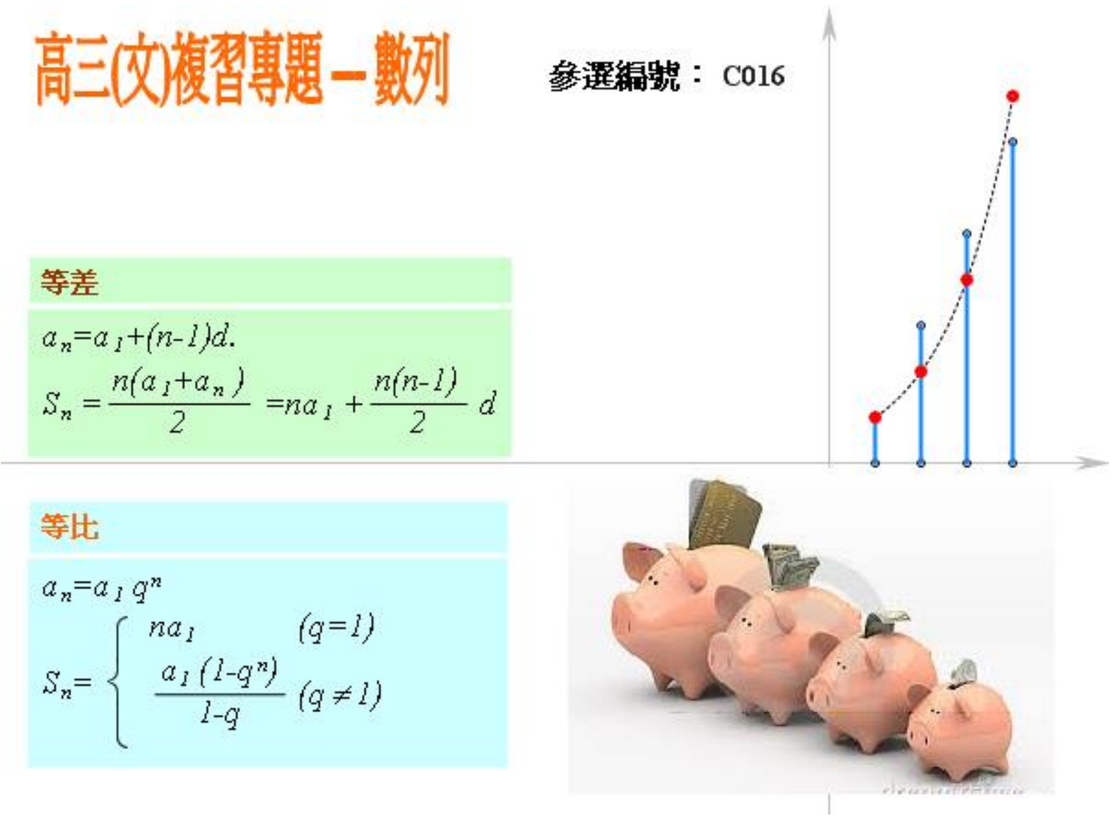
2014/2015 學年教學設計獎勵計劃



教學科目： 數學　　　　　　　　　　　　　　教育階段： 高三

目次

簡介

數列可以表示為$a_n = f(n)$，是一般函數$y = f(x)$的特殊情形. 數列又是一種離散函數，是一種重要的數學模型. 等差數列、等比數列是一次函數、指數函數的離散化. 從函數的觀點、模型的觀點、離散的角度認識數列.

本專題的教學目標、主要內容、設計的創意與特色如下表：

教學目標	知識與技能	1. 了解數列的概念、數列的通項公式、數列的前 n 項和公式； 2. 理解等差數列、等比數列、等差中項、等比中項等概念； 3. 掌握等差數列與等比數列的通項公式、前 n 項和公式、等差數列與等比數列的性質； 4. 會求數列的極限； 5. 掌握數學歸納法； 6. 運用數列的有關知識解決有關的問題.
	過程與方法	1. 從函數的觀點理解數列，體會等差數列與一次函數的關係、等比數列與指數函數的關係； 2. 通過“問題”、“觀察”、“探究”、“思考”、“交流”、“實驗”等一系列的數學活動，改進學習的方式，提昇學習的效率，體驗數學的發現與創造的歷程.
	情感、態度與價值觀	1. 發展獨立地獲取數學知識的能力， 數學的表達與交流能力； 2. 激發學生學習數學的興趣.
主要內容	1. 數列的基本概念； 2. 等差數列與等比數列； 3. 數列的極限； 4. 數學歸納法； 5. 數列的應用.	
設計創意和特色	1. 以生動活潑的形式呈現，建立等差數列與等比數列這兩種數學模型，探索並掌握它們的一些基本數量關係，感受這兩種數列模型的廣泛應用，並利用它們解決一些實際問題； 2. 問題導引，培養問題意識，孕育創新精神； 3. 從問題中抽取“形”與“數”，讓形與數、數與形互動； 4. 注重信息技術與數學課程的整合； 5. 體會數學的文化價值； 6. 讓教學變成研究.	

教學進度表

起	止	教學內容	節數
2014/10/20	2014/10/20	數列的基本概念	1
2014/10/21	2014/10/24	等差數列與等比數列	4
2014/10/27	2014/10/27	數列的極限	2
2014/10/28	2014/10/28	數學歸納法	1
2014/10/29	2014/10/31	數列的應用	3

–

教案

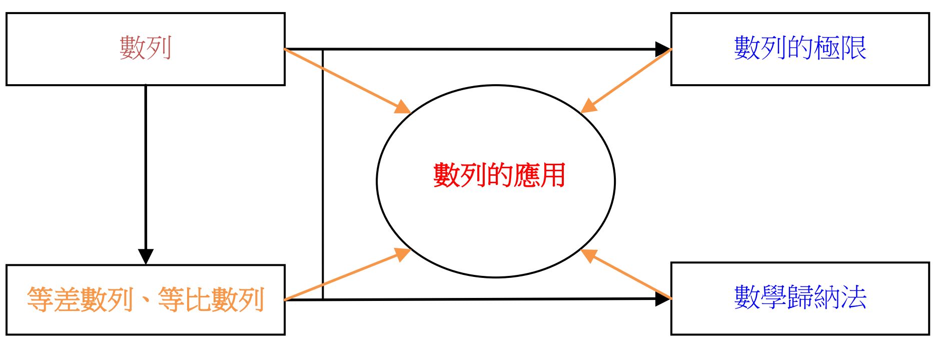
數列是定義域為自然數集的實值函數，數列是一種離散函數。等差數列、等比數列又是一次函數、指數函數的離散化. 無限數列的求和涉及極限過程，數學歸納法是一種重要的證明方法。

【學情分析】

今年，我的教學班為高三 2 個文科班，高三丙班與高三戊班。每個班只有 3~5 個學生的基礎好，動手能力強。多數學生數學的基礎薄弱，更準確的說不是在學數而是在背數。主要反映在：完全依賴課堂上的演算法則，沒有養成獨立思考的學習習慣；對概念與公式一味的死記硬背，缺乏理解；不善於總結歸納相似的數學問題；面對自己的錯誤和不會的題型，不知所措。

【教材分析】

1.知識架構



2.重點與難點

重點	數列的定義； 等差數列與等比數列的定義、通項、性質、前 n 項和； 數列的極限、數學歸納法、數列的應用.
難點	用函數的觀點、模型的觀點、離散的觀點去理解數列.

本教案包含的教學內容有：數列的定義、等差數列與等比數列、數列的極限、數學歸納法、數列的應用。

【閱讀與思考】

閱讀： 教材 P49—56、P204—212

思考?

數列的小故事、數列的概念? 數列與函數的關係： 遞歸數列的意義何在? 數列在數學中的地位如何？有怎樣的實用價值?	等差與等比數列的定義、性質、通項與前 n 項和公式? 如何求數列的極限? 數列與數學歸納法有怎樣的聯係?數學歸納法的兩個步驟?

