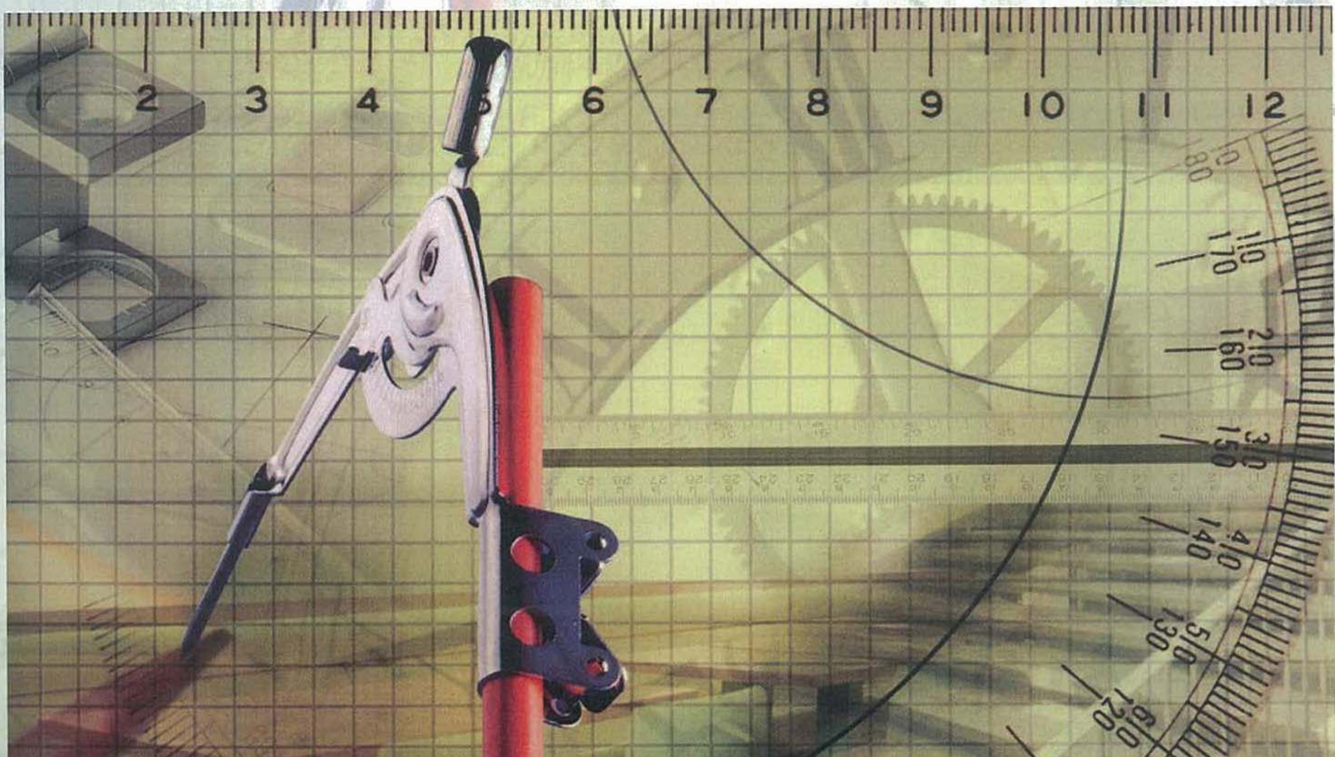
2009/2010 學年教學設計獎勵計劃

教育暨青年局
Direcção dos Serviços de Educação e Juventude

針對澳門大學招生入學試題
——數學科學年教學設計



參選編號：C019

學科名稱：數學

適合年級：高三

序 言

本教學設計(以下簡稱本設計)對澳門大學招生入學試題(數學卷 A)進行了深入的剖析，揭示規律，見**【澳門大學招生入學試數學科試題(卷 A)試卷分析】**，結合高中數學各章的具體內容進行了詳細的論述，這對幫助高中學生建立正確的復習備考方法很有幫助，見**【反思與建議】**。

