僅當 $x=(2k+1)\pi$ ，

$k\in Z$ 時

$y_{\min}=-1$



三、例題：

例題 1：求使下列函數取得最大值的自變量 x 的集合，並說出最大值是什麼。

(1) $y=\cos x+1$， $x\in R$

(2) $y=\sin 2x$ ， $x\in R$

解：(1)使函數 $y=\cos x+1$， $x\in R$ 取得最大值的自變量 x 的集合，就是使函數

$y=\cos x$ ， $x\in R$ 取得最大值的 x 的集合 $\{x|\ x=2k\pi,k\in Z\}$

函數 $y_{\max}=1+1=2$ 。

(2)令 $z=2x$，那麼 $x\in R$ 必須並且只需 $z\in R$，且使函數 $y=\sin z$，$z\in R$ 取得最大值的 z 的集合 $\left\{z\middle|\ z=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z\right\}$

由 $2x=z=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

這就是說，使函數 $y=\sin 2x$，$x\in R$ 取得最大值的 x 的集合

$\left\{x\middle|\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in Z\right\}$

函數 $y_{\max}=1$。

例題 2：求下列函數的定義域：

(1) $y=\frac{1}{1+\sin x}$

(2) $y=\sqrt{\cos x}$

解：(1)由 $1+\sin x\neq 0$，得 $\sin x\neq -1$

即 $x\neq\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$

所以原函數的定義域為 $\left\{x\middle|\ x\neq\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z\right\}$

(2)由 $\cos x\geq 0$，得 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi$

所以原函數的定義域為 $\left\{x\middle|\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z\right\}$

四、鞏固練習：

課本 $P63$，練習 4。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 $P64$，習題 4.8，2；

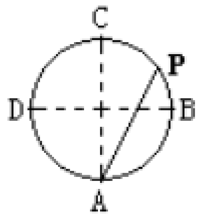
課本 $P66$，習題 4.8，9。

4.8.3 正弦函數、餘弦函數的圖象和性質

教學目標：1.了解周期函數的概念，會判斷一些簡單的、常見的函數的周期性，
並會求一些簡單三角函數的周期；
2.培養數學來源與生活的思維方式。
教學重點：周期函數的定義，正弦、餘弦函數的周期性。
教學難點：周期函數的概念。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：
每年都有春、夏、秋、冬，每星期都是從星期一到星期日，地球每天都繞太陽自轉，巴士沿固定線路往返等，這些都給我們循環、重覆的感覺，可以“周而复始”來形容，這叫周期現象。

二、新課教授：
(3)周期性：
P 點的圓周運動，如右圖，點 P 自點 A 起，繞圓周按逆時針方向進行勻速運動。
點 P 的運動軌迹是
A—B—C—D—A—B—C—D—A—B—C—D—



顯然點 P 的運動是周期運動。
設圓周的半徑是 1，每 4 分鐘運動一周。
設 P 到 A 的離為 y，運動時間為 t，則 y 是 t 的函數，記為 $y = f(t)$
則 $f(0) = f(4) = f(8) = f(12) = \cdots = 0$(在 A 點位置)
$f(2) = f(6) = f(10) = f(14) = \cdots = 2$(在 C 點位置)
一般地，點 P 運行 t 分鐘到達的位置與運行 t+4 分鐘到達的位置相同，由此能得到這樣的數學式 $f(t+4) = f(t)$
問題 1：$f(t+8)$，$f(t+12)$，與 $f(t)$有什麼說明它們的實際意義。
$f(t+8) = f(t)$，$f(t+12) = f(t)$，運行時間不等，但最終位置相同。
我們稱這樣的函數為周期函數。
周期函數的定義：
一般地，對於函數，對定義域內每一個 x 的值，每增加或減少一個不為零的定值 T，及數值就重覆出現，這個函數就叫做周期函數，即 $f(x+T) = f(x)$
上題的周期為 4，8，12，⋯
最小正週期的概念：
對於一個週期函數 $f(x)$，如果在它所有的週期中存在一個最小的正數，那麼這個最小正數就叫做 $f(x)$的最小正週期。

上題最小正的周期為 4。

注：今後不加特殊說明，所涉及的都是最小正周期。

三角函數的周期

由誘導公式 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ ， $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha\ (k\in Z)$

我們有：**正弦函數、餘弦函數是周期函數， $2k\pi(k\in Z$ 且 $k\neq 0)$ 都是它們的周期，最小正周期是 2π 。**

三、例題：

例題 1：求下列函數的周期：

(1) $y=3\cos x$ ， $x\in R$

(2) $y=\sin 2x$ ， $x\in R$

(3) $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$ ， $x\in R$

解：(1)因為餘弦函數的周期是 2π，所以自變量 x 只要並且至少要增加到 $x+2\pi$，餘弦函數的值才能重覆取得，函數 $y=3\cos x$ ， $x\in R$ 的值也能重覆取得。所以函數 $y=3\cos x$ ， $x\in R$ 的周期是 2π 。

(2)令 $z=2x$ ，那麼 $x\in R$ 必須並且只需 $z\in R$ ，且函數 $y=\sin z$ ， $z\in R$ 的周期是 2π 。就是說，變量 z 只要並且至少要增加到 $z+2\pi$，函數 $y=\sin z$，$z\in R$ 的值才能重覆取得。而 $z+2\pi=2x+2\pi=2(x+\pi)$ ，所以自變量 x 只要並且至少要增加到 $x+\pi$ ，函數值才能重覆取得。從而函數 $y=\sin 2x$ ， $x\in R$ 的周期是 π 。

(3) 令 $z=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}$ ，那麼 $x\in R$ 必須並且只需 $z\in R$ ，且函數 $y=2\sin z$ ， $z\in R$ 的周期是 2π 。由於 $z+2\pi=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi=\frac{1}{2}(x+4\pi)-\frac{\pi}{6}$ ，所以自變量 x 只要並且至少要增加到 $x+4\pi$ ，函數值才能重覆取得。從而函數 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$ ， $x\in R$ 的周期是 4π

結論：函數 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$， $x\in R$ 及 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$， $x\in R$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 。

四、鞏固練習：

課本 $P63$ ，練習 $5.(1\sim 2)$ 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

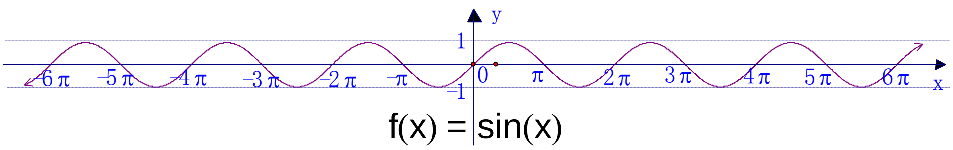
課本 ***P*63** ，練習 **5.(3 ~ 4)** 。

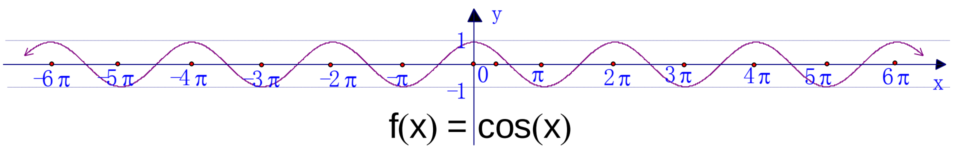
4.8.4 正弦函數、餘弦函數的圖象和性質

教學目標：了解正弦函數、餘弦函數奇偶性，會求正弦函數、餘弦函數單調區間。
教學重點：判斷函數奇偶性求正弦函數、餘弦函數單調區間。
教學難點：會判斷函數單調性。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
問題 1：初中時學過函數的奇函數，偶函數的圖象關於什麼對稱？
奇函數的圖象關於原點對稱。
偶函數的圖象關於 y 軸對稱。

二、新課教授：
(4)奇偶性：
問題 2：觀察下圖，可發現正弦函數，餘弦函數的奇偶性嗎？





正弦函數是奇函數。
餘弦函數是偶函數。
一般地，如果對函數 $f(x)$的定義域內的任意一個 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，則稱為這一定義域內的奇函數。奇函數的圖象關於原點對稱。
因為 $f(-x)=\sin(-x)=-\sin(x)=-f(x)$，所以**正弦函數是奇函數。**

一般地，如果對函數 $f(x)$的定義域內的任意一個 x，都有 $f(-x)=f(x)$，則稱為這一定義域內的偶函數。偶函數的圖象關於 y 軸對稱。
因為 $f(-x)=\cos(-x)=\cos(x)=f(x)$，所以**餘弦函數是偶函數。**

(5)單調性：
從 $y=\sin x$ ，的圖像上可看出：

當 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 時，曲線逐漸上升，$\sin x$ 的值由－1 增大到 1；

當 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 時，曲線逐漸下降，$\sin x$ 的值由 1 減小到－1。

由正弦函數的周期性可知：

正弦函數

在每一個閉區間 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k \in Z)$ 上都是增函數，其值從－1 增大到 1；

在每一個閉區間 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k \in Z)$ 上都是減函數，其值從 1 減小到－1。

所以這兩類閉區間的每一個都是正弦函數的單調區間。

余弦函數

在每一個閉區間 $[(2k-1)\pi, 2k\pi](k \in Z)$ 上都是增函數，其值從－1 增加到 1；

在每一個閉區間 $[2k\pi, (2k+1)\pi](k \in Z)$ 上都是減函數，其值從 1 減小到－1。

所以這兩類閉區間的每一個都是餘弦函數的單調區間。

三、例題：

例題 1：求證：$f(x)=|\sin x|$ 是偶函數。

證明：由於對任意 $x \in R$，有

$$f(-x)=|\sin(-x)|=|\sin x|=f(x)$$

所以 $f(x)=|\sin x|$ 是偶函數。

例題 2：不通過求值，指出下列各式大於 0 還是小於 0：

(1) $\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$

(2) $\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)-\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$

解：(1)因為 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$

且函數 $y=\sin x$，$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是增函數，所以

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)<\sin\left(-\dfrac{\pi}{18}\right)$

即$\sin\left(-\dfrac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\dfrac{\pi}{10}\right)>0$

(2) $\cos\left(-\dfrac{23\pi}{5}\right)=\cos\left(\dfrac{23\pi}{5}\right)=\cos\dfrac{3\pi}{5}$

$\cos\left(-\dfrac{23\pi}{5}\right)-\cos\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right)$

$\cos\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{17\pi}{4}=\cos\dfrac{\pi}{4}$

因為$0<\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{5}<\pi$

且函數 $y=\cos x$ ， $x\in[0,\pi]$是減函數，所以

$\cos\dfrac{3\pi}{5}<\cos\dfrac{\pi}{4}$

即$\cos\dfrac{3\pi}{5}-\cos\dfrac{\pi}{4}<0$

所以$\cos\left(-\dfrac{23\pi}{5}\right)-\cos\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right)<0$

例題 3：求函數 $y=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的單調減區間。

解：由於 $2k\pi\le 3x-\dfrac{\pi}{3}\le 2k\pi+\pi$ ， $k\in Z$ ，得

$\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{9}\le x\le\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{9}$

所以函數 $y=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的單調減區間是$\left[\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{9},\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{9}\right]\ (k\in Z)$

四、鞏固練習：

課本 $P64$ ，練習 8 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 $P65$ ，習題 5 ， 6 ， 7 。

4.9.1 函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象

教學目標:通過畫圖得知函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象是如何經正弦函數演變而來。
教學重點：掌握函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象經正弦函數演變的過程。
教學難點：觀察其演變的過程。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：

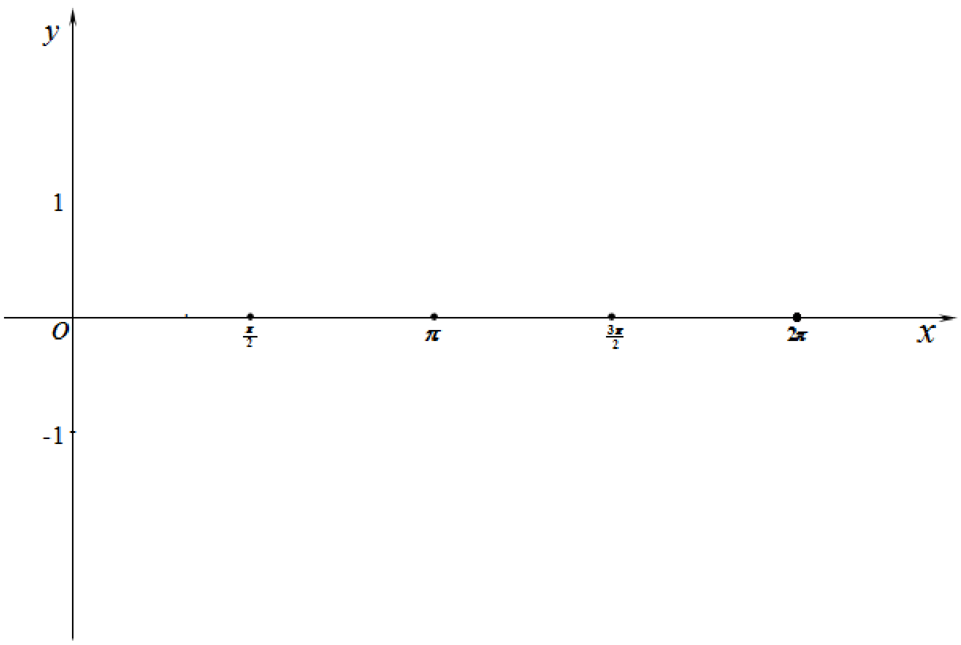
在物理和工程技術的許多問題中，都要遇到形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的函數解析式(其中 A ，ω ，φ 都是常數)。下面就來討論函數的簡圖的畫法

二、例題：

例題 1：畫出函數 $y = 2\sin x$ ，$x \in R$ 及 $y = \frac{1}{2}\sin x$ ，$x \in R$ 的簡圖。

解：這兩個函數的周期是 2π ，按五個關鍵點列表：

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$					
$2\sin x$					
$\frac{1}{2}\sin x$					



問題 1：由上題觀察到 $\frac{1}{2}\sin x$ ， $2\sin x$ 與 $\sin x$ 有什麼關係？

一般地，函數 $y = A\sin x$ ， $x \in R$ (其中 $A > 0$ 且 $A \neq 1$)的圖象，可以看作把正弦曲線上所有點的______座標_______(當 $A > 1$ 時)或_______(當 $0 < A < 1$ 時)到原來的 A 倍(______座標不變)而得到。

例題 2：畫出函數 $y = \sin 2x$ ， $x \in R$ 及 $y = \sin\frac{1}{2}x$ ， $x \in R$ 的簡圖。

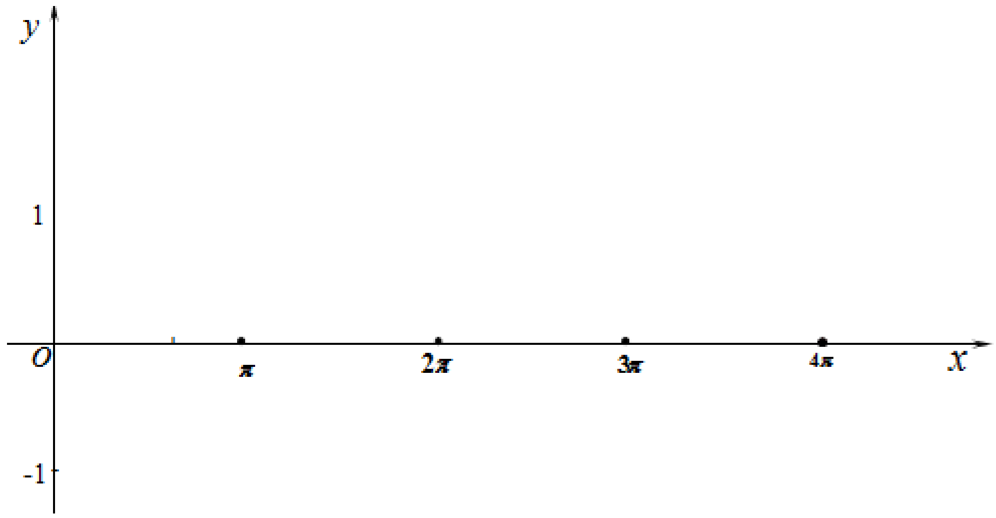
解：函數 $y = \sin 2x$ ， $x \in R$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ， $2x = 0$ ， $\frac{\pi}{2}$ ， π ， $\frac{3\pi}{2}$ ， 2π ，

即可求得 $x = 0$ ， $\frac{\pi}{4}$ ， $\frac{\pi}{2}$ ， $\frac{3\pi}{4}$ ， π ，

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sin 2x$					

函數 $y = \sin\frac{1}{2}x$ ， $x \in R$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ ， $\frac{x}{2} = 0$ ， $\frac{\pi}{2}$ ， π ， $\frac{3\pi}{2}$ ， 2π ， 即可求得 $x = 0$ ， $\frac{\pi}{4}$ ， $\frac{\pi}{2}$ ， $\frac{3\pi}{4}$ ， π ，

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\frac{1}{2}x$					
$\sin\frac{1}{2}x$					



一般地，函數 $y=\sin\omega x$ ， $x\in R$ (其中 $\omega>0$ 且 $\omega\neq 1$)的圖象，可以看作把正弦曲線上所有點的_____座標______(當 $\omega>1$ 時)或______(當 $0<\omega<1$ 時)到原來的 $\frac{1}{\omega}$ 倍(_____座標不變)而得到。