專題一、數列的基本概念

【教學目標】

知識技能：	1. 理解數列的概念； 2. 了解數列的意義及其分類； 3. 理解數列的通項公式，能由通項公式求出數列的各項，同時判斷某數是不是數列中的項，是第幾項，或者由數列的前幾項寫出數列的通項公式； 4. 理解前 n 項和的含義，掌握從前 n 項和求數列通項的方法； 5. 了解遞推公式的意義，並能由遞推公式求數列的前幾項.
過程和方法：	經歷數列的基本概念的學習，領悟數列中的函數思想
情感、態度與價值觀：	激勵學生學好數學的興趣，倡導積極主動的學習方式

【內容提要】

數列的基本概念：

數列	按照一定的次序排列的一列數叫做數列，數列里的每一個數叫做這個數列的項，各項叫做這個數列的第 1 項、第 2 項、…、第 n 項，第一項也叫首項.
數列的通項公式	數列$\{a_n\}$的第 n 項與項數 n 之間的函數關係可以用一個公式來表示，這個公式就叫做這個數列的通項公式. 如：1, 3, 5, …，通項公式為$a_n=2n-1$.
遞推公式	如果一個數列的第 n 項a_n與該數列的其他一項或多項之間存在對應關係，這個關係就稱為該數列的遞推公式. 例如斐波納契數列的遞推公式為$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.
數列的分類	按項：有窮數列、無窮數列； 按數值：常數數列、遞增數列、遞減數列、擺動數列； 按取值範圍：有界數列、無界數列.
數列的前 n 項和	$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

【教學設計】

教學過程	設計意圖
一、數列的小故事 1. 高斯念小學的時候,有一次在老師教完加法後，因為老師想要休息，所以便出了一道題目要同學們算算看，題目是：1+2+3+…+97+98+99+100 = 老師心裡正想，這下子小朋友一定要算到下課了吧!正要藉口出去時，卻被高斯叫住了!原來呀，高斯已經算出來了，你可知道他是如何算的嗎? 高斯告訴大家他是如何算出的：把 1 加 至 100 與	讓同學們查閱有關數列的小故事，增強數學學習的趣味性，激發學生學習數列的興趣.

100 加至 1 排成兩排相加,也就是說： 1+2+3+4+‧‧‧.+96+97+98+99+100 100+99+98+97+96+‧‧‧.+4+3+2+1 =101+101+101+ .+101+101+101+101 共有一百個 101 相加,但算式重複了兩次, 所以把 10100 除以 2 便得到答案. 2. 據說國際象棋起源於古代印度, 象棋傳到宮中, 國王非常高興, 決定獎賞發明者, 讓發明者任選獎品. 發明者說：“陛下，請在棋盤的第一格裡放上一顆麥粒，在第二格裡放上 2 顆麥粒，在第三格裡放上 4 顆麥粒，依次類推, 每個格子裡的麥粒數都是前一個格子裡的麥粒數的 2 倍，直到第 64 個格子，請給我足夠的糧食來實現上述要求吧!”國王覺得這人真傻，不要金銀財寶，只要一些糧食，就欣然答應。讓大臣下去兌現，才發現把全印度的糧食都拿來也遠遠滿足不了發明家的要求。 3．(Fibonacci 數) 一對兔子每個月能生出一對小兔子來, 如果所有兔都不死, 那麼一年以後可以繁殖多少對兔子?	
二、理解有關數列的概念 — 數列、通項公式 1. 數列的定義? 請舉例說明. (1)1, 3, 5, ‧‧‧; (2)1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ‧‧‧. 按照一定的次序排列的一列數叫做**數列**, 數列里的每一個數叫做這個數列的項, 各項叫做這個數列的第 1 項、第 2 項、‧‧‧、第 n 項, 第一項也叫首項. 數列的一般形式為 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$, 簡記為 $\{a_n\}$.	理解數列的定義

<table>
<tr>
<td>

2. 數列的**通項公式**

數列$\{a_n\}$的第 n 項與項數 n 之間的**函數關係**可以用一個公式來表示，這個公式就叫做這個數列的通項公式.

例 1. 寫出下列數列$\{a_n\}$的一個通項公式?

(1) $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \cdots$；

(2) $-\frac{1}{1\times 2}, \frac{1}{2\times 3}, -\frac{1}{3\times 4}, \frac{1}{4\times 5}, \cdots$；

(3) $\frac{3}{5}, \frac{4}{8}, \frac{5}{11}, \frac{6}{14}, \cdots$.

分析：考察學生的觀察能力，建立項a_n與項數之間的函數關係式

	提示	答案
(1)	1. 分子是項數的平方； 2. 分母比分子大 1.	$a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$
(2)	. 正負號交替出現； . 分子為常數 1； . 分母為項數與項數大 1 的兩數之積	$a_n = (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$
(3)	. 分子、分母均為一等差數列； . 分子首項為 3，公差為 1； . 分母首項為 5，公差為 3.	$a_n = \frac{n+2}{3n+2}$

數列的通項公式實際上是一個正整數集N^*為定義域的函數解析式，即$a_n = f(n)$.

練習：寫出下列數列$\{a_n\}$的一個通項公式.

</td>
<td>

通項公式： $a_n = f(n)$

由前幾項，寫出數列的一個通項公式.

數列的通項公式就是項a_n與項數 n 之間的函數關係式

</td>
</tr>
</table>

(1) $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots$ ____________. (2) $1,\ \frac{4}{3},\ \frac{9}{5},\ \frac{16}{7},\ \cdots$ ______ ____. (3) $\frac{1^2}{2},\ -\frac{3^2}{4},\ \frac{5^2}{6},\ -\frac{7^2}{8},\ \cdots$ ____________. (4) $\frac{15}{3},\ \frac{25}{6},\ \frac{35}{12},\ \frac{45}{24},\ \cdots$ ____________ 例 2. 已知數列$\{a_n\}$的通項公式是$a_n=n^2-n-20$, (1) 求數列的第 10 項; (2) 當$a_n=0$時，求實數 n 的值; (3) 求滿足不等式$a_n>0$的實數 n 的值. 分析：數列是一種特殊的函數，其定義域為N^*.	由數列的通項公式，求數列的項，或者已知項，求它是第幾項等等.

分析	答案
(1) $a_{10}=10^2-10-20$	70
(2) $a_n=0$，則$n^2-n-20=0$, n 只能取正整數	5
(3) $a_n>0$，則$n^2-n-20>0$，同樣 n 只能取正整數	$n>5$

練習：

1. 寫出數列$\{\sin(30°+90°\cdot n)\}$的前五項

____.

2. 已知數列的通項$a_n=4n-3$，則 97 是不是該數列的項，若是，是第幾項.	
三、理解有關數列的概念 — 前 n 項和、遞推公式 (1)前 n 項和：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 例 3 已知數列$\{a_n\}$的前 n 項和$S_n=n^2+3n$，求a_n. 提示： 通常，已知S_n，求a_n的方法：$a_n=\begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n-S_{n-1}, & n\ge 2 \end{cases}$. 能否將第一項並入？並讓同學猜測這個數列是什麼性質？(貫穿函數思想) 答案：$a_n=2n+2$. (2)遞推公式 如果一個數列的第 n 項a_n與該數列的其他一項或多項之間存在對應關係，這個關係就稱為該數列的遞推公式. 例 4. 已知數列$\{a_n\}$滿足$a_1=1,\ a_{n+1}=na_n$，求 a_2，a_3，a_4. 答案：$a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=6$.	理解前 n 項和的概念. 掌握由前 n 項和公式S_n，求通項公式的方法. 理解遞推公式

【作業】

同步練習冊 P32：　一. 1~5.

深化拓展（供有能力的同學參考）

1. (2013 聯招)設數列{a_n}的前 n 項和 $S_n = 2n^2 - 2n$，則 a_n =__________.

2. 已知數列$\{a_n\}$滿足 $a_1 = 1$, $a_n = 4a_{n-1} + 1$，寫出該數列的前 5 項.

專題二、等差數列與等比數列

【教學目標】

知識技能目標:	理解等差數列、等比數列、等差中項、等比中項等概念； 掌握等差數列與等比數列的通項公式、前 n 項和公式； 掌握等差數列與等比數列的性質，並能運用這些知識解決有關問題
過程和方法目標:	體驗等差、等比數列中所蘊含的函數思想
情感與態度目標:	培養學生觀察、分析、探究等自主的學習能力

【內容提要】

	等差數列	等比數列
定義	一個數列從第二項起，每一項與前一項的差等於同一個常數，這個數列就叫做等差數列，這個常數叫做公差，	一個數列從第二項起，每一項與前一項的比等於同一個常數，這個數列就叫做等比數列，這個常數叫做公比，通常用

	通常用 d 來表示. $a_n - a_{n-1} = d$	q 來表示. $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q \ (q \neq 0)$
通項公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$ $a_n = a_m + (n-m)d \quad (n, m \in N^+)$	$a_n = a_1 q^{n-1}$ $a_n = a_m q^{n-m} \quad (n, m \in N^+)$
前n項和	$S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot d$	$S_n = na_1 \quad (q = 1)$ $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q} \quad (q \neq 1)$
中項	$A = \dfrac{x+y}{2}$	$G^2 = xy$
性質	若 $m+n=k+l=t+t$, 則 $a_m + a_n = a_k + a_l = 2a_t$	若 $m+n=k+l=t+t$, 則 $a_m \cdot a_n = a_k \cdot a_l = (a_t)^2$

【教學設計】

教學過程	設計意圖
一、等差數列 (1)等差數列的定義? 請舉例說明. 一個數列從第二項起，每一項與前一項的差等於同一個常數，這個數列就叫做等差數列，這個常數叫做公差，通常用 d 來表示. 例 1.下列數列是不是等差數列，若是，寫出它的公差.	理解函數的定義.