本設計還配備了多篇模擬考題，這些題目主要是澳門大學過往的歷屆真題，同時還對近十年來入學試題進行了按章的分類介紹，見**【教學內容】**，這對學生深刻認識考試大綱的要求，提高復習的實效性，具有特殊作用。

本設計不是以某一版本的數學教材為准，而是兼顧了澳門現行的數學通用教材和一些校本教材。既適合於學生參加升大入學試的復習，更適合於教師日常教學參考。因為編者認為，掌握知識比應考更重要，而真正掌握了知識，應考也就成了知識運用而已。

本設計編寫過程中，編者將自己十年的中學數學教學經驗，運用本設計的成果，指導學生參加澳門大學招生入學試(數學卷 A)取得一定成績，見**【試教與評估】**和突出效果上所累積的經驗，都毫無保留地介紹了出來。這期間，吸收了不少學者和學生在復習備考問題上的研究成果和學習經驗，在此一併表示感謝，也要感謝在編寫本設計過程中曾經給予我無限支援的朋友們。

由於編者水準所限，本設計的不足之處，歡迎廣大學者師生提出寶貴意見。

編者

二零一零年

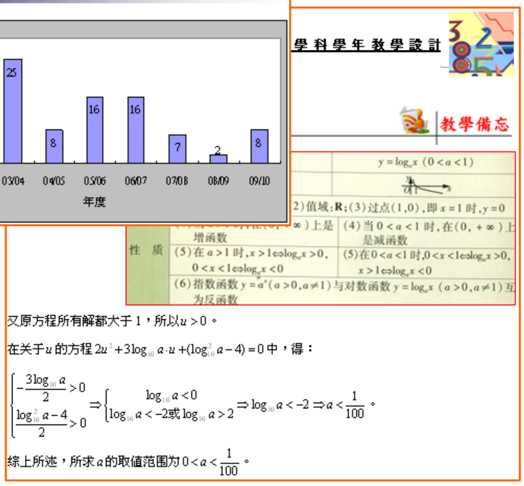
編 寫 說 明

考試大綱

讓老師瞭解考試課程所覆蓋的範圍。

命題趨勢

分析考試出題的方向。



思路分析

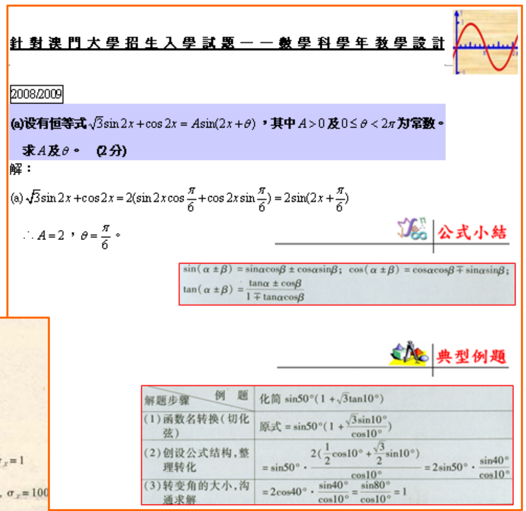
提供解題的思考方法和步驟。

教學備忘

提供復習指引，幫助同學正確理解數學概念。

解題示範

附以詳細的題解，讓學生熟習解題的技巧。

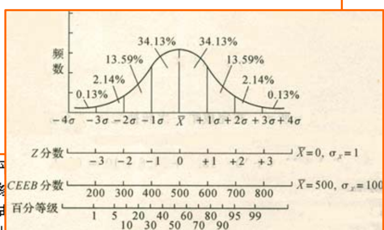


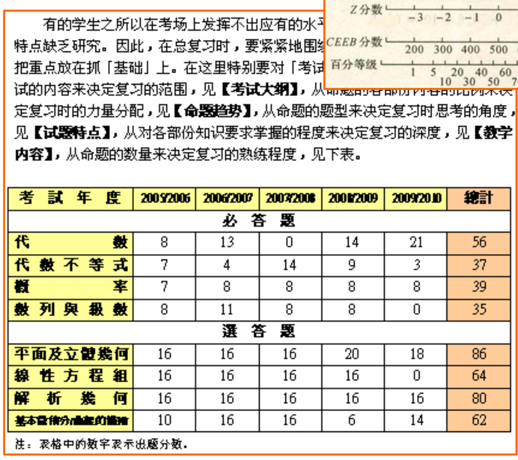
公式小結

提示重要的公式、定理及法則。

典型例題

提供與考題相關的題目，供老師選擇。





考試年度	2005/2006	2006/2007	2007/2008	2008/2009	2009/2010	總計
必答題						
代數	8	13	0	14	21	56
代數不等式	7	4	14	9	3	37
概率	7	8	8	8	8	39
數列與級數	8	11	8	8	0	35
選答題						
平面及立體幾何	16	16	16	20	18	86
線性方程組	16	16	16	16	0	64
解析幾何	16	16	16	16	16	80
基本初等函數	10	16	16	6	14	62

注：表格中的數字表示出題分數。

評分簡介

提供與考試相關的評量，以供參考。

備考指引

介紹一些復習方法和應考策略。

模擬試題

精心設計的考題，幫助同學應付考試。

目 錄

六) 澳門大學招生入學試數學科試題

七) 模擬試題

八) 試教與評估

課 堂 表 現 評 價

課 後 作 業 評 價

測 驗 分 數 成 績 統 計

本 年 度 澳 門 大 學 入 學 試 數 學 卷 A 成 績

曆 屆 入 學 試 本 校 學 生 數 學 卷 A 成 績

澳 門 大 學 入 學 試 評 分 量 表 簡 介