三、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

四、家課：

課本 $P73$ ，練習 $1.,(2\sim 4)$。

4.9.2 函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象

教學目標：通過畫圖得知函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象是如何經正弦函數演變而來。

教學重點：類比函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象與正弦函數圖象的關係。

教學難點：歸納函數 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$的圖象與正弦函數圖象的關係。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

問題 1：函數 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$，$x \in R$ 的五個關鍵點應如何求得？

$x + \frac{\pi}{3} = 0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π， 即可求得 $x = -\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{6}$， $\frac{2\pi}{3}$，$\frac{7\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{3}$

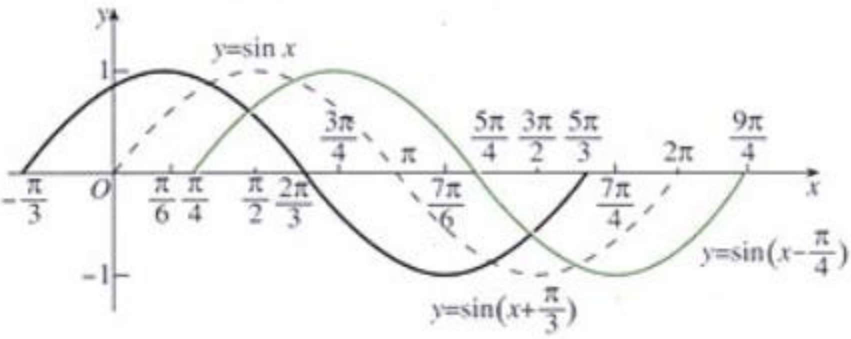
二、例題：

例題 1：畫出函數 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$，$x \in R$ 及 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$，$x \in R$ 的簡圖。

解：先確定五個關鍵點

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
$x + \frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
$x - \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	0	1	0	-1	0

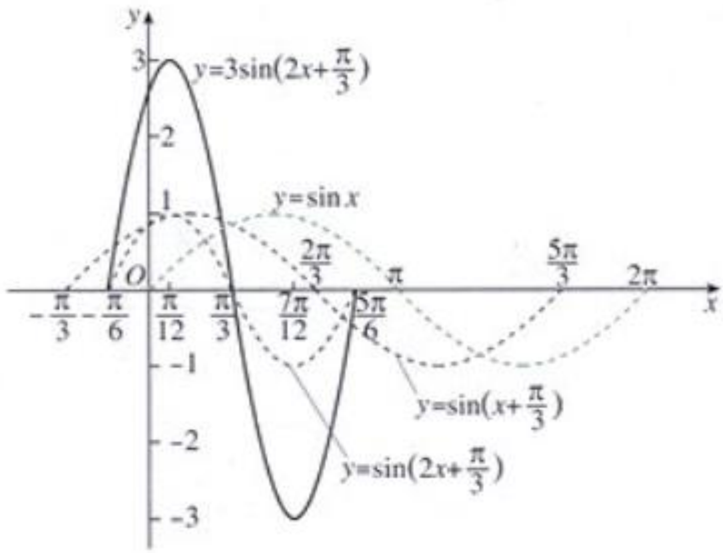


一般地，函數 $y=\sin(x+\varphi)$， $x\in R$ (其中$\varphi\neq 0$)的圖象，可以看作把正弦曲線上所有點向_____ (當$\varphi>0$時)或向______(當$\varphi<0$時)平行移動______個單位長度而得到。

例題 2：畫出函數及 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$， $x\in R$ 的簡圖。

解：先確定五個關鍵點

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	-3	0



問題 2：綜合上本兩節課，歸納 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 與的 $y=\sin x$ 關係？

(1)把 $y=\sin x$ 的圖像上的所有的點向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 個單位長度，得到

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的圖像。

(2)再把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的圖像上各點的**橫**座標**縮短** $(\omega>1)$ 到原來的 $\frac{1}{2}$ 倍(縱坐標不變)，得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的圖像。

(3)再把 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的圖像上各點的**縱**座標**積大** $(A>1)$ 到原來的 3 倍(橫座標不變)，得到 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的圖像。

共同**總結**：

函數 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$， $x\in R$

(其中 $A>0$ ， $\omega>0$)的圖象，可以看作用下面的方法得到：先把正弦曲線上所有的點向右(當 $\varphi>0$ 時)或向右(當 $\varphi<0$ 時)平行移動 $|\varphi|$ 個單位長度，再把所有各點的橫座標縮短(當 $\omega>1$ 時)或伸長(當 $0<\omega<1$ 時)到原來的 $\frac{1}{\omega}$ 倍(縱座標不變)，再把所得各點的縱座標伸長(當 $A>1$ 時)或縮短(當 $0<A<1$ 時)到原來的 A 倍(橫座標不變)。

三、鞏固練習：

課本 $P74$ ，練習 5 。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

五、家課：

課本 $P75$ ，習題 4.9 ，1 ，2 ，3 。


步骤 1
画出正弦曲线在长度为 2π 的某闭区间上的简图
沿 x 轴
平行移动
步骤 2
得到 sin(x+φ)，x∈**R** 在长度为 2π 的某闭区间上的简图
横坐标
伸长或缩短
步骤 3
得到 sin(ωx+φ)，x∈**R** 在长度为一个周期的闭区间上的简图
纵坐标
伸长或缩短
步骤 4
得到 Asin(ωx+φ)，x∈**R** 在长度为一个周期的闭区间上的简图
沿 x 轴
扩展
步骤 5
得到 Asin(ωx+φ)，x∈**R** 的简图

4.10.1 正切函數的圖象和性質

教學目標：1.掌握正切函數的性質；
2.掌握性質的簡單應用；
3.會解決一些實際問題。

教學重點：正切函數牝性質的應用。

教學難點：靈活應用正切函數的性質解決相關問題。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

誘導公式中：$\tan(x+\pi)=$？

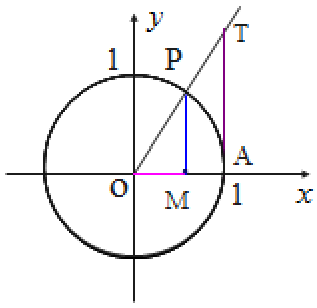
$\tan(x+\pi)=\pi$

二、新課教授：

問題 1：$\tan(x+\pi)=\pi$，這說明是 $y=\tan x$ 一個怎樣的函數？

$y=\tan x$ 是一個周期函數，最小正周期是 π

問題 2：回憶之前學過的正切線。



其中單位圓 O，$\tan\alpha=\frac{AT}{OA}=AT$

我們稱：正切線 AT

問題 3：正切函數的定義域是什麼？

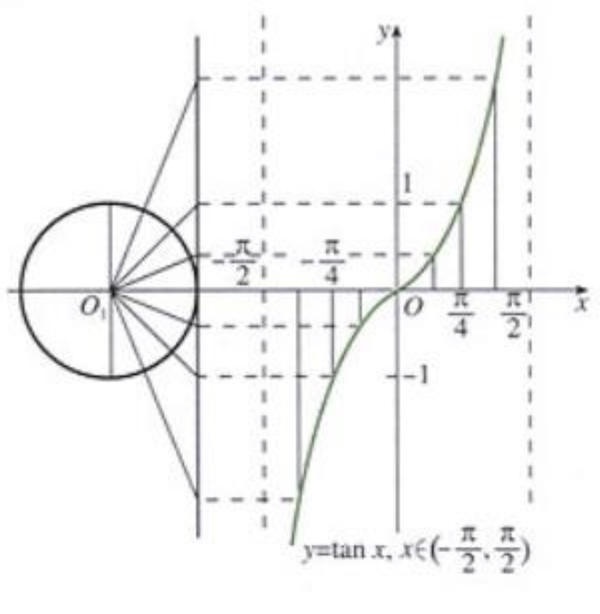
$\left\{x \mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in z\right\}$

所以我們選區間 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 作函數

$y=\tan x$ 的圖象

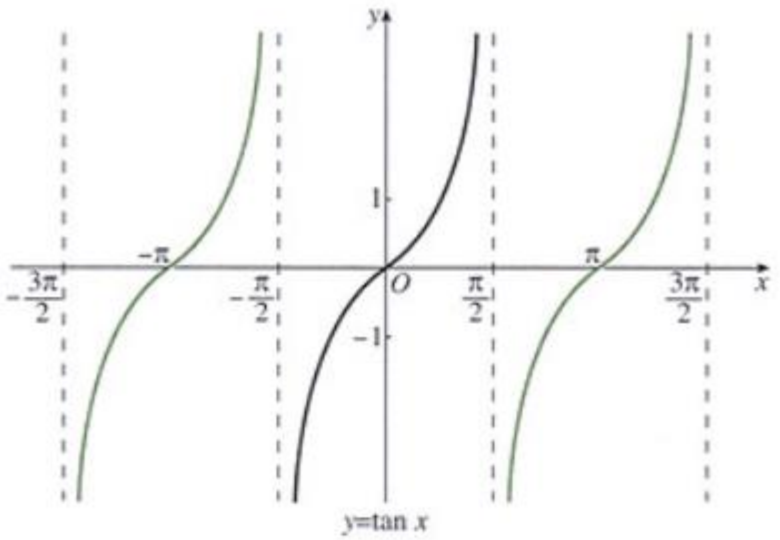
問題 4：現在利用正切線畫出函數

$y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的圖象，如下



根據正切函數的周期性，我們可以把上述圖象向左、右擴展，得到正切函數的圖象，並把

它叫做**正切曲線**。 $y=\tan x$ ， $x\in R$ 且 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in z)$



正切曲線是由被相互平行的直線所隔開的無窮多支曲線組成的。

問題 5：觀察上圖填寫下表：

正切函數的

定義域：________________

值域：________________

周期性：________________

奇偶性：________________

單調性：在開區間________________內，單調遞________________

三、例題：

例題 1：討論函數 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的性質。

解：定義域：

令 $z=x+\frac{\pi}{4}$ ，那麼函數 $y=\tan z$ 的定義域是

$\left\{z\mid z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in z\right\}$

由 $x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ，可得

$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi$

所以函數 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的定義域是 $\left\{x \mid x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in z\right\}$。

值域：R

周期：$T=\frac{\pi}{1}=\pi$

奇偶性：非奇非偶

單調性：$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$ 單調遞增

所以在 $\left(k\pi-\frac{3\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ 上是增函數.

例題 2：比較 $\tan\frac{32\pi}{7}$ 與 $\tan\frac{49\pi}{9}$ 的大小

$\tan\frac{32\pi}{7}=\tan\left(\frac{35\pi}{7}-\frac{3\pi}{7}\right)=\tan\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$

$\tan\frac{49\pi}{9}=\tan\left(\frac{45\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}\right)=\tan\frac{4\pi}{9}$

因為 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{3\pi}{7}<\frac{4\pi}{9}<\frac{\pi}{2}$

而 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 區間內，單調遞增，

所以 $\tan\frac{32\pi}{7}<\tan\frac{49\pi}{9}$

例題 3：求函數 $y=\tan(ax+b)\ (a\neq 0)$ 的周期。

分析：與 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in R$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 類同。

解：$y=\tan(ax+b)$ 的周期 $T=\frac{\pi}{a}$。

四、鞏固練習：

課本 $P79$，練習 **4**，**6**。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 $P80$，習題 **4.10**，**1**，**2**，**4**。

4.11.1 已知三角函數的值求角

教學目標：1.要求學生初步了解反正弦函數的意義，會由已知角的正弦值、餘弦、正切求出主值範圍內的角，並能用反正弦，反餘弦，反正切的符號表示角或角的集合；

2.掌握已知三角函數值求角的解題步驟。

教學重點：已知三角函數值求出給定範圍內的角。

教學難點：誘導公式與利用三角函數值求角的綜合運用。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

特殊角的三角函數值：

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin			
cos			
tan			

二、新課教授：

問題 1： $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，求 x ？

$x=\frac{\pi}{4}$

問題 2：在區間$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，$\sin x=a$滿足條件$(-1\le a\le 1)$的有幾個？

有且只有一個

問題 3：在區間$[0,2\pi]$上，$\sin x=a$滿足條件$(-1\le a\le 1)$的有幾個？

當$a=1$或$a=-1$時，有且只有一個；

當$-1<a<1$，且$a\ne 0$時，有兩個；

當$a=0$時，有兩個。

問題 4：在區間$[0,\pi]$上，$\cos x=a$滿足條件$(-1\le a\le 1)$的有幾個？

有且只有一個

問題 5：在區間$[0,2\pi]$上，$\cos x=a$滿足條件$(-1\le a\le 1)$的有幾個？
當$a=-1$時，有且只有一個；
當$-1<a\le 1$，有兩個。誘導公式應用廣泛，不但已知任意一個角，(角必須屬於這個函數的定義域)，以求出它的三角函數值，而且反過來，如果已知一個三角函數值，也可以求出與它對應的角。

簡單理解**反正弦**：
$y=\sin x$ ，$x\in R$
(1)在 R 上無反函數
(2)在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，$y=\sin x$，x 與 y 是一一對應的，且區間$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$比較簡單
所以在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上，$y=\sin x$的反函數稱作**反正弦**，記作
$y=\arcsin x(-1\le x\le 1)$，(奇函數)
注：已知三角函數求角：
首先應弄清：已知角求三角函數值是單值還是多值的.

三、例題：
例題 1：(1)已知$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，求$x$的值
(2)已知$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x\in[0,2\pi]$，求$x$的值
(3)已知$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，且$x\in R$，求$x$的值
解：(1)因為在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上正弦函數是單調遞增的，且符合條件的角只有一個
所以$x=\frac{\pi}{4}$(即$x=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$)
(2)因為$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，所以$x$是第一或第二象限角

因為$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$所以$x=\frac{\pi}{4}$或$x=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

即($x=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$或$x=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi}{4}$)
(3)因為$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$所以 x 是第三或第四象限角

$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4}=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}(k\in z)$

$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $x=2k\pi+2\pi-\frac{\pi}{4}=(2k+2)\pi-\frac{\pi}{4}(k\in z)$

(即 $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$ 或 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in z)$ 或 $x=k\pi+(-1)^k\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$）

注：這裡用到 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$，因為 $y=\arcsin x$ 是奇函數

例題 2：(1)已知 $\sin x=-0.3322$，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，求 x (用弧度表示)；
(2)已知 $\sin x=-0.3322$，且 $x\in[0,2\pi]$，求 x 的取值集合。

解：(1) $\sin(-x)=-\sin x=0.3322$，利用計數機得：$-x=19^{O}24'$，

所以，$x=-19^{O}24'=-\frac{97\pi}{900}$；

(2)由正弦函數的單調性和

$\sin(180^{O}+19^{O}24')=-\sin19^{O}24'=\sin(-19^{O}24')$，

$\sin(360^{O}-19^{O}24')=-\sin19^{O}24'=\sin(-19^{O}24')$，

可知 $180^{O}+19^{O}24'$ 角，$360^{O}-19^{O}24'$ 角的正弦值也是 -0.3322，
所以，x 的取值集合為 $\{199^{O}24',340^{O}36'\}$，即 $\left\{\frac{97\pi}{900},\frac{1703\pi}{900}\right\}$。

四、鞏固練習：
課本 $P85$，練習 3(3)。

五、課堂小結：
本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：
課本 $P85$，習題 4.11，2(1)，3(1)，3(3)。

4.11.2 已知三角函數的值求角

教學目標：要求學生掌握反餘、反正切弦函數的意義，會由已知角的正弦值、餘弦、正切求出主值範圍內的角，並能用反正弦，反餘弦，反正切的符號表示角或角的集合；

教學重點：已知三角函數值求出給定範圍內的角。

教學難點：誘導公式與利用三角函數值求角的綜合運用。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

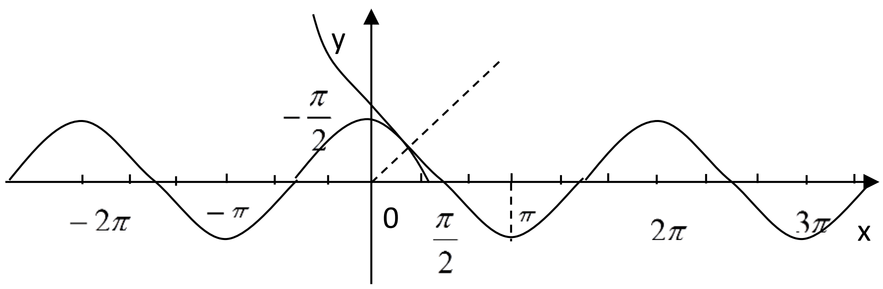
已知三角函數的值求角的解步驟是怎樣的？

二、新課教授：

有反正弦函數同理也有

反餘弦函數：

由 $\boldsymbol{y=\cos x, x\in R.}$



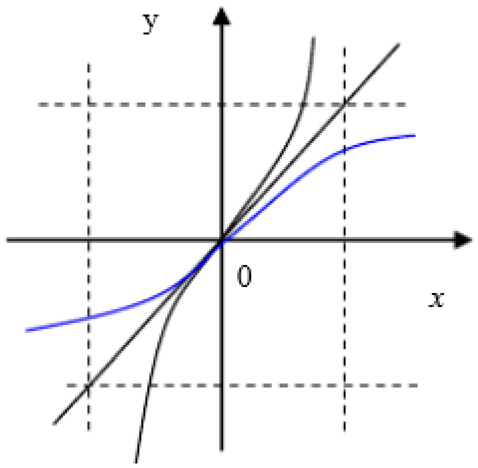
在 $[0,\pi]$ 上，$y=\cos x$ 的反函數稱作**反餘弦函數**，記作 $y=\arccos x(-1\le x\le 1)$(非奇非偶函數)。

反正切函數：

$\boldsymbol{y=\tan x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, x\in R}$

(1)在整個定義域上無反函數.