(1)2, 2, 2； (2)5, 3, 1；

(3)1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$； (4)$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

(2)等差數列定義的理解?

“從第二項起”，數列中至少要有三項；

“每一項與前一項的差等於同一個常數”，$a_n - a_{n-1} = d$，是證明一個數列為等差數列的重要依據.

(3)通項公式

等差數列的通項公式(重點).

通項公式：$a_n = a_1 + (n-1)d$.

通項公式推廣：$a_n = a_m + (n-m)d \quad (n, m \in N^+)$

例 2. 求下列等差數列的通項公式：

(1) $a_1 = 2,\ d = 3$； (2) $a_1 = 21,\ a_7 = 18$.

答案：(1) $a_n = 3n-1$； (2) $a_n = -\frac{n}{2} + \frac{43}{2}$.

練習：

1. 已知 1, x, y, 10 構成等差數列，則 x, y 的值分別為__________.
2. 已知數列$\{a_n\}$中，若$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2$，則數列的通項公式為____________.

等差中項

(4)等差中項

x, A, y 成等差數列，則 $A=\frac{x+y}{2}$.

性質(重點)

巧設等差中項：$a-d$，a，$a+d$.

(5)性質

若 $m+n=k+l=t+t$，則 $a_m+a_n=a_k+a_l=2a_t$.

前 n 項和(重點)

試一試： 已知數列 $\{a_n\}$ 為等差數列，且 $a_2+a_3+a_9+a_{10}=48$，則 $a_4+a_8=$______，$a_6=$_______.

(6)前 n 項和

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n) \text{ 或 } S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d.$$

(2012 澳大數 B)已知 a、b、c、d、e、f 是一個等差數列，若 $a+d=13$，$c+e=22$，求這個數列各項之和.

建立等差數列與一次函數、二次函數的關係.

(7)關聯性理解等差數列

	公式	關聯性理解
通項公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	變形 $a_n=d\cdot n+(a_1-d)$，關聯 $y=kx+b$ (一次函數)
前 n 項和	$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d$	變形 $S_n=\frac{d}{2}\cdot n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)\cdot n$，關聯 $y=ax^2+bx$ (常數項為 0)的二次函數

試一試：

1. 若數列 $\{a_n\}$ 的通項為 $a_n=-2n+3$，試判斷該數列是不是等差數列.

2. (2013 聯招)設數列{a_n}的前 n 項和 $S_n=2n^2-2n$，則 a_n =_____________.

二、等比數列 (1)等比數列的定義? 請舉例說明. 一個數列從第二項起，每一項與前一項的比等於同一個常數，這個數列就叫做等比數列，這個常數叫做公比，通常用 q 來表示.. 例 3.下列數列是不是等比數列，若是，寫出它的公比. (1)2, 2, 2；　　(2)0, 2, 4； (3)1, 3, 9；　　(4)1, 2, 9. (2)等比數列定義的理解? . “從第二項起”，數列中至少要有三項； . 非 0 的常數列是公式為 1 的等比數列； . “每一項與前一項的比等於同一個常數”，$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \ \ (q \neq 0)$，每一項都不是 0，是證明一個數列為等比數列的重要依據. (3) 通項公式 通項公式：$a_n = a_1 q^{n-1}$. 通項公式推廣：$a_n = a_m q^{n-m} \quad (n, m \in N^+)$ 例 4. 求下列等比數列的通項公式： (1) $a_1 = 2,\ q = 2$；　　(2) $a_2 = 6,\ a_3 = 18$. 答案：(1) $a_n = 2^n$；　　(2) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.	等比數列定義的理解 通項公式(重點)

練習：

1. 已知數列$\{a_n\}$中，$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$，則數列的通項為________.

等比中項

(4)等比中項

x, G, y 成等差數列，則$G^2=xy$.

巧設等比中項：$\frac{a}{q}$，a，aq.

性質

(5)性質

若$m+n=k+l=t+t$，則$a_m\cdot a_n=a_k\cdot a_l=(a_t)^2$.

試一試：已知數列$\{a_n\}$為等比數列，且$a_2a_{10}=25$，則$a_3a_9=$______，$a_6=$_______.

前 n 項和(重點)

(6)前 n 項和

$$S_n=na_1 \quad (q=1)$$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} \quad (q\neq 1).$$

(7)關聯性理解等比數列

	公式	關聯性理解
通項公式	$a_n=a_1q^{n-1}$	變形$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1}$，關聯$y=a^x$(指數函數)
前 n 項和	$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q\neq 1)$	變形$S_n=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n$，關聯$y=A-Aq^n$(關於 n 的一個指數式與一個常數的和構成的，指

<table>
<tr><td>

<table><tr><td></td><td></td><td>數式的係數與常數項互為相反數)</td></tr></table>

試一試:

1. (2013 聯招)等比數列的前 n 項和 $S_n = ab^n + c$，其中 a, b, c 為常數，則(C).

   A. $a+b=0$；　　B. $b+c=0$；

   C. $a+c=0$；　　D. $a+b+c=0$.

</td><td></td></tr>
<tr><td>

三、等差數列與等比數列

例 5. 已知在等差數列$\{a_n\}$中，$a_4=10$, $a_7=19$，求數列的前 15 項和S_{15}.

分析：由$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot d$ 知$S_{15} = 15a_1 + \frac{15\cdot 14}{2}\cdot d$，只要求得首項$a_1$與公差 d 即可.

又由$a_4=10$, $a_7=19$，可得，$\begin{cases} a_1+3d=10 \\ a_1+6d=19 \end{cases}$.

答案：$S_{15}=330$.

例 6. 已知在等比數列$\{a_n\}$中，$q=\frac{1}{2}$，$S_5=3\frac{7}{8}$，求a_1，a_5.

分析：由$S_5=3\frac{7}{8}$得$a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+a_1q^4=3\frac{7}{8}$，代入 q 可求$a_1$，然後再求$a_5$.

答案：$a_1=2$, $a_5=\frac{1}{8}$.

</td><td>進一步運用等差(比)數列的通項公式，等差(比)中項，性質與前 n 項和公式.</td></tr>
</table>

例 7. 已知三個正數成等差數列，和為 15，若將這三個數分別加上 1, 4, 19 後，得到的三個數成等比數列，求這三個數. 分析：設這三個數分別為 $a-d$，a，$a+d$，則有 $a-d+a+a+d=15 \Rightarrow a=5$. 這三個數為 $5-d$，5，$5+d$，分別加上 1, 4, 19 後為 $6-d$，9，$24+d$，這三個數成等比數列，則有 $81=(6-d)(24+d)$. 答案：三個數分別為 2, 5, 8. 例 8. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，$b_n=a_n+1$ $\left(n\in N^*\right)$. (1) 求證 $\{b_n\}$ 是等比數列; (2) 求 $\{a_n\}$ 的通項公式. 分析：(1)要證 $\{b_n\}$ 是等比數列，只須證 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 為常數. 又 $b_n=a_n+1$， $\Rightarrow b_{n+1}=a_{n+1}+1 \Rightarrow \dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=\dfrac{2a_n+1+1}{a_n+1}=2$. (2)只要求出了 $\{b_n\}$ 的通項公式，就可以求出 $\{a_n\}$ 的通項公式. 讓學生自己寫出解題過程.	

【作業】

同步練習冊 P34~35，三 1, 2.

深化拓展（供有能力的同學參考）

1. 有四個數，其中前三個數成等差數列，後三個數成等比數列，關且第一個數與第四個數的和是 37，第二個數與第三個數的和是 36，求這四個數.

2. 設等比數列 $\{a_n\}$ 同時滿足條件：$a_1+a_6=33$，$a_3a_4=32$，$q>1$ (q 為公比).

(1) 求數列 $\{a_n\}$ 的通項公式;

(2) 是否存在自然數 m，使得 $\frac{2}{3}a_{m-1}$，a_m^2，a_{m+1} 依次成等差數列?若存在，求出 m 的值；若不存在，請說明理由.

專題三、數列的極限

【教學目標】

知識技能目標:	理解數列極限的意義； 掌握數列極限的四則運算法則； 會求一些簡單數列的極限、和式數列的極限以及無窮遞縮等比數列的前 n 項和的極限.
過程和方法目標:	探求數列極限的求法
情感與態度目標:	培養學生觀察、分析、探究等自主的學習能力

【內容提要】

1. 數列極限的概念

給定一個數列 $\{a_n\}$，如果當 n 無限增大時，a_n 無限趨近某一個固定的常數 A，則稱當 n 趨近於無窮大時，數列 $\{a_n\}$ 以 A 為極限，記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 或

$a_n \to A(n \to \infty)$.

2. 幾個重要的極限

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ； (2) $\lim_{n\to\infty} C = C$ (C 為常數) ；

(3) $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ (|q| < 1)$.