九) 反思與建議

如 何 提 高 複 習 的 質 量 ？

如 何 對 待 考 試 ？

附錄：

曆 屆 入 學 試 本 校 學 生 各 科 成 績 排 名 總 表

澳 門 大 學 招 生 入 學 試 數 學 科 試 題 參 考 答 案

課 堂 照 片

教 學 筆 記

參考文獻

附件：【本教學設計文稿】VCD 共一片；【學生手冊】共一本。

教學設計內容說明

學科名稱	數學
學習主題	針對澳門大學招生入學試題——數學科學年教學設計
適合年級	高三
教學目標	1)加強對主要公式、法則、定理的回顧，解答典型考題，提煉蘊含的數學思想方法。 2)明確高中數學的知識結構，將整個數學知識體系框架化、網路化。 3)注意所做題目知識點覆蓋範圍的變化，有意識地思考，研究這些知識點在課本中所處的地位和相互之間的聯繫。
教學時數	每課時 40 分鐘，需 199 個課時。
創意特色	本教學設計著重學生的自主學習，教師先指明每章節的知識重點與難點，給出題目讓學生各自在課後準備，然後在課堂上讓學生進行分組協作學習，讓每組學生作解題講演，教師在學生討論交流的基礎上，對其中的難點、疑點和不同的看法，進行重點啓發和解惑，最後教師作出點評並給予解答。 本教學設計已有多年時間的統籌和準備，爲了與本校的高三級數學課程與教材配合，作了多次必要的調整和修改，在最近 5 年的教學實踐中，以本校學生報考澳門大學招生入學試數學 A 的成績來看，**在 2004/2005、2005/2006、2007/2008、2008/2009 年度均排名全澳第一【注】**，足見本教學設計有一定的實效性，也是把學生的自主學習能力發揮出來的真實體現。 **【注】：資料由澳門大學學務部提供，詳見本教學計畫【試教與評估】部份。**
教學準備	電腦、投影機、音響設備。

主要內容	基礎概念	實數系統。 集合語言。 笛卡兒積。 數學歸納法的原理及運用。
	代　　數	方程、恒等式及函數的性質。 線性及二次方程。 多項式。因式定理及余式定理。 部份分式。 二項展開式及其性質；帕斯卡三角形。 指數及根式。對數。
	函　　數	映射、函數、定義域及值域。 圖。 線性及二次函數、指數函數、有理函數、對數函數。 反函數。
	平面及立體幾何	直線、角、三角形、多邊形及圓形的性質及定理。 簡易立體圖形，包括長方體、角柱、圓柱、角錐、直立 圓錐、球體。
	線性方程組	不多於三個未知量。 $M \times M$ 矩陣；矩陣加法及乘法($M \leq 3$)。 行列式(階數不大於三)。
	解析幾何	直線和圓。 切線與法線。 直線及曲線的相交。 二次曲線的標準形式。 二次曲線的平移。 極座標。
	代數不等式	簡易代數不等式及絕對不等式的運算。 二元線性不等式。
	三　　角	弧度、弧與扇形。 三角函數。恒等式。 正弦及余弦定律。 複合角公式。 反三角函數。三角函數方程及其通解。 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 式。 三角形之面積。