(2)在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上 $y=\tan x$ 的反函數稱作**反正切函數**，記作 $\boldsymbol{y=\arctan x\ (x\in R)}$(奇函數)。



三、例題：

例題 1： (1)已知 $\cos x = 0.7660$ ，且 $x \in [0,\pi]$，求 x 的值

(2)已知 $\cos x = -0.7660$ ，且 $x \in [0,2\pi]$，求 x 的值

(3)已知 $\cos x = -0.7660$ ，且 $x \in R$ 求 x 的值

解：(1)在 $[0,\pi]$ 上余弦函數 $y = \cos x$ 是單調遞減的，且符合條件的角只有一個

所以 $x = \frac{2\pi}{9}$ (即 $x = \arccos 0.7660$)

(2)因為 $\cos x = -0.7660 < 0$ ，所以 x 是第二或第三象限角.

因為 $\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{9}\right) = \cos\left(\pi + \frac{2\pi}{9}\right) = -0.7660$

所以 $x = \pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$ 或 $x = \pi + \frac{2\pi}{9} = \frac{11\pi}{9}$

(3)由上題： $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{9}$ 或 $x = 2k\pi + \frac{11\pi}{9}(k \in z)$

因為 $\arccos(-x) = \pi - \arccos x,$

所以上題 $x = 2k\pi \pm \arccos(-0.7660) = 2k\pi \pm \frac{7\pi}{9}(k \in z)$

例題 2：

(1)已知 $\tan x = \frac{1}{3}$ ，且 $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，求 x (精確到 0.1π)；

(2)已知 $\tan x = \frac{1}{3}$ ，且 $x \in [0,2\pi]$，求 x 的取值集合。

解：(1)由正切函數在開區間 $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函數和 $\tan x = \frac{1}{3}$，可知符合條件的角有且只有一個，利用計數機可得 $x = 18^{o}26'$ (或 $\frac{\pi}{10}$)

(2)由正切函數的周期性，可知當 $x = \frac{\pi}{10} + \pi$ 時， $\tan x = \frac{1}{3}$ 。

所以所求的的集合是 $x = \frac{\pi}{10} + \pi$

四、鞏固練習：

課本 $P85$ ，練習 3(1 ~ 2) 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

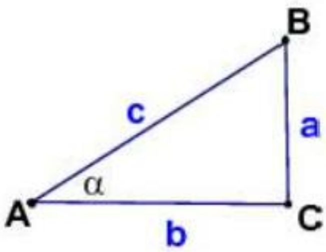
六、家課：

課本 ***P*85** ，習題 **4.11** ， **2(2 ~ 4)** ， **3(2)** ， **3(4)** 。

4.11.A 三角函數的複習課一

教學目標：重溫三角函數的定義及性質。
教學重點：掌握三角函數的圖象及性質，會運用各公式解決問題。
教學難點：綜合解決問題。
授課類型：練習課。
教學過程：

一、定義：



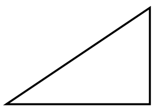
正弦函數 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}$，餘割函數 $\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}$，

餘弦函數 $\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}$，正割函數 $\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}$，

正切函數 $\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}$，餘切函數 $\cot A=$

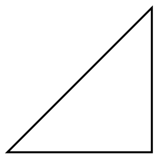
$\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}$。

二、特別角的三角函數值：



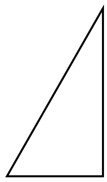
(1) 30°：$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；

$\csc 30^\circ=2$，$\sec 30^\circ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\cot 30^\circ=\sqrt{3}$。



(2) 45°：$\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan 45^\circ=1$；

$\csc 45^\circ=\sqrt{2}$，$\sec 45^\circ=\sqrt{2}$，$\cot 45^\circ=1$。



(3) 60°：$\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$；

$\csc 60^\circ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\sec 60^\circ=2$，$\cot 60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

三、弧度與角度：　$\pi=180^\circ$，一圈為 2π 或 360°。$\Rightarrow$ **弧度變角度** $\times\dfrac{180^\circ}{\pi}$ **，角度變弧度** $\times\dfrac{\pi}{180^\circ}$。

所以　(a) $30^\circ=30^\circ\times\dfrac{\pi}{180^\circ}=\dfrac{\pi}{6}$，(b) $45^\circ=45^\circ\times\dfrac{\pi}{180^\circ}=\dfrac{\pi}{4}$，(c)

$60° = 60° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{3}$ ；

(d) $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{180°}{\pi} = 90°$ ，(e) $\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \times \frac{180°}{\pi} = 150°$ ，(f) $\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{180°}{\pi} = 120°$ 。

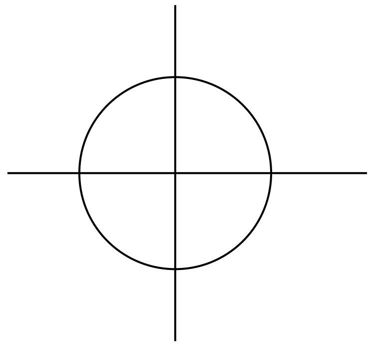
四、象限：一圈共分成四個象限，

若 θ 在第一象限表示 $0° < \theta < 90°$ 或 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，

若 θ 在第二象限表示 $90° < \theta < 180°$ 或 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，

若 θ 在第三象限表示 $180° < \theta < 270°$ 或 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ，

若 θ 在第四象限表示 $270° < \theta < 360°$ 或 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 。



	$0°$ 或 0	$90°$ 或 $\frac{\pi}{2}$	$180°$ 或 π	$270°$ 或 $\frac{3\pi}{2}$
sin	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0

五、(1) sin 與 cos 的正負情形：

	一	二	三	四
sin	＋（正）	＋（正）	－（負）	－（負）
cos	＋（正）	－（負）	－（負）	＋（正）

(2)特別角的 sin 值與 cos 值：

角度	$120°$	$135°$	$150°$	$210°$	$225°$	$240°$	$300°$	$315°$	$330°$
弧度	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

cos	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)將任意角改成銳角（$0°<\theta<90°$）的方法：

(a)若任意角在第二象限：**用π減任意角**。

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$，$\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$，

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，$\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$，

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$，$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$。

(b)若任意角在第三象限：**用任意角減π**。

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$，$\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$，

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$，$\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$，

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$，$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$。

(c)若任意角在第四象限：**用2π減任意角**。

$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$，$\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$，

$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$，$\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$，

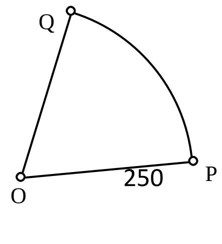
$\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$，$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$。

六、例題：

1.扇形的弧長與面積：

(1)弧度量的定義：設有一圓，圓心為 O，半徑為 r。在圓周上取一段圓弧$\overset{\frown}{PQ}$，使得圓弧$\overset{\frown}{PQ}$的長度等於 r，規定這一段圓弧$\overset{\frown}{PQ}$所對的圓心角∠POQ 就定義成 1 弧度。

(2)扇形 POQ 中心角θ弧度，半徑為 r，弧長 PQ 為 s，A 為扇形 POQ 的面積，則 $s=r\cdot\theta$，$A=\frac{1}{2}\cdot r^2\theta=\frac{1}{2}\cdot rs$



例題 1：有一圓形紙片如右圖中圓 O，將其中扇形(陰影部分)ROP 剪去，並將兩半徑 OP、OR 重合粘在一起，成一圓錐。以 r 表圓的半徑，以θ表示圓心角∠ROP 的弧度，以 l 表示圓弧 PQR 的長，用下列選項中的那些值，就可以求出圓錐的體積？

(A)只用 r 值。

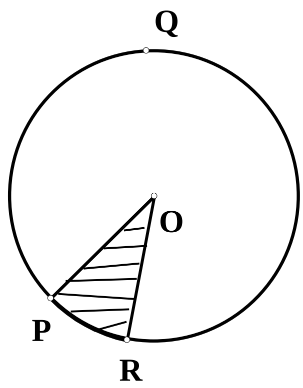
(B)只用圓弧 l 值。

(C)只用 r 和θ值。

(D)只用 r 和 l 值。

(E)只用 l 和θ值。

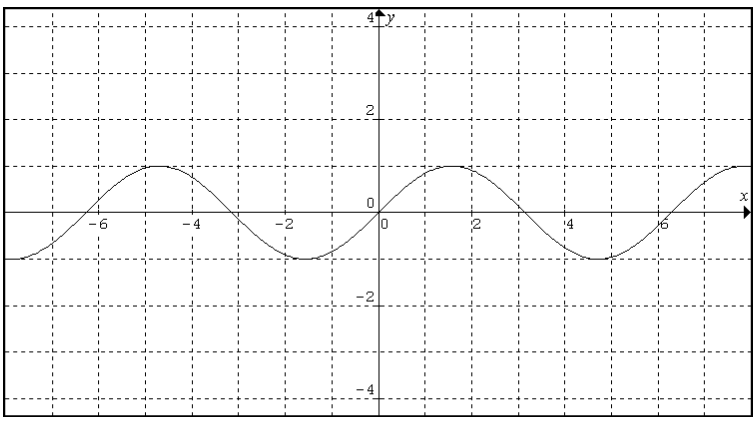
Ans：(C)(D)(E)



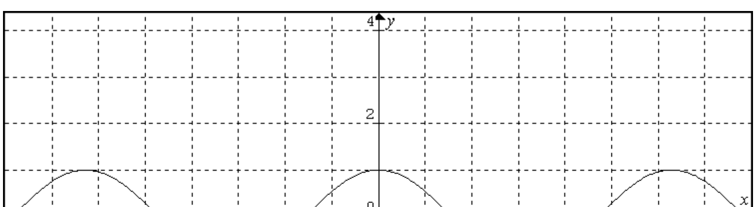
2.三角函數的圖形：

(1)各三角函數的圖形：

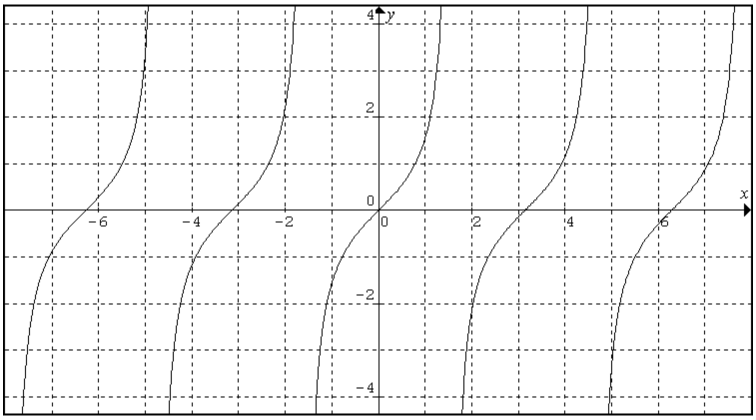
$y=f(x)=\sin x$ 的圖形：



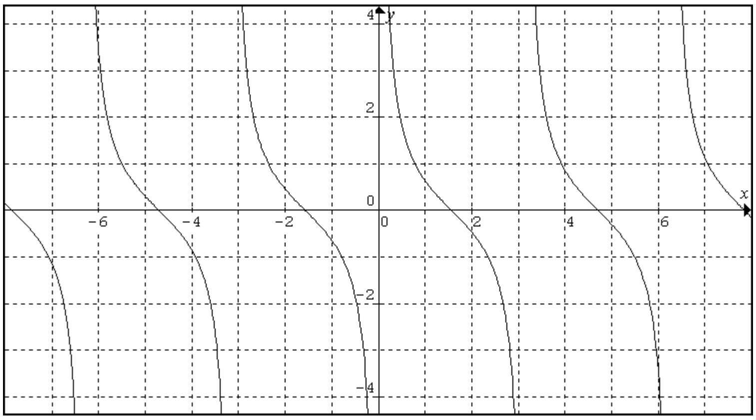
$y=f(x)=\cos x$ 的圖形：



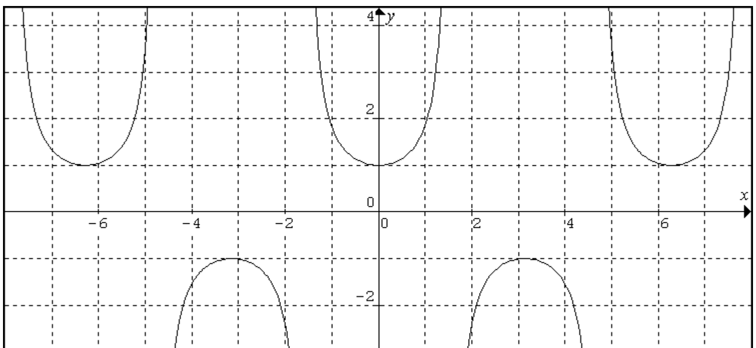
$y=f(x)=\tan x$ 的圖形：



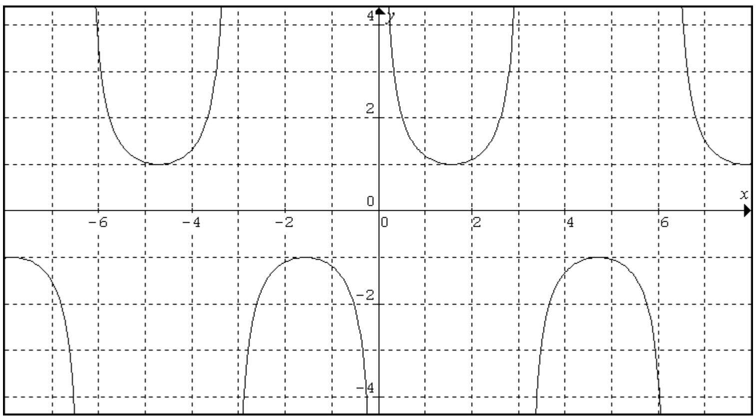
$y=f(x)=\cot x$ 的圖形：



$y=f(x)=\sec x$ 的圖形：



$y=f(x)=\csc x$ 的圖形：



(1)三角函數的範圍：

$|\sin x|\le 1$，$|\cos x|\le 1$，$\tan x,\cot x$ 任意實數 $|\sec x|\ge 1$，$|\csc x|\ge 1$

(2)有關週期與振幅、圖形的平移：

$f(x)=\text{A}\sin(px+q)+\text{B}$　　週期：$\dfrac{2\pi}{p}$　　振幅：$|\text{A}|$

圖形沿 x 軸方向平移 q，再沿 x 伸縮 $\dfrac{1}{p}$ 倍，再沿 y 軸方向伸縮 A 倍，

最後沿 y 軸平移 B。

3.和角公式、倍角公式、和與積互化：

(1)和角公式：

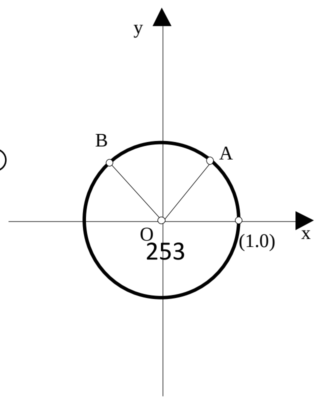
和角公式的精神在於已知α、β的三角函數，可以推知α+β、α−β的三角函數。

推導公式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

證明：先做一單位圓，如右圖

其中 $A(\cos\beta，\sin\beta)$、$B(\cos\alpha，\sin\alpha)$，$\angle AOB=\alpha-\beta$，

因為 $\overline{AB}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)$......①



利用餘弦定理：$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos(\alpha-\beta)$

所以 $\overline{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$..................②

由① ②可得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

討論：(a)如果 A,O,B 共線上述的結果會成立嗎？

(b)$\alpha-\beta>\pi$ 時，上述的結果會成立嗎？

由 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 可推得：

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(2)倍角公式：

倍角公式的精神：已知一個角度θ的三角函數，就可推知 2θ、θ/2 的三角函數。

在和角公式中，令α=β，即可推得：

二倍角公式：

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$　　$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

三倍角公式：

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

(3)和與積互化公式：

(a)積化和差

$\mathbf{2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$

$\mathbf{2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$

$\mathbf{2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}$

$\mathbf{2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

(b)和差化積

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

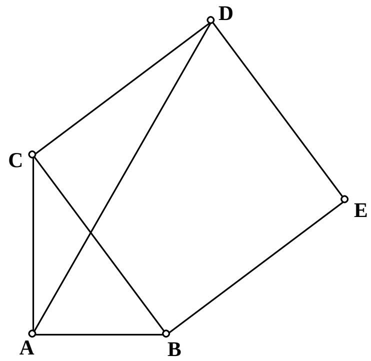
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

例題 2：設ΔABC 為一直角三角形，BCDE 為以 $\overrightarrow{BC}$ 為一邊向外作出的正方形，

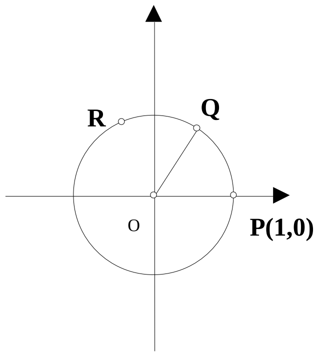
若 $\overrightarrow{BC}=5$，$\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{AB}=3$，試求 cos∠ACD=_______，ΔACD 的面積=__________。

Ans：$\frac{-3}{5}$，8



例題 3：在ΔABC 中，∠A 為鈍角，且 sinA= $\frac{12}{13}$， sinB= $\frac{3}{5}$，且 c=9，試問此三角形的外接圓半徑為_________。 Ans：$\frac{65}{14}$

例題 4：如圖所示，P,Q,R 是圓心為 O 之單位圓上的點，P(1,0)，Q($\frac{3}{5}$,$\frac{4}{5}$)，R(x,y)，弧長 PQ=弧長 QR，則求 R 的坐標。Ans：R($\frac{-7}{25}$，$\frac{24}{25}$)



例題 5：tanα，tanβ為 $x^2+5x-2=0$ 之二根，求
(1)tan(α+β)=?