3. 數列極限的四則運算法則

如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim_{n\to\infty} b_n = B$，則有：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B,\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

特別地，如果 C 是常數，那麼 $\lim_{n\to\infty} Ca_n = CA$.

如果 k 是正整數，那麼 $\lim_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k = A^k$.

4. 無窮遞縮等比數列各項的和

公比的絕對值小於 1 的無窮等比數列叫做無窮遞縮等比數列，它的前 n 項和 S_n 當 n 無限增大時的極限，叫做這個無窮遞縮等比數列的和，記作 S=$\lim_{n\to\infty} S_n$.

根據上述定義，可推得 S=$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}\ (0 < |q| < 1)$.

5. 兩邊夾法則

如果無窮數列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 滿足：

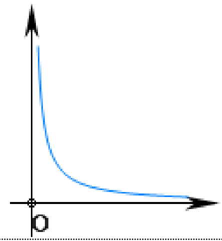
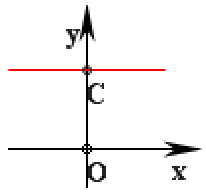
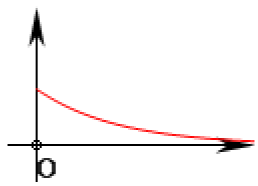
(1) $x_n \le y_n \le z_n$ (n=1, 2, 3, $\cdots$);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ (A 為常數).

則有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

【教學設計】

教學過程	設計意圖
一、理解數列的極限 問題： 數列的極限? 例 1. 判斷下列數列$\{a_n\}$的極限是否存在： (1)1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$, $\frac{1}{n}$, $\cdots$; (2)1, 1, 1, $\cdots$, 1, $\cdots$; (3) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\cdots$, $\frac{1}{2^n}$, $\cdots$; (4)1, -1, 1, $\cdots$, $(-1)^{n+1}$, $\cdots$; (5) 2, 4, 6, $\cdots$, 2n, $\cdots$; (6) $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\cdots$, $\frac{n+1}{n}$, $\cdots$ 答案：(1)以 0 為極限；(2)以 1 為極限； (3)以 0 為極限；(4)極限不存在； (5)極限不存在；(6)以 1 為極限. 並由此，引出幾個重要的極限：	理解數列的極限 (例 1)體會數列的極限：有的數列存在極限，而有的數列不存在極限. 並由函數的圖像引出幾個重要的極限.

	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
	$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$ (C 為常數)
	$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$

二、求簡單數列的極限

問題： 數列的四則運算法則?

數列的加、減、乘、除運算法則

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$， $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，則有：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B,\ \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

特別地，如果 C 是常數，那麼 $\lim\limits_{n\to\infty}Ca_n=CA$.

如果 k 是正整數，那麼 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^k=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)^k=A^k$.

例 2. 求下列極限：

(例 2)對分式型的數列求極限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n})$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{3n^2+2}$　　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n}{2n^4-n^2}$.

解：

(1)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0+2\cdot 0=0$.

(2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(3-\dfrac{2}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=3-2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=3-2\cdot 0=3$.

(3)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3+\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\dfrac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\dfrac{2}{n^2})}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}=\dfrac{2+0}{3+0}=\dfrac{2}{3}$.

(4)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2-\dfrac{1}{n^2})}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{0+0}{2-0}=0$.

你發現了什麼?

從例題中歸納

1.分式極限中，分子的次數一定不能高於分母的次數；

2.一般是分子分母同除以 n 的最高次數；

3.分子的次數低於分母，極限為 0；

4.分子分母同次，則極限為是分子分母中最高次項的係數之比.

例 3. 求下列極限：

(例 3)無理極限的求法：分式有理化.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$；　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}}$.

題號	解題思想

(1)	原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$.	
(2)	原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(n^2+3n\right)-\left(n^2+1\right)}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)}{3-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{8}{3}$	
三、和式極限的求法 例 4. 求下列極限： (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}}$. 解：(1)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{2}=\dfrac{1}{2}$. (2)原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=3$.		(例 4)的式極限的求法：先化為有限項的和，然後再求極限.

【作業】

同步練習冊 P109—110，三 1, 2

深化拓展（供有能力的同學參考）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{9^{n-1}}}=$________.

2. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}-an-b\right)=1$，求實數 a, b 的值.

專題四、數學歸納法

【教學目標】

知識技能目標:	掌握數學歸納法的證明步驟； 會用數學歸納法證明一些簡單的命題.
過程和方法目標:	借助數學歸納法的教學，探索數學歸納法的邏輯基礎，培養學生觀察、分析、探究等自主的學習能力
情感與態度目標:	滲透“奠基、遞推”的論證方法，體現數學推理的嚴格性

【內容提要】

數學歸納法是一種證明與正整數 n 有關的數學命題的重要方法.

兩個步驟：

(1) 證明當 n 取第一個值 n_0 (例如 $n_0=1$, $n_0=2$)時，結論正確.

(2) 假設當 $n=k(k\in N^*,\ k\geq n_0)$ 時，結論正確，證明當 $n=k+1$ 時結論也正確.

第一步是遞推的基礎，第二步是遞推的根據，兩步缺一不可.

【教學設計】

教學過程	設計意圖
一、創設情境 (1)數學歸納法的兩個步驟?	第一步，是為了獲得遞推的基礎; 第二步是為了獲得推理的根據.
二、數學歸納法 例 1. 用數歸歸納法求證: (1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}\,(n\in N^*)$; (2) n^3+5n 能被 6 整除$(n\in N^*)$; (3) $2^n>2n+1\ \left(n\geq 3且n\in N\right)$. 證明：(1) (i) 當 $n=1$時，左$=\frac{1}{2}$，右$=2-\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}$，左=右，故等式成立. (ii) 假設 $n=k(k\geq 1且k\in N)$時，等式成立，即 $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$. 那麼當 $n=k+1$時，有, $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$ $=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$	(例 1)用數學歸納法證明有關的命題. 奠基 假設 推理(要求寫出前面的 k 項與 k+1 項)

$= 2 - \dfrac{2(k+2)-(k+1)}{2^{k+1}}$ $= 2 - \dfrac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$. 這就是說當 $n = k+1$ 時，等式成立. 根據(i), (ii)，等式對任何 $n \in N^*$ 成立. (2), (3)由同學們自己完成. 提示： (2)被 6 整除，即 6 為的因式，可寫成 6t； (3)當 $n = k+1$ 時，要證 $2^{k+1} > 2(k+1)+1$.	

【作業】

同步練習冊 P109，習題三　1, 2

深化拓展（供有能力的同學參考）

設正數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 S_n，且 $S_n = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$，試推測出 a_n 的項公式，並用數學歸納法加以證明.

專題五、數列的應用

【教學目標】

知識技能：	理解數列與函數的特殊與一般的關係； 重點研究等差數列與等比數列的定義、通項、前 n 項和公式、性質，並能運用這些知識解決有關的就用問題； 會用數列知識解決高考試題(兩校、澳大數 B).
過程和方法：	運用數列知解決實際問題，培養學生觀察、表述、探究等自主的學習能力
情感、態度與價值觀：	培養學生獨立的思考能力，以及批判的思考能力

【內容提要】

(1) 如果問題所涉及的數是特殊數列(如等差數列、等比數列或與等差、等比有關的數列等)，應首先建立數列的通項公式；

(2) 如果問題所涉及的數列不是某得特殊數列，一般應先考慮建立數列的遞推關係(即 a_n 與 a_{n-1} 的關係) ；

解決數列的應用問題必須準確計算項數. 例如與“年數”有關的問題，必須確定起算的年份，而且應準確定義 a_n 是表示“第 n 年”還是“n 年後”.

【教學設計】

教學過程	設計意圖
一、基礎知識 例 1. 數列 1, 3, 7. 13, 21, …的一個通項公式為(　 C　). A. $a_n = 2n-1$；　　B. $a_n = 2^n - 1$； C. $a_n = n^2 - n + 1$；　　D. $a_n = 2n^2 + 4n - 5$.	 (例 1)通項公式. 解題技巧: 排除法(將 n=1, 2, 3, …代入，不滿足條件的可排除).

例 2. 已知數列$\{a_n\}$的通項公式是$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，則 $S_{100}=$________. 提示：$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.	(例 2)裂項相消法求和.
例 3. 設S_n是等差數列$\{a_n\}$的前 n 項的和，若$\dfrac{a_5}{a_9}=\dfrac{5}{9}$，則 $\dfrac{S_9}{S_5}=$(A). A.1 B.2 C.$\dfrac{1}{2}$ D.-1.	(例 3)等差數列的性質.
例 4. 計算機的成本不斷下降，若每隔 3 年計算機價格降低$\dfrac{1}{3}$，現在的價格為 8100 元的計算機, 9 年後的價格可降為(A)元. A.2400 B.900 C.300 D.3600.	(例 4)等比數列的通項
例 5. 數列$1\dfrac{1}{2}$，$2\dfrac{1}{4}$，$3\dfrac{1}{8}$，$4\dfrac{1}{16}$，$\cdots$前 n 項的和為(B). A.$\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{n^2+n}{2}$ B.$-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{n^2+n}{2}+1$ C.$-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{n^2+n}{2}$ D.$-\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{n^2-n}{2}$.	(例 5)分組求和.
例 6. 用數學歸納法證明： $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$ $\left(n\in N^*\right)$	(例 6)數學歸納法
練習；	(練習)錯位相減法

1. 求 $S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n \ (a \neq 0)$.