主要內容(續)	基本微積分	多項式的和、差、積、商的微分法。 極大值、極小值及拐點。 多項式的不定積分。 定積分的簡易性質。 利用定積分計算面積。
	曲線的描繪	偶、奇及週期函數。 導數的應用。
	向　　量	純量與 R^2 中的向量；向量加法及純量乘法。 位置向量。 笛卡兒分量。 純量積。
	複　　數	虛數。 複數的運算。 二次多項式的複根。 複數的極式。 有理指數的棣美佛定理。 n 次根。
	概　　率	排列與組合。 簡易概率問題。
	數列與級數	等差級數及等比級數。 n 項和。 等比級數無限項之和。

授課日程表

全學年 36 周，共 199 個課時，每課時 40 分鐘。

本教學計畫 36 周，共 199 個課時。

注：下麵表格中課題後括弧內的是課時數。

周次	日期	上課時數	課題
1	2009.9.1 ~ 2009.9.4	5	基礎概念(5)
2	9.7 ~ 9.11	6	基礎概念(1)，代數(5)
3	9.14 ~ 9.18	8	代數(8)
4	9.21 ~ 9.25	8	代數(4)，函數(4)
5	9.28 ~ 10.2	4	函數(1)，綜合測驗(2)，評講(1)
6	10.5 ~ 10.9	8	平面及立體幾何(8)
7	10.12 ~ 10.16	4	平面及立體幾何(4)
8	10.19 ~ 10.23	8	平面及立體幾何(8)
9	10.26 ~ 10.30	6	平面及立體幾何(3)，線性方程組(3)
10	11.2 ~ 11.6	6	線性方程組(6)
11	11.9 ~ 11.13	8	線性方程組(8)
12	11.16 ~ 11.20	8	綜合測驗(2)，評講(1)，解析幾何(3)，復習(2)
13	11.23 ~ 11.27	第 1 段考試	
14	11.30 ~ 12.4	8	解析幾何(8)
15	12.7 ~ 12.11	7	解析幾何(7)
16	12.14 ~ 12.18	4	解析幾何(4)
17	12.21 ~ 12.25	聖誕	
18	2009.12.28 ~2010.1.1	聖誕	
19	1.4 ~ 1.8	8	綜合測驗(2)，評講(1)，代數不等式(5)
20	1.11 ~ 1.15	8	代數不等式(3)，三角(5)
21	1.18 ~ 1.22	8	三角(8)
22	1.25 ~ 1.29	8	三角(2)，基本微積分(6)
23	2.1 ~ 2.5	8	基本微積分(8))
24	2.8 ~ 2.12	4	曲線的描繪(4)
25	2.15 ~ 2.19	春節	
26	2.22 ~ 2.26	6	綜合測驗(2)，評講(1)，向量(3)
27	3.1 ~ 3.5	8	複數(8)
28	3.8 ~ 3.12	8	複數(6)，復習(2)
29	3.15 ~ 3.19	第 2 段考試	
30	3.22 ~ 3.26	8	概率(8)
31	3.29 ~ 4.2	5	概率(2)，數列與級數(3)
32	4.5 ~ 4.9	6	數列與級數(6)
33	4.12 ~ 4.16	8	數列與級數(2)，模擬考試(2*2)，評講(2*1)
34	4.19 ~ 4.23	8	總復習(8)
35	4.26 ~ 4.30	畢業考試	
36	5.3 ~ 5.7	畢業考試	