(2) $\sin^2(\alpha+\beta)+5\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-2\cos^2(\alpha+\beta)=?$

Ans：(1)$\frac{-5}{3}$ (2)-2

例題 6：

試作下列各小題：

(1)$\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=$？

(2)$\cos 100^\circ\cdot\sin 50^\circ+\sin 50^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 20^\circ\cdot\cos 100^\circ=$？

(3)$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=$？

Ans：(1)0 (2)$\frac{3}{4}$(3)$\frac{1}{8}$

例題 7：在ΔABC 中，試證：

(1)$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$。

(2)$\tan A+\tan B+\tan C=\tan C\tan B\tan C$

4.11.B 三角函數的複習課二

教學目標：重溫反三角函數的定義及性質。
教學重點：掌握反三角函數的圖象及性質，會運用各公式解決問題。
教學難點：綜合解決問題。
授課類型：練習課。
教學過程：

4.反三角函數：

(1)反函數的意義：

給定函數 $f(x)$、$g(y)$，設 x,y 分別是 $f(x)$、$g(y)$定義域內任意元素，如果 $g(f(x))=x$ 且 $f(g(y))=y$ 則稱 $f(x)$與 $g(y)$互為反函數，$f(x)$的反函數記為 $f^{-1}(x)$，即 $g(x)=f^{-1}(x)$。此時 $f(x)$、$g(x)$的定義域與值域互換，即 $f(x)$的定義域為 $f^{-1}(x)$的值域，$f(x)$的值域為 $f^{-1}(x)$的定義域。

(2)反正弦、反餘弦、反正切的意義：

$\sin^{-1}a$ 的意義：

對於每一個實數 $a\in[-1,1]$，在區間$[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$內，都恰有一個實數 x，使得 $\sin x=a$。這個唯一的實數 x，就記為 $\sin^{-1}a$(有時也記為 $\arcsin a$)，讀做 *arcsinea*。

例如：因為在$[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$內只有$\frac{\pi}{6}$使得 $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$，所以 $\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$。

因為在$[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$內只有$\frac{-\pi}{4}$使得 $\sin\frac{-\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{2}}{2})= \frac{-\pi}{4}$。

$\cos^{-1}a$ 的定義：

對於每一個 a，$-1\le a\le 1$，在區間$\{x|0\le x\le\pi\}$上都恰有一個實數 x 使得 $\cos x=a$。這個唯一的實數 x，就記為 $\cos^{-1}a$(有時也記做 $\arccos a$)，讀做 *arc cosinea*。

例如：因為 $0\le\frac{\pi}{3}\le\pi$，$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，所以 $\cos^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$。

因為 $0\le\frac{5\pi}{6}\le\pi$，$\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$，所以 $\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})= \frac{5\pi}{6}$。

$\tan^{-1}a$ 的定義：

對於每一個實數 a，在區間$(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$內，都恰有一個實數 x，使得 $\tan x=a$。這個唯一的實數 x，就記為 $\tan^{-1}a$(有時也記為 $\arctan a$)，讀做 *arctangenta*。

例如：因為在$(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$內只有$\frac{\pi}{4}$使得 $\tan\frac{\pi}{4} =1$，所以 $\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$。

因為在$(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$內只有$\frac{-\pi}{3}$使得 $\tan\frac{-\pi}{3}=-\sqrt{3}$ ，所以 $\tan^{-1}(-\sqrt{3})=\frac{-\pi}{3}$。

(3)反正弦函數、反餘弦函數、反正切函數：

(a)定義反正弦函數：

根據 $\sin^{-1}x$ 的定義，可知我們限制 $y=\sin x$ 的定義域到$[\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2}]$，此時 $y=\sin x$ 為 1 對 1 的函數，因此可以定義反正弦函數 $y=f(x)=\sin^{-1}x$，

可知定義域=$\{x|-1\le x\le 1\}$，值域=$\{y|\frac{-\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\}$。

反正弦函數的圖形：

對於 $a\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，點$(a,b)$在 $y=\sin x$,的圖形上

$\Leftrightarrow$ 點(b,a)在 $y=\sin^{-1}x$ 的圖形上。

所以 $y=\sin x$，$x\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$與 $y=\sin^{-1}x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

(b)定義反餘弦函數：

根據 $\cos^{-1}x$ 的定義，可知我們限制 $y=\cos x$ 的定義域到$[0,\pi]$，此時 $y=\cos x$ 為 1 對 1 的函數，因此可以定義反餘弦函數 $y=f(x)=\cos^{-1}x$，

可知定義域=$\{x|-1\le x\le 1\}$，值域=$\{y|0\le y\le\pi\}$。

反餘弦函數的圖形：

對於 $a\in[0,\pi]$，點(a,b)在 $y=\cos x$ 的圖形上

$\Leftrightarrow$ 點(b,a)在 $y=\cos^{-1}x$

的圖形上。所以 $y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$與 $y=\cos^{-1}x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

(c)根據 $\tan^{-1}x$ 的定義，可知我們限制 $y=\tan x$ 的定義域到$(\frac{\pi}{2},\frac{-\pi}{2})$，此時 $y=\tan x$ 為

1

對 1 的函數，因此可以定義反正切函數 $y=f(x)=\tan^{-1}x$，

可知定義域=R，值域=$\{y|\frac{-\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\}$。

反正切函數的圖形：

對於 $b\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，點$(a,b)$在 $y=\tan x$,的圖形上

$\Leftrightarrow$ 點(b,a)在 $y=\tan^{-1}x$ 的圖形上。

所以 $y=\tan x$，$x\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$與 $y=\tan^{-1}x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

一、例題：

例題 1：求下列各小題的值：

(1) $\sin^{-1}(\cos\frac{5\pi}{6})$ (2) $\sin(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2})$ (3) $\cos^{-1}(\cos 1000\pi)$ (4) $\tan^{-1}(\tan\frac{7\pi}{12})$

Ans：(1)$\frac{-\pi}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3)0 (4)$\frac{-5\pi}{12}$

(E)三角函數的疊合與極值問題：

設 a,b 為實數，且 $a^2+b^2\neq 0$，則函數 $y=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$ 可以表為 $y=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\theta)$，

其中θ為滿足 $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$的角θ。

證明：因為 $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x)$，

而且$(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2=1$，點 $P(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}，\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$在單位圓上，

因此可找到一個角度θ，使得 $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

所以 $y=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cdot\sin x+\sin\theta\cdot\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\theta)$。

例題 2：$30^\circ\leq\theta\leq 150^\circ$，$y=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta+1$，則θ =?時，$y$ 有最小值=____；

θ =?時，y 有最大值=_____。 Ans：30°,1；120°,3

例題 3：

$0\le x\le 2\pi$，$f(x)=2\sin x+\cos x-5$，在 $x=\alpha$發生最大值，$x=\beta$發生最小值，試求$\alpha=$？最大值？$(\cos\alpha,\sin\beta)=$?　Ans：$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sqrt{5}\ -5$

例題 4：求 $f(\theta)=\sin2\theta+\sin\theta+\cos\theta$，$0\le\theta\le2\pi$，的最大、小值。Ans：$1+\sqrt{2}$　，$\frac{-5}{4}$

[提示]：$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$　，可令 $t=\sin\theta+\cos\theta$

例題 5：函數 $f(t)=\sin^2 2t-3\cos^2 t$ 在 $0\le t\le2\pi$的範圍內，求其最大值、最小值。

Ans：$\frac{1}{16}$，-3

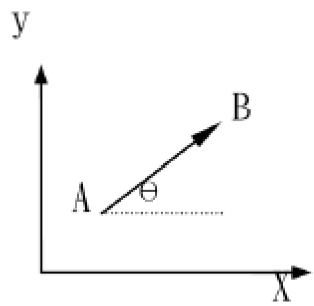
第五章、平面向量

5.1.1 向量

教學目標：能了解有向線段的意義及其標記法；向量與有向線段的分別。
教學重點：知道向量具有大小與方向兩要素。
教學難點：向量的物理背景與概念。
教學方法：引導啟發。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、新課教授：
向量又稱矢量，最初被應用於物理學，很多物理量都是向量。本課本討論的向量是一種具有幾何和代數雙重身份的數學概念。
標量：只需用一個實數就可以表示的量。
向量：既有大小又有方向的量。
向量不能比較大小。
問題 1：下列哪些是標量，哪些是向量：？
力，溫度，時間，速度，面積，位移，電場強度，磁感應強度。

向量的表示法：
有向線段：具有方向的線段。
有向線段包含三個要素：起點、方向、長度。



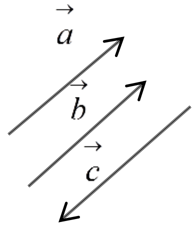
如右圖示，把起點 A 與終點 B 以有向射線連接，並注明兩點間之距離及射線之方向(即與水平線之夾角的觀念)，就是向量。記作 $\vec{AB}$ ，而 $\vec{AB}$ 的大小叫做 $\vec{AB}$ 的模，表示為 $|\vec{AB}|$ 。

或用小寫字母表示，如 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 。

向量和有向線段的區別：
(1) 向量只有大小和方向兩個要素，與起點無關，長度相等且方向相同為相同向量。
(2) 有向線段的三個要素：起點、方向、長度，即使長度相等且方向相同，而起點不同的有向線段，也不是相同的有向線段。

零向量：長度為的0向量，記作$\vec{0}$，$\vec{0}$的方向是任意的的。

單位向量：長度等於1個單位長度的向量。
平行向量：方向相同或相反的非零向量。



如右圖示，三個向量$\vec{c}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$所在的直線平行，易知這三個向量

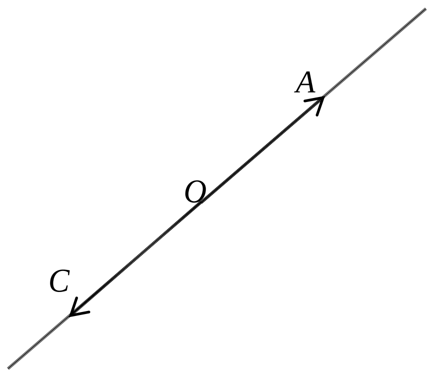
平行，記作$\vec{a}//\vec{b}//\vec{c}$，我們也可以稱這三個向量共線。

我們規定$\vec{c}$與任一向量平行。

問題2：我們知道兩個向量不能比較大小，只有模等與不等，方向同與不同的區別，你認為如何定義兩個相等向量？

相等向量：長度相等且方向相同的向量。

如上圖示，向量$\vec{c}$與A相等，記作$\vec{a}=\vec{b}$。任意兩個非零的相等向量，都可用同一條有向線段來表示，並且與有向線段的起點無關。

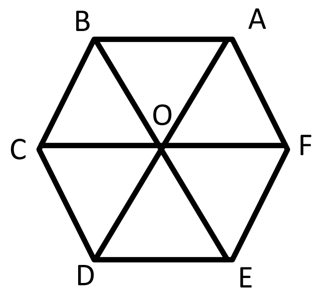


共線向量：如上圖示，任作一條與$\vec{c}$所在直線平行的直線l，

在l上取一點O，則可在l上分別作出$\vec{OA}=a$，$\vec{OC}=c$，這就是，任一組平行向量可移到同一直線上，因此，平行向量也叫做共線向量。

二、例題：

例題1：如圖，設O是正六邊形$ABCDEF$的中心，分別寫出圖中與向量$\vec{OA}$、$\vec{OB}$、$\vec{OC}$相等的向量。



解：$\vec{OA}=\vec{CB}=\vec{DO}$；

$\vec{OB}=\vec{DC}=\vec{EO}$；

$\vec{OC}=\vec{AB}=\vec{ED}=\vec{FO}$

例題2：判斷以下各題是否正確。

(1)平行向量是否一定方向相同？	不一定

(2)不相等的向量是否一定不平行？	不一定
(3) 與零向量相等的向量必定是什麼向量？	零向量
(4)與任意向量都平行的向量是什麼向量？	零向量
(5)若兩個向量在同一直線上，則這兩個向量一定是什麼向量？	平行向量
(6)兩個非零向量相等的條件是什麼？	長度相等且方向相同
(7)共線向量一定在同一直線上嗎？	不一定

例題 3：下列和種情況中，向量的終點各構成什麼圖形？

(1)把所有單位向量平移到同一個起點。	一個半徑為 1 的圓
(2)把平行於某一直線的所有單位向量平移到同一個起點。	兩個點
(3)把平行於某一直線的所有向量平移到同一個起點。	一條直線

三、鞏固練習：

課本 ***P*****106** ，練習**5.1** ，**1** ，**2** 。

四、課堂小結：

向量的概念與表示方法？

五、家課：

課本 ***P*****106** ，習題**5.1** ，**1** ，**2** ，**3** 。

5.2.1 向量的加法與減法

教學目標：1.掌握向量的加法，會作向量的和；

2.與物理學科之間的滲透，改善數學學習信念，提高學生學習數學的興趣。

教學重點：向量加法的概念和向量加法的作圖。

教學難點：對向量加法定義的理解，多個向量加法的作圖。

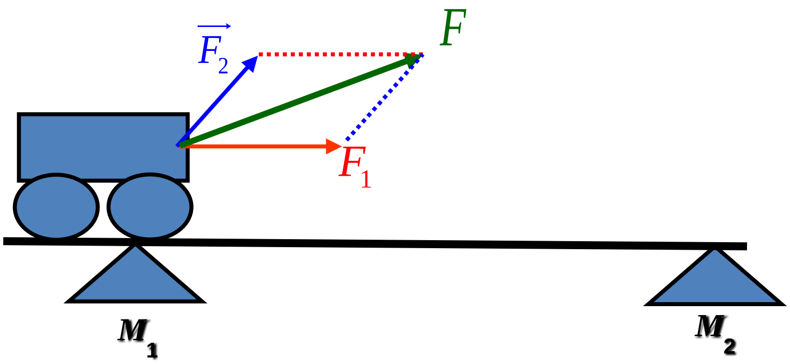
教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、情景引入：

一物體在常力$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$作用下沿直線從點$M_1$移動到點$M_2$，則力$\overrightarrow{F}$即為力$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$的合力。

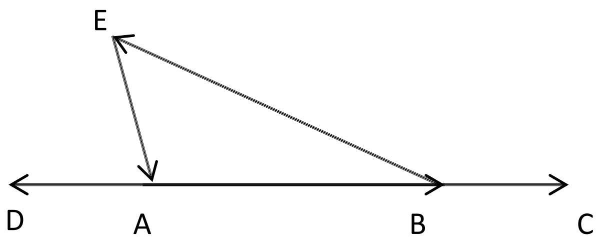


向量的加法：兩個向量和的運算，叫做向量的加法。

問題 1：如下圖，巴士從 A 到 B，再從 B 到 C，則兩次位移的和是__________

問題 2：如下圖，巴士從 A 到 B，再從 B 到 D，則兩次位移的和是__________

問題 3：如下圖，巴士從 A 到 B，再從 B 到 E，則兩次位移的和是__________

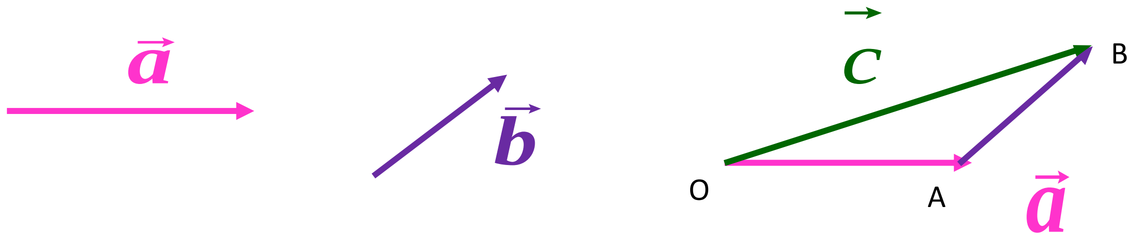


問題 4：

綜合以上的結論是什麼？

三角形法則：設已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，以空間任意一點O為始點接連作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，

$\vec{AB}=\vec{b}$得一折線 OAB，從折線的端點 O 到另一端點 B 的向量$\vec{OB}=\vec{c}$，叫做兩



向量$\vec{a}$與$\vec{b}$的和，記作$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。這種兩個向量和的方叫三角形法則。

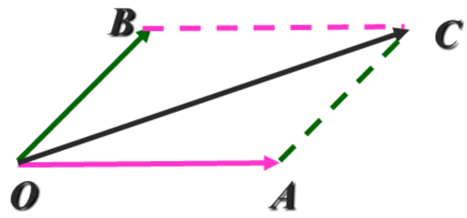
注：作平移，首尾連，由起點指終點。(首尾順次相連)

平行四邊形法則：如果以兩個向量$\vec{OA}$，$\vec{OB}$為鄰邊組成一個平行四邊形$OACB$，

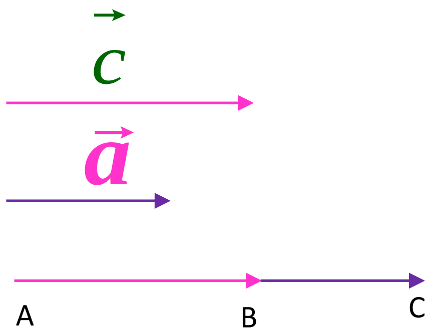
那麼對角線向量$\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{OB}$。

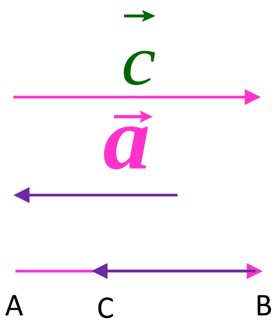
這種兩個向量和的方叫平行四邊形法則。

注：在自由向量的意義下，兩向量合成的平行四邊形法則可歸結為三角形法則.