2. 設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} = 2n, n \in N^+$.

(1)求數列 $\{a_n\}$ 的通項公式;

(2)設 $b_n = \frac{a_n}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)}$，求數列 $\{b_n\}$ 的前 n 項和 S_n.

二、高考一兩校

兩校試題

例 7. (2014)已知等差數列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 9$，$a_3 + a_8 = 0$.

(1)求數列 $\{a_n\}$ 的通項公式 a_n；

(2)當 n 為何值時，數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和 S_n 取最大值，並求該最大值.

	解題思想
(1)	要求等差數列的通項，先求首項與公差．由已知條件，只須求公差 d. 因為 $a_3 + a_8 = 0 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 7d = 0$， $\Rightarrow 2a_1 + 9d = 0 \Rightarrow 2 \cdot 9 + 9d = 0 \Rightarrow d = -2$. 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 9 + (n-1)\cdot(-2) = -2n + 11$.
(2)	法 1： 由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot d \Rightarrow S_n = 9n + \frac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)$

	$\Rightarrow S_n = -n^2 + 10n \Rightarrow S_n = -(n-5)^2 + 25$. 所以當 $n=5$ 時，S_n 取最大值，最大值為 25. 法 2： 由(1)知數列為遞減數列，要使 S_n 取最大值，則每一項為正數. 令 $a_n > 0 \Rightarrow -2n+11>0 \Rightarrow n<5.5$. 所以當 $n=5$ 時，S_n 取最大值. 最大值為 $S_5 = 9+7+5+3+1=25$.

例 8. (2013)已知等比數列 $\{a_n\}$ 中，$a_2 - a_3$ 是 a_1 與 $-a_2$ 的等差中項，且 $a_1 = \frac{1}{2}$，公比 $q \neq 1$.

(1)求數列 $\{a_n\}$ 的通項公式;

(2)已知數列 $\{b_n\}$ 滿足:

$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 2n-1, n \in N^+$，求數列 $\{b_n\}$ 的前 n 項的和 S_n.

	解題思想
(1)	$\because a_2 - a_3$ 是 a_1 與 $-a_2$ 的等差中項, $\therefore 2(a_2 - a_3) = a_1 - a_2 \Rightarrow 3a_2 = a_1 + 2a_3$ $3a_1q = a_1 + 2a_1q^2 \Rightarrow 3\cdot\frac{1}{2}q = \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}q^2$ $\Rightarrow 2q^2 - 3q + 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$ (q=1 捨).

	$\therefore a_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.	
(2)	當 $n=1$時，$a_1b_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 2$. 當 $n \geq 2$時, $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = 2n-1$ $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} = 2(n-1)-1$ 兩式相減，得 $a_nb_n = 2 \Rightarrow b_n = 2^{n+1}$. $S_n = 2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1}$ $\Rightarrow S_n = 2 + 2^2(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})$ $\Rightarrow S_n = 2 + 4\cdot\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} \Rightarrow S_n = 2^{n+2} - 6$.	

練習：

1.(2012)已知數列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$，

$b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$其中$n \in N$.

(1)求證：數列$\{b_n\}$是等差數列；

(2)求數列$\{a_n\}$的通項公式.

2. (2010 兩校)數列$\{a_n\}$的前 n 項和$S_n = npa_n (n \in N)$且 $a_1 \neq a_2$，$p \neq 1$,

(1) 求數列的首項a_1及常數 p 的值；

(2) 若$a_2 = a$，用 a 表示a_3，a_4，a_5，並由此求出數列$\{a_n\}$

<table>
<tr><td>
的通項公式.
3. (2009 兩校)已知數列$\{a_n\}$的前 n 項和為S_n，且
$S_n=\frac{1}{2}na_{n+1}$, n 為正整數，其$a_1=1$，求數列$\{a_n\}$的通項
公式.
</td><td></td></tr>
<tr><td>

三、高考—澳大

例 9. (2014)(*a*)大於(>) 400，但小於(<) 600 的整數中，有多少個是 3 或 7 的倍數？

注意：同時是3 和7 的倍數，如441 和525 等數字亦包括在內.

(b) 求大於(>) 400，但小於(<) 600，而又是7 的倍數的整數之和.

	解題思想
(*a*)	在大於(>) 400，但小於(<) 600 的整數中, 3的倍數為3n，則有, $400<3n<600\Rightarrow 133.3<n<200$. 所以3的倍數有$199-134+1=66$個. 同理, 7的倍數有, $400<7n<600\Rightarrow 57.1<n<85.7$. 所以3的倍數有$85-58+1=28$個. 21的倍數有, $400<21n<600\Rightarrow 19.0<n<28.6$. 所以3的倍數有$28-20+1=9$個. 故同時是3和7的倍數有$66+28-9=85$個.
(b)	由(1)知, $S=7(58+59+\cdots+85)=7\cdot\frac{28(58+85)}{2}=14014$.

例10. (2013)某慈善機構在剛成立的第一年內，收到捐款4 百萬元，而支出是3 百萬元. 假設捐款每年遞增1 百萬元，支出每年增加14%，而剩餘的款項則滾存至下一年度.

(*a*) 問下列年度收到多少捐款(以百萬元計)?

(i) 第三年；(ii) 第 n 年.

(b) 問首20 年的總支出是多少(以百萬元計)?

</td><td>澳大數 B 試題</td></tr>
</table>

(c) 問首20 年收到的捐款總數會否少於首20 年的總支出? 試解釋原因.

	解題思想
(a)	第一年, 4百萬, 捐款每年遞增1 百萬元. 第二年, 5百萬, 第三年6百萬. 第n年, $4+n-1=n+3$ 百萬.(等差數列)
(b)	第一年支出3百萬, 支出每年增加14%.(等比數列) 問首20 年的總支出是, $S=3+3\cdot 1.14+\cdots+3\cdot 1.14^{19}=\dfrac{3\left(1-1.14^{20}\right)}{1-1.14}\approx 273$ 百萬.
(c)	問首20年收到的捐款總數為 $4+5+\cdots+23=\dfrac{20(4+23)}{2}=270$ 百萬. 故首20 年收到的捐款總數會少於首20年的總支出.

練習:

1. (2014)若 $\sum_{n=1}^{\infty}(3-c)^{-n}=\frac{1}{3-c}+\frac{1}{(3-c)^2}+\cdots\cdots=4$, 求常數 c 的值.

   A. $\frac{3}{2}$; B. $\frac{8}{3}$; C. $\frac{5}{3}$;

   D. $\frac{7}{4}$; E.以上皆不對

2. (2013)求等比數列6, 3, $\frac{3}{2},\frac{3}{4}$,... 的第n 項.

   A. $\frac{3}{2^{n-2}}$ B. $\frac{3}{2^{n-1}}$ C. $\frac{3}{2^{n}}$ D. $\frac{1}{3(2^{n-2})}$ E. $\frac{1}{3(2^{n-1})}$

3. (2012)陳先生把 \$10,000 存入一間銀行, 利息以單利息計算. 兩年後, 他獲得本利和 \$11,600.

   a. 求年利率。

   b. 之後陳先生把本利和共 \$11,600 全部存入另外一間銀行, 年利率18%, 以複利息每月計算一次. 求兩年後的本利和, 答案準確至最接近分.(注意:\$1 等於100 分)

4. (2012)已知a、b、c、d、e、f 是一個等差數列. 若$a + d$ = 13,c + e = 22,求這個數列各項之和.

A. 50　　B. 51　　C. 54　　D. 57　　E. 60 5. (2010)數列 …, a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … 的每一項為其左面前兩項之和, 求a. A. 0　　B. 1　　C. 3 D. -1　　E. -3 6. (2010)若數序 $k+k^2+k^3+\cdots$的無限項之和是$\frac{1}{2}$, 求 k. A. 無解　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$ 或 1　　E. $\frac{1}{3}$或 1	

【作業】

同步練習冊 P19~22 習題一、二、三

深化拓展（供有能力的同學參考）

1. 已知數列$\{a_n\}$的前 n 項和是S_n，且$S_n+\frac{1}{2}a_n=1(n\in N^*)$.

    (1) 求數列$\{a_n\}$的通項公式;

    (2) 設$b_n=\log_3(1-S_{n+1})$ $(n\in N^*)$, 求適合方程$\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2b_3}+\cdots+\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{25}{51}$的正整數 n 的值.