教 學 活 動

活動過程說明 (含教學策略等)	每個組別都必須從形式多樣的題目中進行歸納分類，尋找出形式相近或相似的題目，歸納出相同或不同的解題方法，使學生的知識和能力準確整合。做資料篩選分析統計等工作，製成圖表及製作投影片，以配合口頭演繹。 使用「小組討論，合作學習」的教學方式，讓學生在小組中探索、討論、學習，讓師生、生生之間在討論中交流思想、方法和學習經驗，讓學生的思維在討論、在合作中碰撞出火花。 留給學生自主學習的時間和空間，教師引導學生多看、多聽、多想、多說，自覺主動地參與學習的全過程。以「小組學習」爲核心組織教學，引導學生合作探索，共同提高。
情境佈置 (含教學資源的運用)	學生會使用電腦，投影機等設備，用文字、符號、圖表、影畫，音效去演繹其作品，報告內容包括試卷結構分析、試題特點、命題趨勢、復習建議等等。 教師建議學生思考下列問題：爲什麼選這個題？這個題牽涉哪些數學知識點？定理？公式？解題策略的選擇？(計算？圖解？試誤法？由特殊到一般？由結論向前推算？……) 這道題有沒有其他解法？ 重視學生自學能力的培養。引導學生在「做中學」，培養學生的實踐能力和創新精神。
教學重點及注意事項 (含評量的運用)	教學重點： 掌握每個數學知識點，並把知識點按題型細化，使學生對數學知識的掌握更具體、更明晰、更牢固。針對考試大綱的要求，對數學科的知識體系中的考點進行歸納與總結。培養學生的協作能力，提高學生的學習主動性。 教學評量： 1.內容多寡 2.資料分析 3.演繹水準 4.製作美觀 5.其他

澳門大學招生入學試數學科試題(卷 A)試卷分析

一、試卷簡介

數學卷 A 是爲報考澳門大學科技學院及教育學院(主修數學)而設，目標在於評核考生的數學能力。試卷採用閉卷筆試的形式，全卷滿分 100 分，考試時間爲 120 分鐘。試卷共有兩部份：第一部份爲必答題，約七至八條題目，須全部作答，共 52 分；第二部份爲選答題，有五條題目，每條 16 分，任擇三條作答，共 48 分，如作答多於三題，只有首三題可得分。

《考試大綱》內的數學內容：分別爲基礎概念、代數、函數、平面及立體幾何、線性方程組、解析幾何、代數不等式、三角、基本微積分、曲線的描繪、向量、複數、概率和數列與級數**【見教學設計內容說明】**，統計近年來澳門大學的試題發現：平面及立體幾何、解析幾何共占 27.2%；代數和三角占 20.7%；基礎概念、函數和向量只占 7.4%。

試卷難度按兩級坡度設計，整份試卷是一個大坡度，必答題和選答題又是一個坡度，特別在必答題部份，試題難度的起點比較低，相當於高中數學能力基本水準，能測度全體考生對基礎知識的掌握情況。選答題變一題把關爲多題把關，分別考查不同的內容並設置一定的關卡，區分考生綜合和靈活運用數學知識分析問題、解決問題的能力。不論是必答題抑或選答題，都是由某些概念、性質或簡單的基本問題出發(它們多數來源於教科書或相關資料)，將它們與初步確定的考查要求聯繫起來，進行分析和思考，將有關的知識點、基本的思想方法，進行適當的有機組合，逐步形成綜合模式的解答題。由於立足於數學能力和思想方法的考查，因此往往選出的題材或多或少，總帶有綜合的色彩。此外，解答題還要求考生寫出解題過程，能夠比較全面地反映考生學科智力水準，展示其分析數學問題、綜合運用數學知識進行邏輯思維的過程，適合對發散、綜合、評價、複雜運算、文字表達等高層次能力的考查。

二、命題原則

1)概念性強，解法多樣

數學是由概念、命題組成的邏輯系統，而概念是基礎。數學中每一術語、符號和用語都有著明確的內涵。這個特點反映到考試中就要求考生在解題時首先要透徹理解概念的含義。一般數學試題的結果雖確定惟一，但解法卻多種多樣，有利於考生發揮各自的特點，靈活解答，真正顯現其水準，命題時考慮各種等價解法的考查重點和難易大致相同，解答到同樣深度給同樣的分值。例如：