特殊情況：$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$



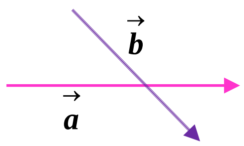


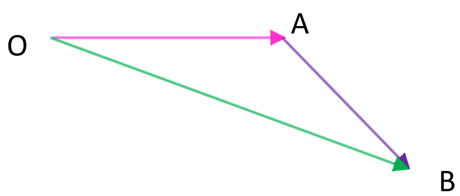
所以$\vec{AC}$是所求。

二、例題：

例題 1：已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，求作向量$\vec{a}+\vec{b}$。

作法：在平面內任取一點O，作向量$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{AB}=\vec{b}$。則$\vec{OB}=\vec{a}+\vec{b}$。





所以$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$是所求。

向量的加法滿足下面的運算規律：

(1)交換律： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}$

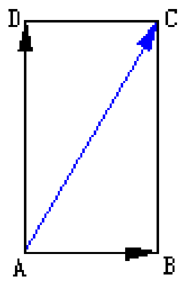
(2)結合律：$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})}$

(3) $\boldsymbol{\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}}$

(4) $\boldsymbol{\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}}$

例題 2：如右圖，一艘船從 A 點出發以 $2\sqrt{3}$ km/h 的速度向垂直於對岸的方向行駛，同時河水的流速為 2 km/h。求船實際航行速度的大小與方向(用與流速間的夾角表示)。

解：設 $\overrightarrow{AD}$ 表示船向垂直於對岸行駛的速度，$\overrightarrow{AB}$ 表示水流的速度，以 AD，AB 為鄰邊作平行四邊形 ABCD，則 $\overrightarrow{AC}$ 就是船實際航行的速度。



在 RtΔABC 中，$|\overrightarrow{AB}|=2$ ，$|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{3}$

所以$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2}=4$

因為 $\tan\angle CAB=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow\angle CAB=60°$

答：船的實際航行的速度的大小為 $4\text{km}/\text{h}$ ，方向與水流速間的夾角為 $60°$

三、鞏固練習：

課本 ***P*109** ，練習 **2** ，**3** ，**4** 。

四、課堂小結：

向量加法法則有哪些？

五、家課：

課本 ***P*113** ，習題 **5.2** ，**2** ，**3** ，**4** ，**5** 。

5.2.2 向量的加法與減法

教學目標：1.掌握向量的減法，會作向量的差；

2.培養學生主動探求知識、合作交流的意識，感受數學思維的全過程。

教學重點：向量減法的概念和向量減法的作圖。

教學難點：對向量減法定義的理解，多個向量減法的作圖。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

三角形法則：首尾順次接。

平行四邊形法則：首首接，作平行四邊形對角線。

化簡：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=$____________。

二、新課教授：

相反向量：與 $\boldsymbol{a}$ 長度相等，方向相反的向量。

記作 $-\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$ 互為相反向量。

規定：

(1)零向量的相反向量仍是零向量。$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$

(2)任一向與它相反向量的和是零量。$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(3)如果 $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ 互為相反的向量，那麼 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的差，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$

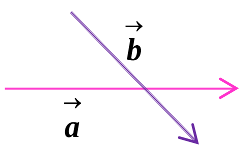
向量的減法：兩個向量差的運算。

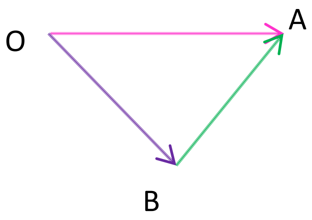
問題 1：怎樣作向量差的圖？

作向量的差：已知向量 $\vec{a}$ ，$\vec{b}$ ，求作向量 $\vec{a}-\vec{b}$ 。

$$\begin{aligned}因為 (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}&=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

所以作法：在平面內任取一點 O ，作向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 。則 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ 。

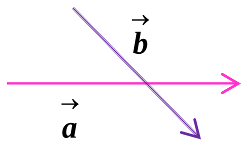


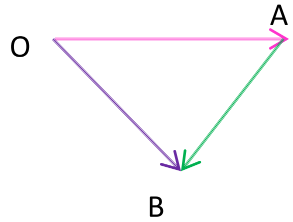


所以 $\overrightarrow{BA}$ 是所求。

注：首首接，終減始。

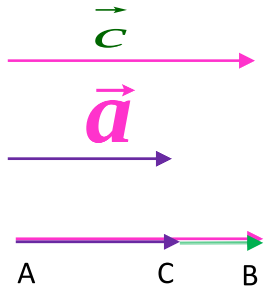
問題 2：上題中，作 $\vec{b}-\vec{a}$ ，那麼所得向是什麼？

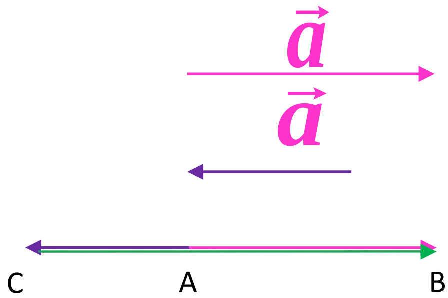




所以 $\vec{AB}$ 是所求。

問題 3：如下圖， $a // b$ ，怎樣作出 $\vec{a}-\vec{b}$ 呢？





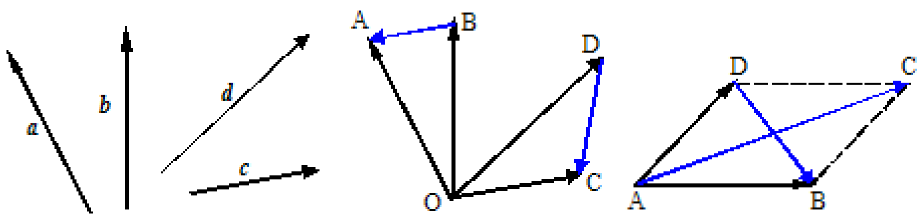
所以 $\vec{CB}$ 是所求。

三、例題：

例題 1：如圖，已知向量 a，b，c，d，求作向量 $\vec{a}-\vec{b}$ ， $\vec{c}-\vec{d}$

作法：在平面上取一點 O ，作向量 $\vec{OA}=\vec{a}$ ， $\vec{OB}=\vec{b}$ ， $\vec{OC}=\vec{c}$ ， $\vec{OD}=\vec{d}$ 。作 $\vec{BA}$ ，

$\vec{DC}$ ，則 $\vec{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ $\vec{DC}=\vec{c}-\vec{d}$



例題 2：平行四邊形 $ABCD$ 中， $\vec{AB}=a$ ， $\vec{AD}=b$ ，用 a ， b 表示向量 $\vec{AC}$ 、 $\vec{DB}$

解：由作向量和的平行四邊形法則，得 $\vec{AC}=a+b$

由作向量差的方法，知 $\vec{DB}=\vec{AB}-\vec{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

四、鞏固練習：

課本 ***P*112**，練習**1** ，**2** 。

五、課堂小結：

向量減法法則是怎樣的？

六、家課：

課本 ***P*113**，習題**5.2** ，**6** ，**8** 。

5.3.1 實數與向量的積

教學目標：1.掌握實數與向量的積的定義及實數與向量的積的運算律；
2.理解兩個向量共線的充要條件；

教學重點：實數與向量的積的定義、運算律，向量共線的充要條件。

教學難點：對向量共線的充要條件及平面向量基本定理的理解，既是本節的難點亦是本章的難點。

教學方法：引導啟發。

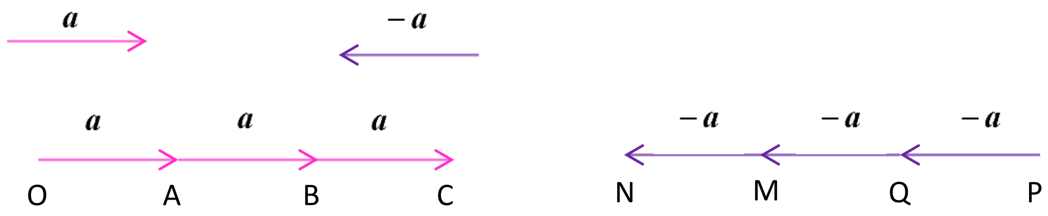
授課類型：新授課。

教學過程：

一、新課教授：

實數與向量的積

問題 1：已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ ，作出 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 和 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$



由上圖可知 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ ， 把 — $\boldsymbol{a}$ 記作 $3\boldsymbol{a}$ ，即

$\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{a}$ 。

由上圖可知 $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MN}=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$， 把 $(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$ 記作 $-3\boldsymbol{a}$ ，即 $\overrightarrow{PN}=-3\boldsymbol{a}$ 。

問題 2：實數與向量的積，與原向量的方向和長度有什麼關係？

$3\boldsymbol{a}$ 的方向與 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同， $3\boldsymbol{a}$ 的長度是 $\boldsymbol{a}$ 的長度的 3 倍，即 $|3\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}|$ ；

$-3\boldsymbol{a}$ 的方向與 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反， $-3\boldsymbol{a}$ 的長度是 $\boldsymbol{a}$ 的長度的 3 倍，即 $|-3\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}|$ 。

綜合以上結論得：

一般地，實數 λ 與向量 $\boldsymbol{a}$ 的積是一個向量，記作 $\lambda\boldsymbol{a}$ ， 它的長度與方向規定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$ ；

(2) 當 $\lambda > 0$ 時，λa 的方向與 a 的方向相同；
當 $\lambda < 0$ 時，λa 的方向與 a 的方向相反；
當 $\lambda = 0$ 時，$\lambda a = 0$ 。

根據實數與向量的積的定義，可以驗證下面的運算律。
設 λ ，μ 為實數，那麼
(1)結合律：$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
(2)分配律：$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
(3)分配律：$\lambda(a + b) = \lambda a + \mu b$

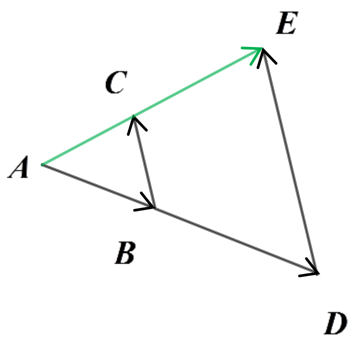
二、例題：
例題 1：計算：
(1) $(-3)\times 4a$
(2) $3(a+b)-2(a-b)-a$
(3) $(2a+3b-c)-(3a-2b+c)$
解：略。

三、新課教授：
向量共線的充要條件：
定理 向量 b 與非零向量 a 共線的要條件是有且只有一個實數 λ ，使得 $b = \lambda a$ 。

四、例題：

例題 2：如右圖，已知 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ ，$\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{BC}$ 。

試判斷 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AE}$ 是否共線。



解：因為 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$

$= 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

$= 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= 3\overrightarrow{AC}$

所以 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AE}$ 共線。

五、鞏固練習：

課本 ***P*115**，練習**1 ，2 ，3 ，4** 。

六、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

七、家課：

課本 ***P*118**，習題**5.3 ，2 ，3 ，4** 。

5.3.2 實數與向量的積

教學目標：1.理解平面向量的基底的意義與作用，學會選擇恰當的基底，將簡單圖形中的任一向量表示為一組基底的線性組合；

2.通過對平面向量基本定理的探究過程，讓學生體會數學定理的產生、形成過程，體驗定理所蘊含的轉化思想。

教學重點：平面向量基本定理的理解與應用。

教學難點：對平面向量基本定理的發現和形成過程。

教學方法：引導啟發。

授課類型：新授課。

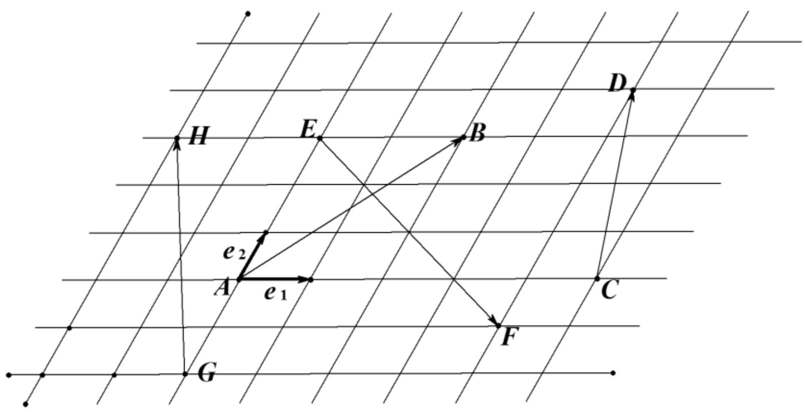
教學過程：

一、溫習舊知識：

向量共線的充要條件是什麼？

二、新課教授：

問題 1：如圖設$\boldsymbol{e_1}$、$\boldsymbol{e_2}$是同一平面內的兩個不共線的向量，以$\boldsymbol{e_1}$、$\boldsymbol{e_2}$表于下列向量：



問題 2：平面內任一向量是否可以用兩個不共線的向量來表示？

若$\boldsymbol{e_1}$、$\boldsymbol{e_2}$是兩個不共線向量，$\boldsymbol{a}$是平面中的任一向量，則$\boldsymbol{a}$一定可以表示成

$\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{e_1} + \lambda_2 \boldsymbol{e_2}$ $\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2$。

平面向量基本定理：如果$\boldsymbol{e_1}$、$\boldsymbol{e_2}$是同一平面內的兩個不共線向量，那麼對於這一平面內的任一向量$\boldsymbol{a}$，有且只有一對實數λ_1、λ_2，使$\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{e_1} + \lambda_2 \boldsymbol{e_2}$。

我們把不共線的向量$\boldsymbol{e_1}$、$\boldsymbol{e_2}$叫做表示這一平面內所有向量的一組**基底**。

注：(1) 我們把不共線向量$\boldsymbol{e_1}$、$\boldsymbol{e_2}$叫做表示這一平面內所有向量的一組基底；

(2)基底：不唯一，共面不共線；基底確定了，對於平面內的每個向量來說，實數對 λ_1 、λ_2 的值唯一確定；

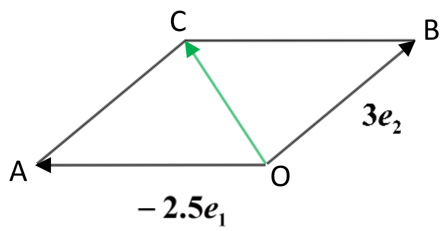
(3)觀察表示形式，從左到右的過程實際上可以看成是向量的分解，反過來則是向量的合成；

(4)當 $\boldsymbol{e}_1$ 、$\boldsymbol{e}_2$ 互相垂直時，就稱為向量的正交分解。

問題 3：對比向量共線定理，在內容和表述形式上有什麼區別和聯繫？

三、例題：

例題 1：已知向量 $\boldsymbol{e}_1$ 、$\boldsymbol{e}_2$ ，求作向量 $-2.5\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$ 。

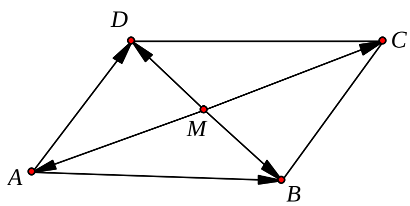


作法：如右圖，任取一點 O ，作 $\overrightarrow{OA}=-2.5\boldsymbol{e}_1$ ，$\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{e}_2$ ，作平行四邊 OACB。

於是 $\overrightarrow{OC}$ 就是所求作的向量。

例題 2：如圖，平行四邊 ABCD 的對角線相交於點 M，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ ，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ ，

用 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$ 、$\overrightarrow{MB}$ 、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$ 。



解：在平行四邊形 ABCD 中，

因為 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

所以 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

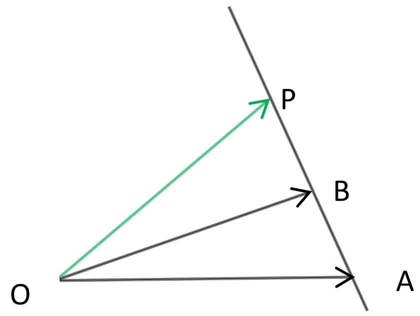
$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$$=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$$

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$$

$$\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$$

例題 3：如圖，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共線用表示，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\ (t\in R)$，用$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$。



解：因為$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}$$

$$=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

四、鞏固練習：

課本 **P118**，練習**1**，**2**。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 **P119**，習題**5.3**，**5**，**6**，**7**。

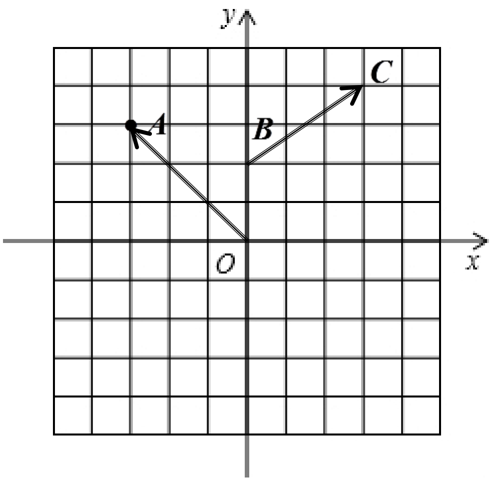
5.4.1 平面向量的座標運算

教學目標：1.理解平面向量的座標概念；
2.通過平面向量座標表示和座標運算法則的推導培養學生歸納、猜想、演繹的能力。
教學重點：平面向量的座標運算。
教學難點：平面向量的座標意義。
教學方法：引導啟發、探究學習。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
(1)相等向量：長度相等且方向相同的向量；
(2)平面向量的基本定理：$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e_1}+\lambda_2\boldsymbol{e_2}$。

二、新課教授：

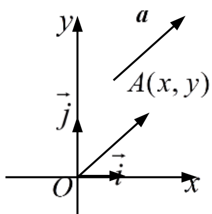
問題 1：下圖中點 A 座標是？能用座標表示向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{BC}$嗎?