2. (2014 聯招)在數列$\{a_n\}$中, $a_1=1$, $a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n+\frac{2}{n+2}$, $n=1,2,3,\cdots$,

    (1) a_2, a_3, a_4;

    (2)求數列$\{a_n\}$的通項公式.

3. (2013)數列{a_n}滿足$a_1=-1$，且$a_{n+1}=2a_n+3$.

    (i)證明{a_n+3}是等比數列;

(ii)設$b_n = \dfrac{1}{\log_2(a_n+3)\log_2(a_{n+1}+3)}$，求數列{$b_n$}的前 n 項和 S_n.

4. (2012 聯招)設等比數列{a_n}的首項$a_1 = a > 0$，公比$q = \dfrac{1}{2}$. 數列{b_n}的前 n 項和 $S_n = n^2 + 3n$.

(I) 求{a_n}和{b_n}的通項；

(II) 是否存在正數 p 和 r 使$b_n + \log_p a_n = r$對任意正數 n 都成立? 若存在，求 p 和 r；若不存在，說明理由.

試教評估

本專題是研究數列的教學 。從函數的觀點、模型的觀點、離散的角度認識數列。將函數知識與數列關聯來理解數列的定義； 等差數列的通項公式是一次函數，等差數列的前 n 項和公式是常數項為 0 的二次函數；等比數列的通項公式是指數函數，前 n 項和公式為 $y = A - Aq^n$ (關於 n 的一個指數式與一個常數的和構成的，指數式的係數與常數項互為相反數)；數列的極限是函數極限的特殊化；數學歸納法是中學常應用的一個推理方法，常用來證明與正整數相關的命題；日常生活中的許多問題，如貸款、利率、折扣、人口的增長、放射物質的衰變都可以用等差數列或等比數列來刻畫。

最好的教學方法是適合。在教學上從數列中的小故事入手，增強學生學習的興趣，在教學上概念的理解上與函數關聯，將數列的知識點與函數專題緊密的連接起來，前後呼應。學生理解起來就容易得多，學生也勇於表達他們的思想，提昇了數學的表達能力。

在解題上又分求數列的通項 $a_n = f(n)$ 、前 n 項和公式 $S_n = g(n)$ 、知 3 求 2、巧設對稱項、數列的極限分別進行。對每一種題型認真的了解試題的條件以及所求、 分析解決問題的方法、 最後認真的總結。這一過程正是著名數學教育家 Polya(1957) 在《怎樣解題》(How to solve it？)提出問題解決的四個階段： 了解問題、擬定計劃、執行計畫、回顧(Polya, 1957, p.5-15)。數學課堂不僅僅只是與學生討論數學而已，重要的是培養主動學習、理性的批判思考。

同時將數列知識應用於日常問題中，特別地增加了利率專題，並用這些知識解決澳大數 B 的考題中。學生享受學習的樂趣，提昇學習的效率。

反思與建議

懂得獨立思考的孩子擁有一身受用的智慧(2012，孫玉梅, p.24). 如何讓我們的學生真正具有獨立思考的能力，我想到了關聯一詞(Connection)。我們先學習了函數專題，如何從函數過度到數列?

關於“關聯”，美國數學教師協會 2000 年頒佈的《學校數學的原則和標準》（NCTM，2000）中，是這樣闡述的：

- 在數學思維中認識和使用關聯(recognize and use connections among mathematical ideas)
- 了解數學思維如何相互關聯，並能形成協調的整體(understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole)
- 認識和應用數學中的關聯(recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics)

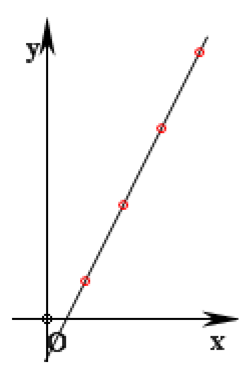
數學教學如何幫助學生建立數學知識之間的關聯，幫助學生達到關聯性的理解呢？

一、 數列中的函數思想

數列的通項和數列的前 n 項和是 n 的函數，即$a_n = f(n)$或$S_n = g(n)$，它是函數$y = f(x)$的特殊化。

(一)、運用函數思想理解數列的定義

在講解數列的定義時，可以與函數定義對比，例如奇數列 1, 2, 3, ⋯，它的通項為$a_n = 2n-1$. 而對應的函數為$y = 2x-1$.(右圖)函數$y = 2x-1$的圖像中將它的定義域取為{1, 2, 3, ⋯}，則數列$a_n = 2n-1$的圖像不具備連續性，而是一係列孤立的點，這些點在直線$y = 2x-1$上，從數和形上體會數列作為函數的特殊性.



(二)、運用函數思想理解等差數列

由等差數列的通項公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$，變形為 $a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$ 為一次函數. 因此等差數列具有一次函數的性質，把過來若數列的通項是一次函數，則它一定是等差數列(例如 p13 的練習).

再由等差的前 n 項和 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$，變形為 $S_n = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) \cdot n$. 為常數項為 0 的二次函數. 在教學中若我們將通項與一次函數、前 n 項和與二次函數結合起來，使問題簡單化，用函數思想解決. 例如 P29 頁中 2014 兩校題中的第二問，教案中的例 7.

例 7. (2014)已知等差數列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 9$，$a_3 + a_8 = 0$.

(1)求數列 $\{a_n\}$ 的通項公式 a_n；

(2)當 n 為何值時，數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和 S_n 取最大值，並求該最大值.

	解題思想	點評
(1)	要求等差數列的通項，先求首項與公差. 由已知條件，只須求公差 d. 因為 $a_3 + a_8 = 0 \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 7d = 0$， $\Rightarrow 2a_1 + 9d = 0 \Rightarrow 2 \cdot 9 + 9d = 0 \Rightarrow d = -2$. 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 9 + (n-1) \cdot (-2) = -2n + 11$.	求通項公式是兩校每年的必考題型. 本題中的已知條件：等差數列、首項. 所以只須求得公差就行. 而另一個已知條件 $a_3 + a_8 = 0$ 創造了條件.
(2)	法 1： 由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \Rightarrow S_n = 9n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-2)$ $\Rightarrow S_n = -n^2 + 10n \Rightarrow S_n = -(n-5)^2 + 25$. 所以當 $n = 5$ 時，S_n 取最大值，最大值為 25.	法 1 是由前 n 項和得出常數為 0 的二次函數，然後用配方法求最值，這就是在函數部他常用的求最值的方法.

	法 2： 由(1)知數列為遞減數列，要使 S_n 取最大值，則每一項為正數. 令 $a_n > 0 \Rightarrow -2n+11 > 0 \Rightarrow n < 5.5$. 所以當 $n=5$ 時，S_n 取最大值. 最大值為 $S_5 = 9+7+5+3+1=25$.	法 2 是從函數(數列)的單調性知該數列為遞減數列，要使 S_n 取最大值，只須找出全部的正數項即可，求出最後一個正數項是破題的關鍵.

(三)、運用函數思想理解等比數列

由等比數列的通項公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$,為指數函數的模型，當 $q \neq 1$ 時，等比數列的前 n 項和 $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，變形為 $S_n = \dfrac{a_1}{1-q} - \dfrac{a_1}{1-q} \cdot q^n$，可寫為 $S_n = A - Aq^n$ 關聯 $y = A - Aq^n$ (關於 n 的一個指數式與一個常數的和構成的，指數式的係數與常數項互為相反數). 例如 P15 頁中的練習題：

(2013 聯招)等比數列的前 n 項和 $S_n = ab^n + c$，其中 a, b, c 為常數，則(　C　).

A. $a+b=0$　　B. $b+c=0$　　C. $a+c=0$　　D. $a+b+c=0$

分析：由等比數列的前 n 項和 $S_n = A - Aq^n$，可將 $S_n = ab^n + c$ 寫為

$S_n = c - (-a) \cdot b^n \Rightarrow c = -a \Rightarrow a + c = 0$.

二、　數列的解題技巧與方法

數列是特殊的函數，其中通項公式 $a_n = f(n)$ 與前 n 項和公式 $S_n = g(n)$ 是函數思想的直接應用. 數學歸納法常用來證明與正整數相關的命題，數列的極限主要的是分式極限與和式極限.

(一)、數列的通項

數列的通項是指的數列項與項數之間的關係，通常用解析式 $a_n = f(n)$ 表示，是近年來每年的必考題(兩校與聯招)，常見的數列的求法有以下幾種：

1. 觀察法

觀察法是觀察各項的特點，找出項與項數 n 的關係. 例如教案中 P6 頁中例 1：

例 1. 寫出下列數列 $\{a_n\}$ 的一個通項公式?

(1) $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \cdots$； (2) $-\frac{1}{1\times2}, \frac{1}{2\times3}, -\frac{1}{3\times4}, \frac{1}{4\times5}, \cdots$；

(3) $\frac{3}{5}, \frac{4}{8}, \frac{5}{11}, \frac{6}{14}, \cdots$.