2004/2005 年度　必答題第 2 題

2)設 a 爲正數及 $f(x)=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$ 爲偶函數（ 即 $f(-x)=f(x)$ ）。

(a)求數 a 。　(4 分)

(b)證明 $f(x)$ 在 $\{x: x>0\}$ 上是增函數。　(4 分)

【分析】

本題是考查函數知識的一道常規試題，給出的函數式是考生所熟悉的，涉及的解題方法是數學的通性通法，大大減弱其抽象程度，考生容易思考並動手解題，這作爲一道中等難度的試題來設計是合適的；試題(b)的證明函數在 $\{x: x>0\}$ 上是增函數，由於高中課程學習了導數，提供了更爲簡捷的解題手段，如果考生能用求導的方法來證明本題，能使解題過程更爲簡捷且贏得考試時間，是較高的思維層次的表現。

【解】

(a)由 $f(-x)=f(x)$ ，得 $\frac{e^{-x}}{a}+\frac{a}{e^{-x}}=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$

即 $\frac{1}{ae^x}+ae^x=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$

$e^x(a-\frac{1}{a})-\frac{1}{e^x}(a-\frac{1}{a})=0$

$(a-\frac{1}{a})(e^x-\frac{1}{e^x})=0$

當 $x\neq 0$ ，即 $e^x-\frac{1}{e^x}\neq 0$ 時， $a-\frac{1}{a}=0$ ；

$\therefore a=\pm 1$ (負號舍去)

(b)【證法 1】

設 $0 < x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = e^{x_1} - e^{x_2} + \frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{x_2}}$$

$$= (e^{x_2} - e^{x_1})(\frac{1}{e^{x_1+x_2}} - 1)$$

$$= e^{x_1}(e^{x_2-x_1} - 1) \cdot \frac{1-e^{x_2+x_1}}{e^{x_2+x_1}}$$

由 $x_1 > 0$ ，$x_2 > 0$ ，$x_2 - x_1 > 0$ ，得 $x_1 + x_2 > 0$ ，

$e^{x_2-x_1} - 1 > 0$ ，$1 - e^{x_2+x_1} < 0$

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$

即 $f(x)$ 在$\{ x : x > 0 \}$上是增函數。

【證法 2】

$f'(x) = e^x - e^{-x}$

當 $x > 0$ 時，總有 $e^x - e^{-x} = e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0$

$\therefore f(x)$ 在$\{ x : x > 0 \}$上是增函數。

數學試題往往存在一題多解、計算量相差懸殊的現象，同一道試題不同的解題思路和計算量的大小都會反映出不同的能力層次；例如：

2005/2006 年度　選答題第 12(a)小題

(a)因式分解行列式：$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (a+c)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ 。 （7 分）

【方法 1】

(a)原式$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & b^2 - a^2 & (a+c)^2 - (b+c)^2 \\ 0 & c^2 - b^2 & (a+b)^2 - (a+c)^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (b+a)(b-a) & (a+b+2c)(a-b) \\ (c+b)(c-b) & (2a+b+c)(b-c) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} -b-a & a+b+2c \\ -c-b & 2a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} -b-a & 2c \\ -c-b & 2a \end{vmatrix}$$

$=(a-b)(b-c)[2a(-b-a)+2c(c+b)]$
$=2(a-b)(b-c)[b(c-a)+(c^2-a^2)]$
$=2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

【方法 2】

令$\Delta=\begin{vmatrix}1 & a^2 & (b+c)^2\\ 1 & b^2 & (a+c)^2\\ 1 & c^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}$；將$b$ 、c ；c 、a對調，原行列式僅改變符號；

故Δ之展開爲關於a 、b 、c三文字四次齊次交錯式，故得
$\Delta=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ ，k爲常數
比較兩邊b^3c對應係數，得$k=2$
$\therefore\Delta=2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