問題 2：在平面直角座標系中，每一個點都可用一對實數(x, y)表示，那麼，每一個向量可否也用一對實數來表示？
是，對於$\boldsymbol{a}$，有且僅有一對實數(x, y)與之對應。

在直角座標系內，我們分別選取與軸x、y軸方向相同的兩個單位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$作為基底。對於任一向量$\boldsymbol{a}$，由平面向量基本定理知，有且只有一對實數x、y，使得

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$



我們把(x, y)叫做向量$\boldsymbol{a}$的(直角)座標，記作$\boldsymbol{a}=(x, y)$。
其中x叫o在x軸上的座標，$\vec{j}$叫做$\boldsymbol{a}$在y軸上的座標。

上式叫做向量的座標表示，與o相等的向量的座標也為$\boldsymbol{a}=(x,y)$

問題 3：基底唯一嗎？

基底不唯一，只要不共線，就可作為基底。

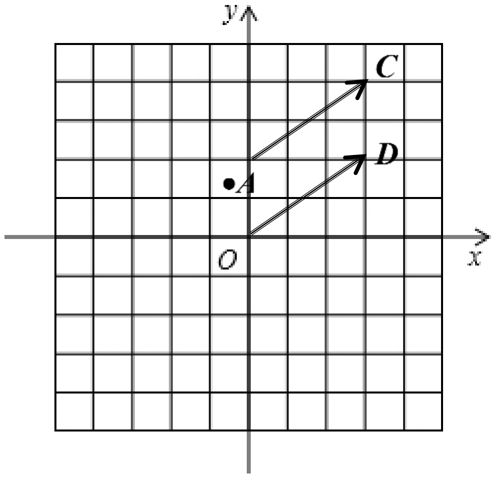
問題 4：基底選定後，一向量在基底方向的分解形式是唯一嗎？

唯一

問題 5：向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{0}$的座標是？。

$\boldsymbol{i}=(1,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1)$，$\boldsymbol{0}=(0,0)$。

問題 6：問題 1 中從原點引出的向量$\overrightarrow{OA}$的座標是？。



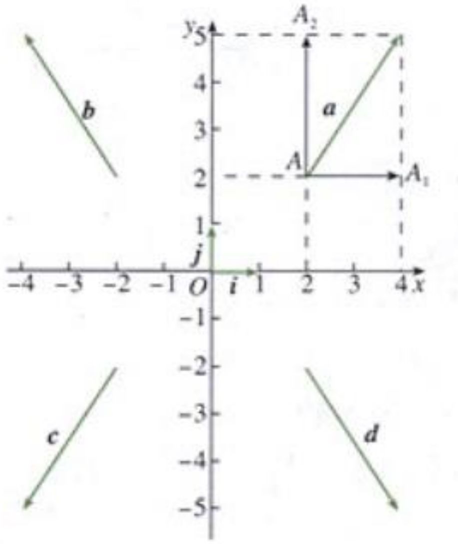
問題 7：則問題 1 中C 座標為？$\overrightarrow{OD}$座標為？

相等向量的座標相同，座標相同的向量是相等向量

即如$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，則$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$。

三、例題：

例題 1：如右圖，用基底$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$分別是表示向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$，並求出它們的座標。



解：$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AA_2}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$

所以$\boldsymbol{a}=(2,3)$

同理$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}=(-2,3)$

$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(-2,-3)$

$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}=(2,-3)$

注：(1)寫出向量在正交基底$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$方向的分解形式，就得到了向量的座標；

(2)反過來，知道了一個向量的座標，就相當於知道了它在$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$方向的分解形式

平面向量的座標運算：

問題 8：已知：$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，你能得出$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{a}-\vec{b}$、$\lambda\vec{a}$的座標嗎？

兩個向量和與差的座標分別等於這兩個向量相應座標的和與差：

$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$；

實數與向量的積的座標等於用這個實數乘原來向量的相應座標：

$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y)$。

例題 2：已知$\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(-3,4)$，求$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$的坐標。

解：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,1)+(-3,4)=(-1,5)$

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2,1)-(-3,4)=(5,-3)$

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}&=3(2,1)+4(-3,4)\\&=(6,3)+(-12,16)\\&=(-6,19)\end{aligned}$$

四、鞏固練習：

課本 $P122$，練習 **1**。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 $P122$，練習 **2**。

課本 $P123$，習題 **5.4**，**2**。

5.4.2 平面向量的座標運算

教學目標：1.掌握平面向量的座標運算。
2.通過用代數方法處理幾何問題，提高學生用數形結合的思想方法解決問題的能力。

教學重點：平面向量的座標運算。

教學難點：平面向量的座標意義。

教學方法：引導啟發、探究學習。

授課類型：新授課。

教學過程：

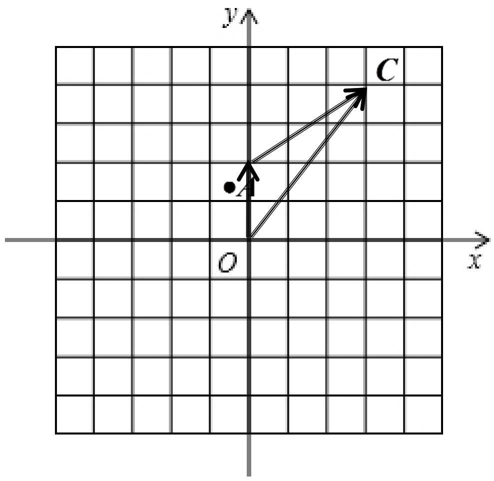
一、溫習舊知識：

向量共線的充要條件：

定理 向量 $\boldsymbol{a}$ 與非零向量 $\boldsymbol{b}$ 共線的要條件是有且只有一個實數 λ ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 。

二、新課教授：

問題 1：圖中中 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}$ 座標為？與 $\overrightarrow{BC}$ 有什麼關係？



$\overrightarrow{OC}=(3,4)$ ， $\overrightarrow{OB}=(0,2)$ ， $\overrightarrow{BC}=(3,2)$

即 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

由此可得到：

一個向量的坐標等於表示此向量的有向線段的終點的坐標減去始點的坐標。

三、例題：

例題 1：已知 $A(3,5)$ ， $B(6,9)$ ，求 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{BA}$ 的坐標。

解： $\overrightarrow{AB}=(6,9)-(3,5)=(6-3,9-5)=(3,4)$

$\overrightarrow{BA}=(3,5)-(6,9)=(3-6,5-9)=(-3,-4)$

例題 2：已知平行四邊形 ABCD 的三個頂點 A、B、C 的坐標分別為 $(-2,1)$、$(-1,3)$ 、$(3,4)$ ，求頂點 D 的坐標。

解：設頂點 D 的坐標為 (x,y)

因為 $\vec{AB}=(-1-(-2),3-1)=(1,2)$

$\vec{DC}=(3-x,4-y)$

由 $\vec{AB}=\vec{DC}$，得

$(1,2)=(3-x,4-y)$

所以 $\begin{cases}1=3-x\\2=4-y\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

所以頂點 D 的坐標為 $(2,2)$。

問題 2：設 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，其中 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，則 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的坐標有什麼關？

即有且只有一個實數 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

這個結論用坐標表示為 $(x_1,y_1)=\lambda(x_2,y_2)$

即 $\begin{cases}x_1=\lambda x_2\\y_1=\lambda y_2\end{cases}$

消去後 λ 得 $x_1y_2-x_2y_1=0$

這就是說，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq 0)$ **的充要條件是** $x_1y_2-x_2y_1=0$

例題 2：已知 $\boldsymbol{a}=(4,2)$，$\boldsymbol{b}=(6,y)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 y。

解：因為 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

所以 $4y-2\times 6=0$

所以 $y=3$

例題 3：已知 $A=(-1,-1)$，$B=(1,3)$，$C=(2,5)$，求證 A、B、C 三點共線。

證明：因為 $\vec{AB}=(1-(-1),3-(-1))=(2,4)$

$\vec{AC}=(2-(-1),5-(-1))=(3,6)$

又 $2\times 6-3\times 4=0$

所以 $\vec{AB}/\!/\vec{AC}$

直線 AB、直線 AC 有公共點 A，
所以 A、B、C 三點共線。

四、鞏固練習：

課本 ***P*****123** ，練習 **3** ，(2)，(3)，(4)， **4** 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

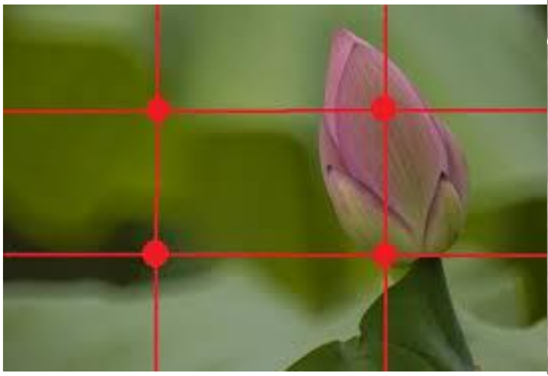
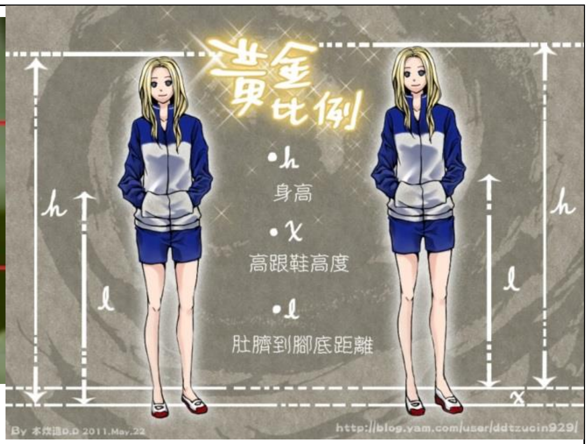
六、家課：

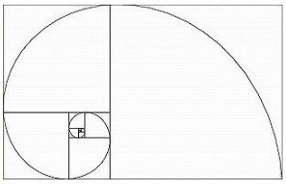
課本 ***P*****123** ，習題 **5.4** ， **7** ， **8** ， **9** 。

5.5.1 線段定比分點

教學目標：1.線段的定比分點座標公式；
2.線段的中點座標公式；
3.明確 P 的位置及 λ 範圍的關係。
教學重點：線段的定比分點和中點座標公式的應用。
教學難點：用線段的定比分點座標公式解題時區分 $\lambda > 0$ 還是 $\lambda < 0$ 。
教學方法：引導啟發、探究學習。
授課類型：新授課。
教學過程：

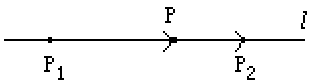
一、情景引入：

黃金比例，實際是一種數學上的比例關係，如果我們把同一物體按 0.618 的比例分成兩部分，由於按這個比例關係得到的畫面十分完美，所以就把此稱為黃金比例。以下我們學習關於線段比例的課題。

二、新課教授：
如下圖，設 P_1 ， P_2 是直線 l 上的兩點， P 是 l 上不同於 P_1 ， P_2 的任一點，存在實數 λ ，使 $\overrightarrow{p_1p}=\lambda\overrightarrow{pp_2}$ ，λ 叫做點 P 分 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 所成的比。

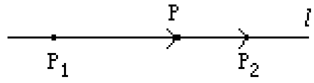
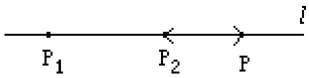
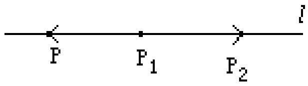


問題 1：點 P 分 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 所成的比和 P 分 $\overrightarrow{p_2p_1}$ 所成的比相同嗎？

不同，由 $\lambda_1=\dfrac{\overrightarrow{p_1p}}{\overrightarrow{pp_2}}$ ，$\lambda_2=\dfrac{\overrightarrow{p_2p}}{\overrightarrow{pp_1}}$ ，知 $\lambda_1\neq\lambda_2$

注：P_1 為始點，P_2 為終點，P 為分點，λ 等於始分比分終。

問題 2：點 P 分 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 分為三種情況，如下求的取值範圍 λ 。

P 叫 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 內分點		$\overrightarrow{p_1p_2}>0$ ，$\overrightarrow{p_2p_1}>0$，所以 $\dfrac{\overrightarrow{p_1p}}{\overrightarrow{pp_2}}>0$	$\lambda>0$
P 叫 $\overrightarrow{p_1p_2}$ ______		$\overrightarrow{p_1p_2}$___0，$\overrightarrow{p_2p_1}$___0，所以 $\dfrac{\overrightarrow{p_1p}}{\overrightarrow{pp_2}}$___$0$	λ___0
P 叫 $\overrightarrow{p_1p_2}$ ______		$\overrightarrow{p_1p_2}$___0，$\overrightarrow{p_2p_1}$___0，所以 $\dfrac{\overrightarrow{p_1p}}{\overrightarrow{pp_2}}$___$0$	λ___0

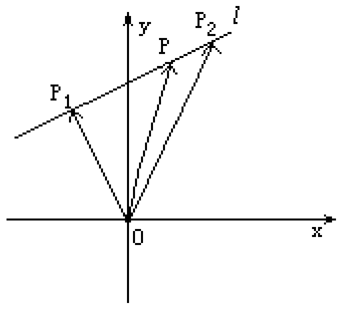
總結：(1)當點 P 在 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 線段上時，$\lambda>0$ 。

(2)當點 P 在 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 的延長線上時，$\lambda<0$ 。

(3)當點 P 是 $\overrightarrow{p_1p_2}$ 的中點時，$\lambda=1$ 。

問題 3：點 P 的坐標應如何表示呢？

如右圖，設 $\overrightarrow{p_1p}=\lambda\,\overrightarrow{pp_2}$ ，且點 $P_1(x_1,y_1)$ 、$P(x,y)$ 、$P_2(x_2,y_2)$。由向量的座標等於終點的座標減去起點的座標，我們有：



$$\overrightarrow{p_1p}=(x-x_1,y-y_1)$$

$$\overrightarrow{pp_2}=(x_2-x,y_2-y)$$

因為 $\overrightarrow{p_1p}=\lambda\,\overrightarrow{pp_2}$

所以 $(x-x_1,y-y_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y)$

所以 $\begin{cases}x-x_1=\lambda(x_2-x)\\ y-y_1=\lambda(y_2-y)\end{cases}$

解得$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$

我們把上式叫做有向線段 $\overrightarrow{p_1 p_2}$ 的**定比分點座標公式**。

特別當 $\lambda = 1$，即當點 P 是 P_1P_2 線段的中點時

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

上式叫做有向段 $\overrightarrow{p_1 p_2}$ 的**中點座標公式。**

三、例題：

例題 1：已知兩點 $P_1(3,2)$、$P_2(-8,3)$、。求點 $P(\frac{1}{2}, y)$ 分 $\overrightarrow{p_1 p_2}$ 所成的比 λ 及 y 的值。

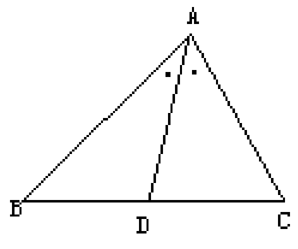
解：由線段的定比分點座標公式，得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{3+\lambda(-8)}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{2+\lambda \times 3}{1+\lambda} \end{cases}$$

解得$\begin{cases} \lambda = \dfrac{5}{17} \\ y = 2\dfrac{5}{22} \end{cases}$

例題 2：已知 ΔABC 中， $A(5,-7)$ ， $B(-1,1)$ ， $C(1,-4)$

求：∠A 平分線 AD 的長度。



分析：求∠A 平分線$|AD|$，因 A 點已知，只要求出 D 的座標即可，把 D 點看作 B、C 兩點的內分點，

解：因為 AD 是∠BAC 的平分線，$|AB| = 10|$，$|AC| = 5|$。

所以$\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{10}{5} = 2$，所以$\lambda = 2$