	提示	答案
(1)	3. 分子是項數的平方； 4. 分母比分子大 1.	$a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$
(2)	. 正負號交替出現； . 分子為常數 1； . 分母為項數與項數大 1 的兩數之積	$a_n = (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$
(3)	. 分子、分母均為一等差數列； . 分子首項為 3，公差為 1； . 分母首項為 5，公差為 3.	$a_n = \frac{n+2}{3n+2}$

2. 公式法

如果已知數列是等差數列，其通項公式為 $a_n = a_1 + (n-1)d$，或者數列是等比數列，則它的通項公式為 $a_n = a_1 q^{n-1}$. 只需要求得首項，公差或者公比. 有時條件是直接給出的，但有時是間接給出的，等差或等比多是隱藏在遞推公式中的. 在習題中有：

已知數列$\{a_n\}$中，若$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2$，則數列的通項公式為________.

數列是等差數列，它的條件是由遞推公式$a_{n+1}=a_n+2$給出的，即$a_{n+1}-a_n=2$，公差 d 為 2，所以由等差數列的通項公式為$a_n=2+(n-1)2$，即$a_n=2n$.

3. S_n法

已知S_n，求a_n的方法：$a_n=\begin{cases} S_1 & n=1 \\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2 \end{cases}$.

(2013 聯招)設數列$\{a_n\}$的前 n 項和$S_n=2n^2-2n$，則 a_n =__________.

解法	過程
法 1	由$S_n=2n^2-2n$，則有 $a_1=2-2=0$. 當$n\geq 2$時，$a_n=S_n-S_{n-1}$ $=2n^2-2n-\left[2(n-1)^2-2(n-1)\right]$ $=4n-4$. 當$n=1$時，適合上式. 故$a_n=4n-4$.
法 2	因為$S_n=2n^2-2n$，它為二次函數且常數項為 0，所以數列一定是等差數列. $a_1=2-2=0$，$a_2=2\cdot 2^2-2\cdot 2=4$. $\therefore d=a_2-a_1=4-0=4$， $a_n=a_1+(n-1)\cdot 4=4n-4$.

法 1 就是由前 n 項的和，求通項的常用方法：先求第一項$a_1=S_1$，再由前 n 項的

和減去前 n-1 項的和得到 $a_n = S_n - S_{n-1}$. 第一項可不可以並進去就要看 $n=1$ 時代入驗證. 法 2 是由前 n 項和的形式斷定此數列是等差數列, 求首項與公差, 就可以求數列的通項.

4. 數學歸納法

由遞推公式求出前幾項的值, 通過觀察歸納出通項公式並加以證明. P26 中的作業:

設正數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和為 S_n, 且 $S_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, 試推測出 a_n 的項公式, 並用數學歸納法加以證明.

解: $n=1$ 時, $S_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \Rightarrow a_1 = 1$;

又 $S_2 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) \Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) \Rightarrow a_2 = \sqrt{2} - 1$

$S_3 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{1}{a_3}\right) \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{1}{a_3}\right) \Rightarrow a_3 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

猜想 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

用數學歸納法證明如下:

(1)當 n=1 時, 由上知猜想式成立.

(2)假設當 n=k 時, 猜想式成立, 即 $a_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

那麼當 n=k+1 時, 有 $S_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}}\right)$.

$\therefore S_k + a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{a_k}\right) + a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}}\right)$

即$\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}+\dfrac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}\right)+a_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_{k+1}+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$

$\therefore a_{k+1}^2+2\sqrt{k}a_{k+1}-1=0$.

解得：$a_{k+1}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

綜上，由(1)(2)知猜想式$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$成立.

當然求數列的通項還有好多的方法，如：累加法、累乘法、迭代法等等，文科班的學生掌握最基本的方法就行.

(二)、數列的前 n 項和

求數列的前 n 項和往往要借助於通項公式，即先有通項公式，再在分析數列通項公式的基礎上，分解或者轉化為基本數列求和.

1. 公式法

對等差數列、等比數列，求前 n 項的和S_n可直接用等差數列、等比數列的前 n 項和公式進行求解. 運用公式求解時，首先要確定公式適用於這個數列，再用公式計算. P16 中例 5：

例 5. 已知在等差數列$\{a_n\}$中，$a_4=10$，$a_7=19$，求數列的前 15 項和S_{15}.

分析：由$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot d$知$S_{15}=15a_1+\dfrac{15\cdot 14}{2}\cdot d$，只要求得首項$a_1$與公差 d 即可.

又由$a_4=10$，$a_7=19$，可得，$\begin{cases}a_1+3d=10\\a_1+6d=19\end{cases}$，由此，得$\begin{cases}a_1=1\\d=3\end{cases}$

所以，$S_{15}=15a_1+\dfrac{15\cdot 14}{2}\cdot d=15+15\cdot 7\cdot 3=330$.

2. 裂項相消法

裂項相消法是通過數列的通項找到裂項的規律，將數列的一項拆成兩項或者多項，使得前後項相抵消，從而求出數列的前 n 項的和. 第 28 頁例 2.

例 2. 已知數列$\{a_n\}$的通項公式是$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$，則$S_{100} =$________.

基礎好的學生能很快知道答案，基礎差的學生是不能動筆的，可以按步驟提示:

1.寫出$S_{100} = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{100\cdot 101}$；

2. 提示：$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$，得$S_{100} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{100} - \dfrac{1}{101}$；

3. 裂項相消，$S_{100} = 1 - \dfrac{1}{101} = \dfrac{100}{101}$.

3. 錯位相減法

錯位相減法是一種常用的數列求和的方法，應用於等比數列與等差數列相乘的形式.

習題中，$S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n \ (a \neq 0)$.

解：當$a = 1$時，$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

當$a \neq 1$時，$S_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n$

$$aS_n = \quad a^2 + 2a^3 + \cdots + (n-1)a^n + na^{n+1}$$

兩式相減得，$S_n - aS_n = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n - na^{n+1}$.

所以$(1-a)S_n = \dfrac{a(1-a^n)}{1-a} - na^{n+1}$. 即$S_n = \dfrac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \dfrac{na^{n+1}}{1-a}$.

這個數列的通項是 $a_n = na^n$，系數是 1, 2, 3, ⋯, n，是等差數列；含有字母 a 的數列是 a，a^2，a^3，⋯，a^n，是等比數列，符合錯位相減法的數列特點. 在解題時要根據 a 的取值進行分類的討論：當 $a=1$ 時，是等差數列，直接運用公式求值； 而 $a \neq 1$ 時，用等比數列的求和公式，可以得出結果.

4. 分組求和

分組求和法是對一類既不是等差數列，也不是等比數列的數列，若將這類數列適當的拆開，可分為等差、等比或常見的數列，然後分別求和，再將其合並.

例 5. 數列 $1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{1}{8}$，$4\frac{1}{16}$，⋯前 n 項的和為(B).

A. $\frac{1}{2^n}+\frac{n^2+n}{2}$　　B. $-\frac{1}{2^n}+\frac{n^2+n}{2}+1$

C. $-\frac{1}{2^n}+\frac{n^2+n}{2}$　　D. $-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{n^2-n}{2}$.

分析： $S_n = 1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+\cdots+n\frac{1}{2^n} \Rightarrow S_n = (1+2+\cdots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}$$，故選 B.

(三)、知 3 求 2

在等差(比)數列中，涉及五個元素 a_1，a_n，n，S_n，$d(q)$ 之間的關係，通常是 "知 3 求 2" ,需要用方程組聯立求解. 為了提高解題速度，必須掌握各種元素之間關係的變式公式. 如

等差	$a_n = a_1+(n-1)d = a_m+(n-m)d = S_n - S_{n-1}$ $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d$

等比	$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}=S_n-S_{n-1}$ $S_n=\begin{cases} na_1 & (q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1)\end{cases}$

第 16 頁中，例 6. 已知在等比數列$\{a_n\}$中，$q=\frac{1}{2}$，$S_5=3\frac{7}{8}$,求a_1，a_5.

分析：已知條件有公比 q，前 5 項的和S_5，以及項數$n=5$，求首項a_1與第 5 項a_5.不少同學是用等比數列的公式，由$S_5=3\frac{7}{8}$，得$S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}$，即

$\dfrac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}}=3\frac{7}{8}\Rightarrow a_1=2$，而列不出式子的同學則引導學生從前 5 項的定義出發，由$S_5=3\frac{7}{8}$得$a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+a_1q^4=3\frac{7}{8}$，代入 q 可求$a_1$，然後再求$a_5$.

(四)、巧設“對稱項”

若三個數成等差數列，可設三個數分別為： $a-d$，a，$a+d$；若三個數成等比數列，可設三個數分別為： $\frac{a}{q}$，a，aq. 在第 17 頁的例 7 以及習題中有所涉及.