2)採用成題，以本爲本

數學教材是學習數學基礎知識，形成基本技能的藍本，能力是在知識傳授和學習過程中得到培養和發展的。縱觀近年的數學試卷，相當數量的基本題源於教材，即使是綜合題也是基礎知識的組合和加工，充分表現出教材的基礎作用。

復習階段要在掌握教材的基礎上，把各個局部知識按照一定的觀點和方法組織成整體，形成知識體系。要注重知識過程中的教學，特別是數學定理，公式的推導過程和例題的求解過程，基本數學思想方法和數學能力都是在這個過程中形成和發展的，這就是教材的示範效應。統計近年澳門大學試題發現，有很多採用成題考查的例子，例如：

2005/2006 年度　必答題第 4 題

4)用數學歸納法，證明對於 n＝1，2，3．．．以下等式成立：
$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　（7 分）

此題是 1995 年臺灣各大學校院港澳區招生入學試文科卷計算題第 1 題；
《文達附加數學》(蘇一方，黃鳴嬋)第 71 頁復習題 3 甲部第 4 題。

2009/2010 年度　必答題第 6 題

設n爲正整數。若在$(1+x)^n$的展開式中，x^4 、x^5及x^6的係數按序爲一等差數列中的連續三項，求n的值。　（7 分）

此題是《文達附加數學》(蘇一方，黃鳴嬋)第 95 頁復習題 4 乙部第 16(b)題。

2002/2003 年度　必答題第 5 題

試用極式 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 表示複數 $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ ，其中 $0 \le \alpha \le \pi$ 。　（8 分）

此題是《文達附加數學》(蘇一方，黃鳴嬋)第 431 頁練習 13－3 乙部第 26 題。

2008/2009 年度　必答題第 4(a)小題

4)(a)用數學歸納法，證明對任意正整數 n ，

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$　（5 分）

此題是人民教育出版社《數學Ｉ》第 264 頁的教學內容；
《文達附加數學》(蘇一方，黃鳴嬋)第 63 頁練習 3－2 甲部第 9 題；
《標準高等代數學》下冊(陳明哲)第 38 頁習題六十四第 4 題。

此題由於限制了只能利用數學歸納法，所以證明的方法是單一的；如果不限制證法，則可以更好的考察考生其他數學能力，例如用演繹方法可給出如下證明：

$$\because \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$

$$\therefore \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}]+\frac{1}{2}[\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}]+\cdots+\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ ；證明成立。

【分析】

對於數列 $\{a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\}$ ，其前 n 項和爲：

$$S_n=\frac{1}{k}[\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdots k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}]$$ ； k 爲正整數

利用上述公式，可以解決一系列通項爲 n 的多項式其倒數的數列的求和問題。

三、試題特點

1)改編範題，控制難度

考試的目的是爲大學選拔新生，但其要求仍要以高中教學爲基礎。因此，確定試卷的要求是命題的關鍵。《考試大綱》是考試命題的依據，命題是按照考試大綱的基本要求，並充分考慮澳門地區不同學校使用不同教材的特點，每所學校的學生評量方法和評價機制也不盡相同，最後還要考慮不同考生差別很大的事實；在必答和選答內容中都編排一些較易試題，使大部份考生都得到一定的基本分。同時，亦都編排一些有一定難度的試題，實現選拔的目的。

(1)改變提問方式，把證明題改變爲探索題，將結論隱蔽起來，可提高難度；

例如將：中學數學《教材全解》高二代數　第 40 頁例 3

已知a ，$b\in R^{+}$ ，$a+b=1$，試證明：$(a+\dfrac{1}{a})(b+\dfrac{1}{b})\geq\dfrac{25}{4}$

改編成：2005/2006 年度 必答題第 1 題

1)設a及b爲正數，且$a+b=1$。

(1)證明$ab\leq\dfrac{1}{4}$。 (2 分)

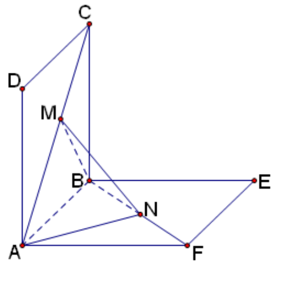
(2)求$(a+\dfrac{1}{a})(b+\dfrac{1}{b})$的最小值。 (5 分)