設 D 點座標為(x, y)

則$\begin{cases} x = \dfrac{(-1)+2\times 1}{1+2} = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1+2\times(-4)}{1+2} = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$

D 點座標為$(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{7}{3})$

所以$|AD| = \sqrt{(5-\dfrac{1}{3})^2 + (-7+\dfrac{7}{3})^2} = \dfrac{14}{3}\sqrt{2}$

四、鞏固練習：

課本 ***P*126** ，練習 **3** 。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 ***P*126** ，習題 **5.5** ， **2** ， **4** 。

5.6.1 平面向量的數量積及運算律

教學目標：1.掌握平向向量數量積運算規律；

2.能用數量積的重要性質及數量積運算規律解決有關問題。

教學重點：平面向量數量積的定義。

教學難點：平面向量數量積的運算。

教學方法：引導啟發、探究學習。

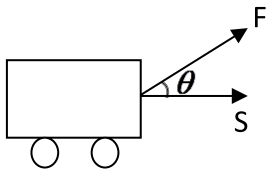
授課類型：新授課。

教學過程：

一、情景引入：

問題 1：觀察討論做勁的公式中右右兩端的量分別是什麼量？什麼影響了功的大小？如何精確的給出數學中的定義？

力做的功：$\boldsymbol{W}=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{S}|\cdot\cos\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{\theta}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的夾角。



二、新課教授：

問題 2：現我們引入向量數量積的概念，使得做功公式符合這種運算。

1.兩個非零向量夾角的概念

已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，作則向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$。則 $\angle AOB=\theta$ $(0^O\le\theta\le180^O)$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的夾角。

顯然：(1)當 $\theta=0^O$ 時，$\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 同向；

(2)當 $\theta=180^O$ 時，$\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 反向；

(3)當 $\theta=90^O$ 時，$\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 垂直，記 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$。

注：在兩向量的夾角定義，兩向量必是同起點的，範圍 $0^O\le\theta\le180^O$

2.平面向量數量積(內積)的定義：

已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它們的夾角是 θ，則數量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的數量積，

記作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，

注：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 中的“·”不可省略也不可寫成“×”；

(2)規定，零向量與任一向量的數量積為 0：

(3)兩個向量的數量積是一個數量。

三、例題：

例題 1：已知$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$的夾角$\boldsymbol{\theta}=\mathbf{120^{O}}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。

解：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\theta}$

$$=5\times4\times\cos120^{O}$$

$$=5\times4\times(-\frac{1}{2})$$

$$=-10$$

問題 2：填寫下表确定的$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$值或取值範圍，及$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$的位置關係：

	$\theta=0^{O}$	$0^{O}\le\theta<90^{O}$	$\theta=90^{O}$	$90^{O}<\theta<180^{O}$	$\theta=180^{O}$
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$					
位置					

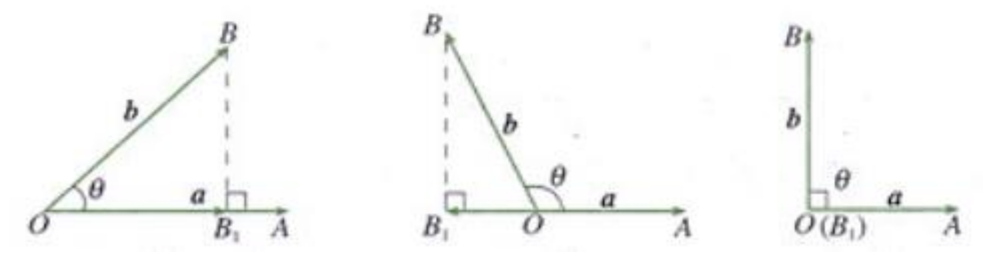
答案：

	$\theta=0^{O}$	$0^{O}\le\theta<90^{O}$	$\theta=90^{O}$	$90^{O}<\theta<180^{O}$	$\theta=180^{O}$
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$	正數	0	負數	$-\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$
位置	$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$同向		$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$垂直		$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$反向

投影：

如右圖，作向量$\vec{OA}=\vec{a}$，$\vec{OB}=\vec{b}$。過點 B 作$\boldsymbol{BB_1}$宜於宜線 OA，垂足為$\boldsymbol{B_1}$，則

$$OB_1=|\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\theta}\text{。}$$



$|\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\theta}$叫做向量$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$方向上的投影。因此，我們得到

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的幾何意義：數量積$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$等於$\boldsymbol{a}$的長度在$|\boldsymbol{a}|$與$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$的方向上的投影

$|\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\theta}$的乘積。

根據向量數量積的定義，容易得到如下重要性質：

設$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$都是非零向量，$\boldsymbol{e}$是與$\boldsymbol{b}$方向相同的單位向量，$\boldsymbol{\theta}$是$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{e}$的夾角，則

(1) $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

(3)當$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$同向時，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；

當$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$反向時，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$。

等別地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$或$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$。

(4) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

(5) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

例題 2：已知$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$方向上的投影是$\dfrac{3}{2}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。

解：已知$|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta\\&=3\times\frac{3}{2}\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

例題 3：已知$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-40$，$|\boldsymbol{a}|=10$，$|\boldsymbol{b}|=8$，求$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$的夾角$\theta$。

解：$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-40}{10\times8}=-\dfrac{1}{2}$，且$0^{o}\le\theta\le180^{o}$所以$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$。

四、鞏固練習：

課本 $P130$，練習 2，3。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 $P130$，練習 4。

課本 $P130$，習題 5.6，3，6。

5.6.2 平面向量的數量積及運算律

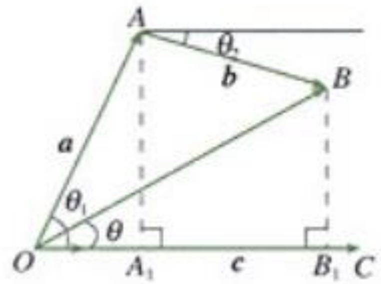
教學目標：掌握兩個向量共線、垂直的幾何判斷，會證明兩向量垂直，以及能解決一些簡單問題。
教學重點：平面向量數量積及運算規律
教學難點：平面向量數量積的應用。
教學方法：引導啟發、探究學習。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、新課教授：
已知向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$和實數λ，則向量的數量積滿足下列運算律：
(1)交換律： $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
(2)結合律： $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$
(3)分配律： $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
問題 1：若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$
若$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$是向量，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$____$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$相等嗎？

現證明運算律(3)分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

證明：如右圖，任取一點 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$。因為$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (即$\overrightarrow{OB}$)在 c 方向上的投影等於$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{c}$方向上的投影的和，即

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|\cos\theta_1+|\boldsymbol{b}|\cos\theta_2$$



所以$|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\cos\theta_1+|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\cos\theta_2$

所以$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$
所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

二、例題：
例題 1：求證：
(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$
(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$
證明：(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$
$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$
$=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$
(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

例題 2：已知$|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$的夾角60^O，求$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$。

解： $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$

$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$

$=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6|\boldsymbol{b}|^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-6|\boldsymbol{b}|^2$

$=6^2-6\times4\times\cos60^O-6\times4^2$

$=-72$

例題3：已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$(且$\boldsymbol{a}$與$\boldsymbol{b}$不共線)，當且僅當k 為何值時。向量$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$與$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$互相垂直？

解：$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$與$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$互相垂直的充要條件是

$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=0$

即$\boldsymbol{a}^2-k^2\boldsymbol{b}^2=0$

因為$\boldsymbol{a}^2=3^2=9$，$\boldsymbol{b}^2=4^2=16$

所以$9-16k^2=0$

所以$k=\pm\dfrac{3}{4}$

也就是說，當且僅當$k=\pm\dfrac{3}{4}$時，$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$與$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$互相垂直。

三、鞏固練習：

課本$P130$，習題5.6，1。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

五、家課：

課本$P130$，習題5.6，2，4， 5。

5.7.1 平面向量數量積的坐標表示

教學目標：1.掌握兩個向量數量積的座標表示方法，能通過兩個向量的座標求出這兩個向量的數量積；

2.掌握兩個向量垂直的座標條件，能運用這一條件去判斷兩個向量垂直。

教學重點：兩個向量數量積的座標表示，向量的長度公式，兩個向量垂直的充要條件。

教學難點：對向量的長度公式，兩個向量垂直的充要條件的靈活運用。

教學方法：引導啟發、探究學習。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____________。

(2) 點 A 坐標(x_1, y_1)，點 B 坐標(x_2, y_2)。

$\overrightarrow{AB}=$_____________， $\overrightarrow{BA}=$_____________。

(3)若向量$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$，則向量$\boldsymbol{a}$的座標是________________；

(4)若向量$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，則向量$\boldsymbol{b}$可用$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$表示為___________。

二、情景引入：

問題 1： (2) 點 A 坐標(x_1, y_1)，點 B 坐標(x_2, y_2)。

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=$_____________。

問題 2：已知兩個非向量$\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$， $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，怎樣用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的坐標表示呢$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$？

三、新課教授：

問題 3：求值：

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=$_____________$=$_____。
$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=$_____________$=$_____。
$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=$_____________$=$_____。

如右圖

因為$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$

所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})$

$=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_2y_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+y_1y_2\boldsymbol{j}^2$

$=x_1x_2+y_1y_2$

這就是說，**兩個向量的數量積等於它們對應座標的乘積的和**，即

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$

回應問題 2。

四、鞏固練習：

(1)若$\vec{a}=(3,4)$，則$\vec{a}\cdot\vec{a}=$________， $|\vec{a}|=$______；

(2)若表示向量$\vec{a}$的起點和終點的座標分別為$(-2,2)$和$(4,-6)$，則

$|\vec{a}|=$__________；

(3)若$\vec{a}=(2,2)$，$\vec{b}=(-1,1)$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=$______。

五、新課教授：

1.平面向量數量積的座標表示的性質：

(1)向量的模

設$\vec{a}=(x,y)$，則有$|\vec{a}|^2=x^2+y^2$或$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

(2)平面內兩點間的距離公式

設$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，則$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

(3)兩向量垂直的座標表示的判斷條件

設$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，則$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

(4)兩向量的夾角的座標表示公式

設非零向量$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，θ為$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角，則

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}}$$

六、新課教授：

例題 1：已知$\vec{a}=(-1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},-1)$，求$a\cdot b$，$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\vec{a}$與$\vec{b}$的夾角θ。

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times(-1)=-2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\times 2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以　$0\le\theta\le\pi$

所以　$\theta=\frac{5\pi}{6}$

例題 2：已知$A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$，求證ΔABC是直角三角形。

證明：因　$\vec{AB}=(2-1,3-2)=(1,1)$，

$\vec{AC}=(-2-1,5-2)=(-3,3)$

所以$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=1\times(-3)+1\times 3=0$

所以$\vec{AB}\perp\vec{AC}$

所以ΔABC是直角三角形。

七、鞏固練習：

課本$P132$，練習**1**，**2**。

八、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

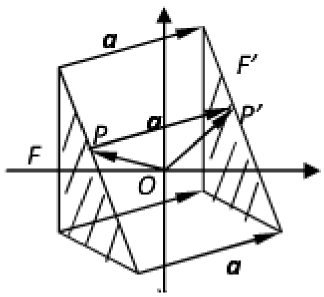
九、家課：

課本$P132$，習題**5.7**，**2**，**3**，**4**，**5**。

5.8.1 平移

教學目標：1.理解向量平移的幾何意義；
2.掌握平移公式，並能熟練運用平移公式簡化函數解析式。
教學重點：平移公式。
教學難點：向量平移幾何意義的理解。
教學方法：引導啟發、探究學習。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、情景引入：
問題 1：把一個向量 $\boldsymbol{a}$ 平行移動到某一位置所得新向量與原向相等嗎？
相等
問題 2：把一個圖形 $\boldsymbol{F}$ 作平行移動到某一個位置所的新圖形與原圖形 $\boldsymbol{F}$ 相同嗎？
相同
問題 3：如右圖，圖形 $\boldsymbol{F}$ 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移到圖形的過程，給出平移的定義。



二、教授新課：
設 $\boldsymbol{F}$ 是座標平面內的一個圖形，將 $\boldsymbol{F}$ 上所有點按照同一方向，移動同樣長度，得到圖形 $\boldsymbol{F}'$。我們把這一過程叫做圖形的**平移**。
設 $\boldsymbol{P(x,y)}$ 是圖形 $\boldsymbol{F}$ 上的任意一點，它在平移後圖形 $\boldsymbol{F}'$ 上的對點為 $\boldsymbol{P'(x',y')}$，且設 $\overrightarrow{\boldsymbol{PP'}}$ 的座標為 $\boldsymbol{(h,k)}$，則由

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}$$

得 $\boldsymbol{(x',y')=(x,y)+(h,k)}$

所以 $\begin{cases} x'=x+h \\ y'=y+k \end{cases}$

這個公式叫做點的**平移公式**。
它反映了圖形中的敏一點在平移後的新座標與原座標間的關係。

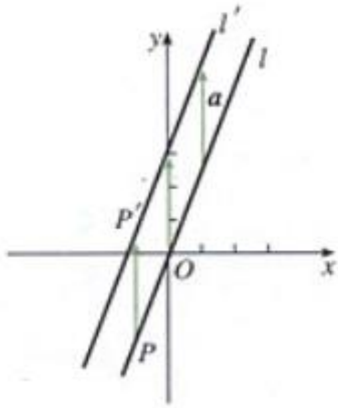
三、例題：
例題 1：(1)把點 $\boldsymbol{A=(-2,1)}$ 按 $\boldsymbol{a=(3,2)}$ 平移，求對應點 $\boldsymbol{A'}$ 的座標。
(2)點 $\boldsymbol{M=(8,-10)}$ 按 $\boldsymbol{a}$ 平移後的對應點 $\boldsymbol{M'}$ 的座標為 $\boldsymbol{(-7,4)}$，求 $\boldsymbol{a}$。

解：(1)由平移公式：$\begin{cases} x' = -2+3=1 \\ y' = 1+2=3 \end{cases}$ 即對應點 A' 的座標為 $(1,3)$

(2)由平移公式：$\begin{cases} -7 = 8+h \\ 4 = -10+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=-15 \\ k=14 \end{cases}$ 即 a 的座標為 $(-15,14)$

例題 2：如右圖，將函數 $y=2x$ 的圖像 l 按 $a=(0,3)$ 平移得到 l'，求 l' 的函數解析式。

解：設 $P(x,y)$ 為 l 上任一點，它在 l' 上的對應點為 $P'(x',y')$



由平移公式：$\begin{cases} x' = x+0 \\ y' = y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'-3 \end{cases}$

將它們代入到 $y=2x$ 中，得到

$y'-3=2x'$

即 $y'=2x'+3$

習慣上將上式中 x'，y' 寫作 x，y，得 l' 的解析式為

$y=2x+3$

注：圖像向上平移 3 個單。

例題 3：已知拋物線 $y=x^2+4x+7$。

(1)求拋物線頂點座標。

(2)求將這條拋物線平移到頂點與座標原點重合時的函數解析式。

解：(1)設拋物線 $y=x^2+4x+7$ 的頂點 O' 座標為 (h,k)，那麼

$$h=-\frac{4}{2}=-2$$

$$k=\frac{4\times 7-4^2}{4}=3$$

即這條拋物線頂點座標 O' 座標為 $(-2,3)$

(2)將這條拋物線平移，使點 $O'(-2,3)$ 與 $O(0,0)$ 重合，

設 $\overrightarrow{O'O}=(m,n)$，那麼

$$\begin{cases} m=0-(-2)=2 \\ n=0-3=-3 \end{cases}$$

設 $P(x,y)$ 是拋物線 $y=x^2+4x+7$ 上任一點，對應點 $P'(x',y')$

由平移公式得 $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'+3 \end{cases}$

代入 $y = x^2 + 4x + 7$ 整理得 $y' = x'^2$ 即
$y = x^2$

四、鞏固練習：

課本 ***P*135**，練習 **2**，**3**。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 ***P*135**，習題 **5.8**，**1**，**2**，**3**，**4**。

5.9.1 正弦定理

教學目標：1.通過對任意三角形邊長和角度關係的探索，掌握正弦定理的內容及其證明方法；

2.會運用正弦定理與三角形內角和定理，求出未知量。

教學重點：正弦定理的證明和理解。

教學難點：正弦定理的靈活運用。

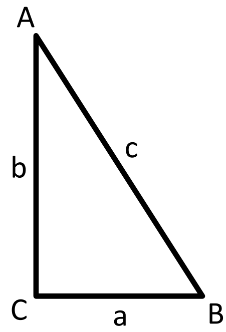
教學方法：引導啟發、探究學習。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