(五)、由等差(比)數列，求遞推數列的通項

近幾年的高考題型中有條件給出數列的遞推公式，先證明一個數列是等差或等比數列，然後再求數列的通項公式，第 18 頁中：

例 8. 已知數列$\{a_n\}$滿足$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，$b_n=a_n+1$ $(n\in N^*)$.

(1) 求證$\{b_n\}$是等比數列；

(2) 求 $\{a_n\}$的通項公式.

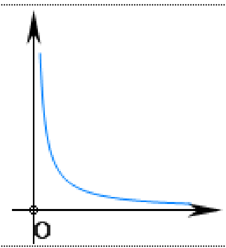
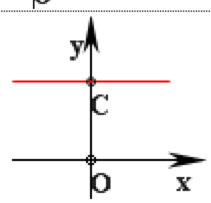
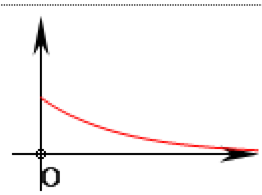
分析：(1)要證 $\{b_n\}$是等比數列，只須證 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ 為常數．又 $b_n = a_n + 1$，

$$\Rightarrow b_{n+1} = a_{n+1} + 1 \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n+1} = \frac{2a_n+1+1}{a_n+1} = 2 .$$

(2)只要求出了 $\{b_n\}$的通項公式，就可以求出 $\{a_n\}$的通項公式.

(六)、數列的極限

數列的極限是對無窮數列而言的，數列的極限是函數極限的特例．幾個重要的極限是數列極限四則運算的基礎，在理解上可以從函數的圖像上得到理解.

<table>
<tr><td>
</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$ (C 為常數)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0 \ (\lvert q\rvert<1)$</td></tr>
</table>

數列的極限主要包括分式極限與和式極限．對於分式的極限，通常為 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，一般是分子、分母同除以 n 的最高次冪後現計算．在計算之後引導學生發現以下的規律：

1.分式極限中，分子的次數一定不能高於分母的次數；

2.一般是分子分母同除以 n 的最高次數；

3.分子的次數低於分母，極限為 0；

4.分子分母同次，則極限為是分子分母中最高次項的係數之比.

對於和式極限，應先化無窮項的和為有限項的和，然後再求極限.

三、　數列的應用

日常生活中遇到的許多問題，如貸款、利率、折扣、人口的增長、放射物質的哀變都可以用等差數列或等比數列來刻畫(李忠海、王家鏵, 2006, p.220)。

(一)、利率問題

在澳大的高考題中每年都會涉及利率問題，利率分中單利率與複利率，複利中又分：年、半年、季、月、以及連續復利率. 首先要理解幾個重要的概念.

<table>
<tr><td>本金</td><td>存入銀行(或從銀行借)的錢</td></tr>
<tr><td>利息</td><td>取款時銀行多針出來的錢</td></tr>
<tr><td>利率</td><td>利息與本金的比值</td></tr>
<tr><td>單利率</td><td>單利息 ＝ P ＊ r ＊ n.
其中：
p ＝ 本金；　r ＝ 利率；　n ＝ 年期</td></tr>
<tr><td>複利率</td><td>本金和利息作為下一階段的本金.
<table>
<tr><td>年</td><td>$F = p(1+r)^n$</td></tr>
<tr><td>半年</td><td>$F = p(1+\frac{r}{2})^{2n}$</td></tr>
<tr><td>季</td><td>$F = p(1+\frac{r}{4})^{4n}$</td></tr>
<tr><td>月</td><td>$F = p(1+\frac{r}{12})^{12n}$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>連續複利</td><td>$F = pe^{nr}$.　其中p—本金；　n—年期；　r—利率.</td></tr>
</table>

在教學中我會帶著學生推導年期的複利率公式，它就是一個等比數列，其它讓學生發現它們的規律並學會使用.

(二)、兩校試題

近五年來兩校試題中數列一定有一道大題，且數列的通項是必考的題型。數列

是特殊的函數，對數列的考題中突出了**函數思想**.

年份	主要題型	試題分析
2014	已知等差數列$\{a_n\}$中，$a_1=9$，$a_3+a_8=0$. (1)求數列$\{a_n\}$的通項公式a_n； (2)當 n 為何值時，數列$\{a_n\}$的前 n 項和S_n取最大值，並求該最大值.	等差數列的通項公式，等差數列的前 n 項和與二次函數的綜合. 中等難度.
2013	已知等比數列$\{a_n\}$中，a_2-a_3是a_1與$-a_2$的等差中項，且$a_1=\frac{1}{2}$，公比$q\neq 1$. (1)求數列$\{a_n\}$的通項公式； (2)已知數列$\{b_n\}$滿足： $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=2n-1, n\in N^+$，求數列$\{b_n\}$的前 n 項的和$S_n$.	等比數列的通項公式，等比數列的前 n 項和. 中等難度.
2012	已知數列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=1-\frac{1}{4a_n}$， $b_n=\frac{2}{2a_n-1}$其中$n\in N$. (1)求證：數列$\{b_n\}$是等差數列； (2)求數列$\{a_n\}$的通項公式.	證明數列為等差數列，在此基礎上求數列的通項公式. 中等難度.
2011	已知數列$\{a_n\}$，部分和 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$，首項$a_1=5$，且	求通項及前 n 項的和. 此題要求的技巧較強. 難度太高.

	$a_n = 2S_{n-1} + 7\times 3^n$，求 a_n 及 S_n .	
2010	數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和 $S_n = npa_n (n \in N)$ 且 $a_1 \neq a_2$，$p \neq 1$, (1)求數列的首項 a_1 及常數 p 的值； (2)若 $a_2 = a$，用 a 表示 a_3，a_4，a_5，並由此求出數列 $\{a_n\}$ 的通項公式.	由前 n 項的和求數列的首項，前幾項，並由此求數列的通項公式．中等難度.

(三)、澳大試題

澳大數B的考試大剛中對於數列的要求是：等差數列及等比數列、前n項和、 等比數列無限項之和。在百分數中，盈利和虧蝕、折扣、單利息和複利息、增長及折舊，澳大數B中注重數列知識的**具體應用**。

年份	主要題型	試題分析
2014	(a)大於(>) 400，但小於(<) 600 的整數中，有多少個是 3 或 7 的倍數？ 注意：同時是3 和7 的倍數，如441和525等數字亦包括在內. (b)求大於(>) 400，但小於(<) 600，而又是7的倍數的整數之和.	等差數列的通項，項數，與前n項的和.
2013	某慈善機構在剛成立的第一年內，收到捐款4 百萬元，而支出是3 百萬元．假設捐款每年遞增1 百萬元，支出每年增加14%，而剩餘的款項則滾存至下一年度. (a)問下列年度收到多少捐款(以百萬元計)? (i) 第三年；(ii) 第 n 年. (b)問首20年的總支出是多少(以百萬元計)? (c)問首20年收到的捐款總數會否少於首20年的總支出？試解釋原因.	等差數列的通項，前n項的和； 等比數列的通項，前n項的和.
2012	陳先生把 \$10,000 存入一間銀行，利息以單利息計算．兩年後，他獲得本利和 \$11,600.	單利率，複利息以月計算.

	a. 求年利率。 b. 之後陳先生把本利和共 \$11,600 全部存入另外一間銀行，年利率18%，以複利息每月計算一次．求兩年後的本利和，答案準確至最接近分.(注意：\$1 等於100 分)	
2011	若複利息每月計算一次，且年利率為12%， 本金 $\$P$ 在兩年後的本利和是多少？ A. $\$P(1+12\%)^2$ B. $\$P(1+12\%)^{24}$ C. $\$P(1+1\%)^2$ D. $\$P(1+1\%)^{24}$ E. $\$P(1+6\%)^4$	複利息以月計算
2010	若數序 $k+k^2+k^3+\cdots$的無限項之和是$\frac{1}{2}$，求 k. A. 無解 B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$ 或 1 E. $\frac{1}{3}$或 1	等比數列的無限項之和

參考文獻

National Council of Teachers of Mathematics(2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA, NCTM.

Polya, G.(1957). How to solve it: Anew respect of mathematical method. NJ: Princeton University Press.

張奠宙、張廣祥(2008). 中學代數研究. 高等教育出版社. 北京.

李忠海、王家鏵(2006). 代數課程研究. 科學出版社. 北京.

孫玉梅(2012). **猶太媽媽這樣教思考：**教出守信用、能分享、會理財的好孩子. 野人文化股份有限公司. 台灣.

普通高中課程標準實驗教科書**數學選修 2-2** 教師教學用書 (人民教育出版社)(2007). 北京.

教育部（2001）. **普通高中數學課程標準**. 北京: 教育部.

相關教材

數學(2011), 暨南大學出版社. 廣州.

數學一同步練習冊(2011), 暨南大學出版社. 廣州.