直角三角形中：



$\sin A=\frac{a}{c}$ ，$\sin B=\frac{b}{c}$ ，$\sin C=1$

即$c=\frac{a}{\sin A}$ ，$c=\frac{b}{\sin B}$ ，$c=\frac{c}{\sin C}$

所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

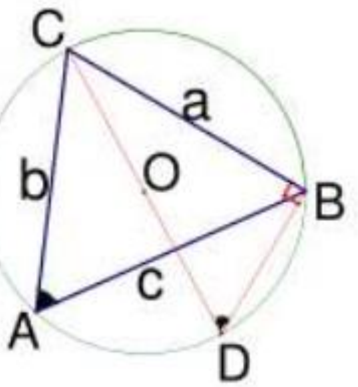
二、教授新課：

問題 1：以上公式限於直角三角形中，那麼斜三角形中此公式成立嗎？

正弦定理：在任一個三角形中，各邊和它所對角的正弦比相等，即

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ （R 為 ΔABC 外接圓半徑)

證明：(外接圓法)



如右圖所以，同弧所對圓周角等

所以$\angle A=\angle D$

所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{A}{\sin D}=CD=2R$

同理$\frac{b}{\sin B}=2R$ ，$\frac{c}{\sin C}=2R$

即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

注：從方程的觀點看，表達式中每一個等號所形成的等式中，含有四個量，顯然可“知三求一”

於是，正弦定理可解決兩類有關解三角形的問題：

(1)已知兩角和任意一邊，求其它兩邊和一角；

(2)已知兩邊與其中一邊的對角，求另一邊的對角，進而可求出其它的邊和角。

三、例題：

例題 1：在 ΔABC 中，已知 $c=10$，$A=45^{o}$，$C=30^{o}$，求 b(保留兩個有數字)。

解： 因為 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$B=180^{o}-(A+C)=180^{o}-(45^{o}+30^{o})=105^{o}$

所以 $b=\dfrac{c\cdot\sin B}{\sin C}=\dfrac{10\times\sin 105^{o}}{\sin 30^{o}}\approx 19$

例題 2：在 ΔABC 中，已知 $a=20$，$b=28$，$A=40^{o}$，求 B(精確到 1^{o})和 c(保留兩個有效數字)。

解：$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{28\sin 40^{o}}{20}\approx 0.8999$

因為 $0^{o}<B<180^{o}$

所以 $B\approx 64^{o}$，$B\approx 116^{o}$

(1) $B\approx 64^{o}$ 時，

$C=180^{o}-(A+B)=180^{o}-(40^{o}+64^{o})=76^{o}$

所以 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{20\sin 76^{o}}{\sin 40^{o}}\approx 30$

(2)當 $B\approx 116^{o}$ 時，

$C=180^{o}-(A+B)=180^{o}-(40^{o}+116^{o})=24^{o}$

所以 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{20\sin 24^{o}}{\sin 40^{o}}\approx 13$

例題 3：在 ΔABC 中，$a=60$，$b=50$，$A=38^{o}$，求 B(精確到 1^{o})和 c(保留兩個有效數字)。

解：已知 $b<a$，所以 $B<A$，因此 B 也是銳角。

因為 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{50\sin 38^{o}}{60}\approx 0.5131$

所以 $B=31^{o}$ 。

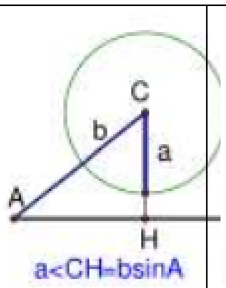
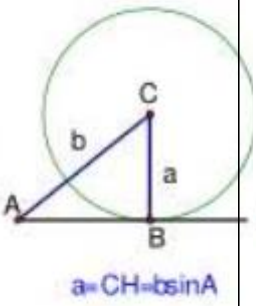
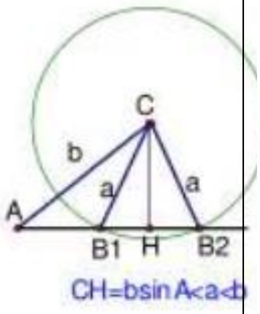
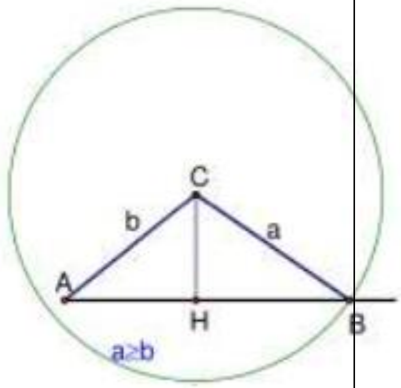
所以 $C=180^{o}-(A+B)=180^{o}-(38^{o}+31^{o})=111^{o}$

所以 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{60\sin 111^{o}}{\sin 38^{o}}\approx 91$

由例 2 和例 3 可以知道，已知兩邊和其中一邊的對角解三角形，有或一，下圖說明了在 ΔABC 中，已知 a、b 和 A，用正弦定理求 B 時的各種情況：

(1) 若 A 為銳角時：

$$\begin{cases} a < b\sin A & \text{無解} \\ a = b\sin A & \text{一解(直角)} \\ b\sin A < a < b & \text{二解(一銳，一鈍)} \\ a \geq b & \text{一解(銳角)} \end{cases}$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>無解</td>
<td>僅有一個解</td>
<td>有兩個解</td>
<td>僅有一個解</td>
</tr>
</table>

(2) 若 A 為直角或鈍角時：

$$\begin{cases} a \leq b & \text{無解} \\ a > b & \text{一解(銳角)} \end{cases}$$

四、鞏固練習：

課本 ***P*144** ，練習 **3** 。

五、課堂小結：

用正弦定理可解決哪兩類有關解三角形的問題？

(1)已知兩角和任意一邊，求其它兩邊和一角；

(2)已知兩邊與其中一邊的對角，求另一邊的對角，進而可求出其它的邊和角。

六、家課：

課本 ***P*144** ，習題 **5.9** ， **1** 。

5.9.2 餘弦定理

教學目標：1.使學生掌握餘弦定理推導過程，及其證明方法。
2.會運用餘弦定理求出未知量。

教學重點：餘弦定理的證明和理解。

教學難點：餘弦定理的靈活運用。

教學方法：引導啟發、探究學習。

授課類型：新授課。

教學過程：

一、溫習舊知識：

問題 1：用正弦定理可解決哪兩類有關解三角形的問題？

(1)已知兩角和任意一邊，求其它兩邊和一角；

(2)已知兩邊與其中一邊的對角，求另一邊的對角，進而可求出其它的邊和角。

問題 2：已知兩邊和它們的夾角，能用所學過的知識求其餘邊和角嗎？

二、教授新課：

如右圖，在 ΔABC 中，AB、BC、CA 的長分別為 c、a、b。

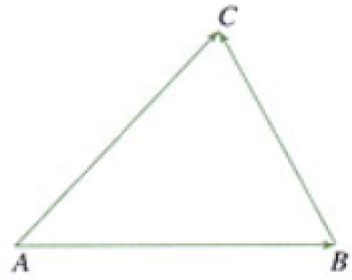
因為 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

所以 $\vec{AC} \cdot \vec{AC} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BC})$

$$= \vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC}^2$$

$$= \vec{AB}^2 + 2|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \cos(180^O - B) + \vec{BC}^2$$

$$= c^2 - 2ac\cos B + a^2$$



即 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$

同理可證 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

由此又得到如下定理：

餘弦定理：三角形任何一邊的平方等於其它兩邊平方的和減去這兩邊與它們夾角的餘弦積的兩倍。即

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

由上三式可得：

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

在餘弦定理中，令 $C = 90^O$ ，這時 $\cos C = 0$ ，所以

$c^2 = a^2 + b^2$

由此可知餘弦定理是勾股定理的推廣。

問題 3：利用餘弦定理，可以解決哪兩類有關三角形的問題？

(1) 已知三邊，求三個角；

(2) 已知兩邊和它們的夾角，求第三邊和其它兩個角。

三、例題：

例題 1：在 ΔABC 中，已知 $a = 7$ ， $b = 10$ ， $c = 6$ ，求 A、B、C(精確到 1^O)。

解：因為 $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{10^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 10 \times 6} = 0.725$

所以 $A \approx 44^O$

因為 $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{7^2 + 10^2 - 6^2}{2 \times 7 \times 10} = \dfrac{113}{140} = 0.8071$

所以 $C \approx 36^O$

所以 $B = 180^O - (A + C) \approx 180^O - (44^O + 36^O) = 100^O$

例題 2：在 ΔABC 中，已知 $a = 2.730$ ， $b = 3.696$ ， $C = 82^O 28'$ ，解這個三角形(邊長保留四個有效數字，角度精確到 $1'$)。

解：由 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$$= 2.730^2 + 3.696^2 - 2 \times 2.730 \times 3.696 \times \cos 82^O 28'$$

得 $c = 4.297$

因為$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3.696^2+4.297^2-2.730^2}{2\times 3.696\times 4.297}=0.7767$

所以$A\approx 39^{o}2'$

所以$B=180^{o}-(A+C)=180^{o}-(39^{o}2'+82^{o}28')=58^{o}30'$

四、鞏固練習：

課本 ***P*****144**，練習 **2**，**4**。

五、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

六、家課：

課本 ***P*****144**，習題 **5.9**，**2**，**3**，**6**。

5.10.1 解斜三角形應用舉例

教學目標：1.進一步鞏固利用正弦定理及餘弦定理解任意三角形的方法；
2.掌握正弦定理擴充公式的推導。
教學重點：正弦定理及餘弦定理公式的應用。
教學難點：掌握邊到角轉化方法，和角到邊的轉化方法。
教學方法：引導啟發、探究學習。
授課類型：新授課。
教學過程：

一、溫習舊知識：
解斜三角形：
(1)正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ （R 為 ΔABC 外接圓半徑)

(2)餘弦定理：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

二、例題：
例題 1：自動卸貨汽車的車箱採用液壓結構。設計時需要計算油泵頂杆 BC 的長度。已知車箱的最大仰角為 60^O，油泵頂點 B 與車箱支點 A 之間的距離為 1.95m，AB 與水平線之間的夾角為 $6^O20'$，AC 長為 1.40m，計算 BC 的長(保留三個有效數字)。

分析：這個問題就是在 ΔABC 中，已知其中兩邊和它們的夾角，所以可根據餘弦定理求出 BC。

解：由餘弦定理，得

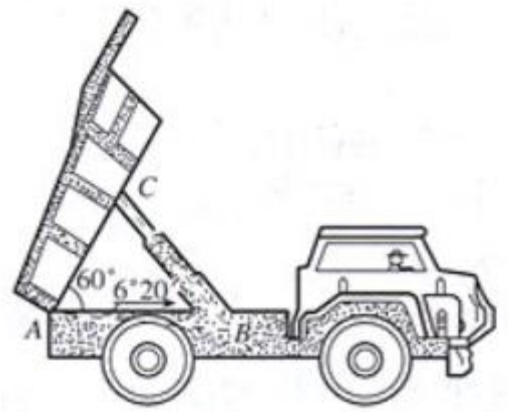
$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$$

$$=1.95^2+1.40^2-2\times1.95\times1.40\times\cos(60^O+6^O20')$$

$$=3.571$$

所以 $BC\approx1.89$

答：頂杆 BC 約長 1.89m。



例題 2：如右圖，是曲柄連杆機的示意圖。當曲柄 CB 繞 C 點旋轉時，通過連杆 AB 的傳遞，活塞作直線往復運動。當曲柄在 CB_0 位置時，曲柄和連杆成一條直線，連杆的端點 A 在 A_0 處。設連杆 AB 長為 340mm，曲柄 CB 長為 85mm，曲柄自 CB_0 按順時針方向旋轉 80°，求活塞移動的距離(即連杆的端點 *A* 移動的距離 A_0A)(精確到 1mm)。

分析：這個問題就是在 ΔABC 中，已知兩邊和其中一邊的對角，可由正弦定理求出 AC。

解：由正弦定理，得

$$\sin A=\frac{BC\sin C}{AB}=\frac{85\sin 80^{O}}{340}\approx 0.2462$$

因為 $BC<AB$，所以 A 為銳角，得

$$A=14^{O}15'$$

所以 $B=180^{O}-(A+C)=180^{O}-(14^{O}15'+80^{O})=85^{O}45'$

由正弦定理，得

$$AC=\frac{AB\sin B}{\sin C}=\frac{340\times\sin 85^{O}45'}{0.9848}\approx 344.3$$

因此 $A_0A=A_0C-AC=(AB+BC)-AC$

$$=(340+85)-344.3$$

$$=80.7\approx 81$$

答：活塞移的距離約為 81mm。

三、鞏固練習：

課本 $P147$，練習 1。

四、課堂小結：

本節課我們學習了什麼內容？

五、家課：

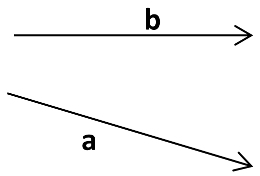
課本 $P147$，習題 5.10，1，2。

5.10.A 平面向量的複習課

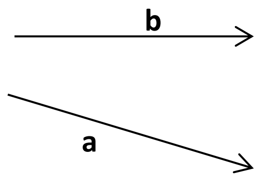
教學目標：重溫平面向量作圖、運算，正弦、餘弦定理，平移。
教學重點：熟練平面向量作圖、運算，正弦、餘弦定理，平移。
教學難點：綜合解決問題。
授課類型：練習課。
教學過程：

一、作圖題

(1) 已知向量 **a**、**b**，**求作向量**$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 。



(2) 已知向量 **a**、**b**，**求作向量**$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 。



二、一艘船以 16km/h 的速度向垂直於對岸的方向行駛，同時河水的流速為 8km/h。求航船實際航行的速度的大小與方向。

三、填充：

(1) $\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{DA}+\vec{CA}=$_______________

(2) 以 $A(-3,-6)$ ，$B(3,2)$ 為端點的線段的中點坐標為______________

(3) $3(4a-3b)+2(4b-3a)=$_______________

(4) 已知向量$a=(2,3)$，$b=(-2,-3)$的坐標，則$a+b=$_______________，$a-b=$ _______________的坐標。

(5) 已知點$A(3,0)$，$B(8,0)$的坐標，則$\vec{AB}=$ __________________，$\vec{BA}=$ _________________的坐標。

四、已知$a=(-6,-4)$，$b=(x,12)$，且$a \parallel b$，求x。

五、已知$a=(-9,5)$，$b=(45,y)$，且$a \perp b$，求y。

六、求證以$A(-2,-3)$，$B(19,4)$，$C(-1,-6)$為頂點的三角形是直角三角形。

七、已知兩點 $P_1(2,3)$， $P_2(1,5)$。求點 $P(x,\frac{9}{2})$ 分有向線段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比 λ 及 x 的值。

八、已知 $|a|=8$， $|b|=6$，a 和 b 的夾角是 150^0，求 $a \bullet b$。

九、已知 $|a|=4\sqrt{3}$， $|b|=4$， $|a+b|=8$，求 a 和 b 的夾角。

十、函數 $y=-2x^2$ 的圖象 F 按 $a=(-4,3)$ 平移到 F'，求 F' 的函數解析式。

叁、試教評估

第一章集合，在教案中以多媒體展現集合間的關係，在數軸上以顏色疊加變色的原理展現集合間的關係，大部分學生均已達標，小部分學生常混淆交集與並集定義。

第二章函數，在教案中通過豐富實例，進一步體會函數是描述變量之間的依賴關係的重要數學模型，在此基礎上學習用集合與對應的語言來刻畫函數；利用計算器、電腦畫出指數函數，對數函數等的圖象探索、比較它們的變怂規律，研究函數的質，在此大部分學生均可體會理解得到，但在解決實際問題方面(文字題)，則大部分較弱。

第三章數列，在教案中重視通過具體實例(儲蓄、放射性物質的衰變等)，使學生理解這兩種數列模型的作用，在此大部學生表現滿意。

第四章三角函數，在教案中借助單位圓理解任意角三角函數的定義，在此大部學生達標。

第五章平面向量，在教案中向量概念的教學應從物理背景和幾何背景入手，引導學生運用向量決一些物理和幾何問題。在此大部學生達標。

肆、反思與建議

由於是回歸教育的學生，他們多數是在職人士，日間工作，晚上才接受教育，校方也特意按排連堂，所以本課程有很多“教一堂練一堂”的機會，彌補他們無時間，不願意做功課的不足，所以來年會減少功課的量及次數，增加課堂練習，可嘗試“一練習一小測”的形式驅使學生多做題，提高學習主動性。

教學內容方面，虽說是按課本而教，但也太過驅泥於教材，來年多在網上觀看別人教案，於校內外多觀課，發掘切合課題又易明白的教材，進一步把握知識點和考點。

在整個教學過程中，運用多媒體，在課堂上節省了不少書寫的時間，在集合，三角函數等章節上，把抽象的數學概念形象地表現出來，使學生充份了解數與形之間的轉化，是次達到很好的效果。所運用的類比法，著重知識形成的過程，使學生獲得知識之餘，更懂得如何尋解決問題的方向。

在編寫這次教學設計的過程中，發現了自己的不足之處，作為教師對學生的提問，未達到精要，使學生所回答的不是我想要的，未來要在說技考中加把勁，尚須“多聽”、“多看”、“多動腦”提升自己修維。

感謝 教育暨青年局創建了這教學資源互通的平台,在這裏我真的是獲益良多。

參考文獻

全日制普通高級中學教科書(必修)數學第一冊(上)人民教育出版社。

全日制普通高級中學教科書(必修)數學第一冊(上)人民教育出版社。

華東師範大學第二附屬中學數學高中上冊華東師範大學出版社。

華東師範大學第二附屬中學數學高中下冊華東師範大學出版社。

当知网 http://www.dangzhi.com/

五夢網 http://www.fivedream.com/