(2)改變題設條件，適當增刪已知條件，隱蔽條件明朗化，抽象條件具體化，條件參數的變更，都可使試題的難度發生變化；

例如將：2002 年全國新教材高考題　第 18 題

如圖，正方形 ABCD，ABEF 的邊長都是 1，而且平面 ABCD，ABEF 互相垂直。點 M 在 AC 上移動，點 N 在 BF 上移動，若 CM＝BN＝a(0＜a＜$\sqrt{2}$)。

1. 求 MN 的長；
2. 當 a 爲何值時，MN 的長最小；
3. 當 MN 長最小時，求面 MNA 與面 MNB 所成的二面角α的大小。



改編成：2007/2008 年度 選答題第 11 題

如圖，正方形 ABCD 和正方形 ABEF 的邊長均爲 1，且正方形 ABCD 垂直於正方形 ABEF。設點 P 和點 Q 分別爲線段 AC 和 BF 上的動點，且 CP＝BQ＝x，$0<x<\sqrt{2}$。

(a)設 O 爲點 P 在 AB 上的垂足。

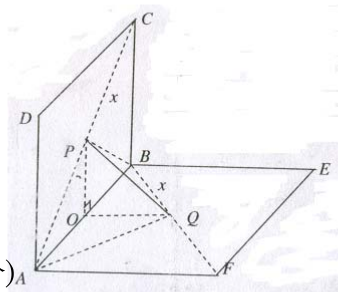
(1)證明∠POQ 是一直角。 (2 分)

(2)求 PQ 的長(答案以 x 表示)。 (7 分)

(b)設 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 P 和 Q 分別爲 AC 和 BF 的中點。

求面 APQ 與面 BPQ 所成的二面角。

【提示：設 R 爲 PQ 的中點，連 AR 和 BR。】 (7 分)



又例如：《文達附加數學》(蘇一方，黃鳴嬋)第 359 頁復習題 11 乙部第 29 題

L 爲一通過點 P(－2，0)的直線，斜率爲 m ($m\neq 0$)。L 與拋物線 $y^2=8x$ 相交於 A(x_1，y_1)、B(x_2，y_2)兩點。

(a)證明 x_1 及 x_2 爲方程 $m^2x^2+4(m^2-2)x+4m^2=0$ 的根。

(b)求 $(x_1-x_2)^2$，答案以 m 表示。

(c)證明 $AB^2=\dfrac{64(1+m^2)(1-m^2)}{m^4}$。

(d)求 m 的各值使 L 與 $y^2=8x$ 相切。

(e)若 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，C 爲點(2，0)，試用(c)求△ABC 的面積。(答案以根式表示)

(香港中學會考 1988)

改編成：2004 / 2005 年度 選答題第 9 題

直線 L 過點 P(－2，0)且有斜率 m ($m>0$)。假設直線 L 與拋物線 $y^2=8x$ 交於兩不同的點 A(x_1，y_1)及 B(x_2，y_2)。

(a)證明 x_1 及 x_2 是方程 $m^2x^2+4(m^2-2)x+4m^2=0$ 的根。 (2 分)

(b)證明 $(x_1-x_2)^2=\dfrac{64(1-m^2)}{m^4}$。 (4 分)

(c)證明 $|AB|^2=\dfrac{64(1-m^4)}{m^4}$。 (5 分)

(d)設 $m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，若點 Q(h，k)爲一動點使得△ABQ 的面積爲 $\sqrt{192}$，求點 Q(h，k)的座標所滿足的方程。 (5 分)

(3)改變綜合程度，增減知識點的組合，變換知識和方法的綜合廣度和深度，也會改變試題的難度；

例如將：四輪復習法《詳解手冊》第 79 頁例 11

證明不等式 $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ ，其中 $n\in N^{*}$ 。

改編成：2009/2010 年度 必答題第 4 題

4)(b)用數學歸納法及(a)的結果，證明對任意正整數 n ， $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$ (4 分)

又例如：2002 年全國新教材高考題

某單位 6 個員工借助互聯網開展工作，每個員工上網的概率都是 0.5(相互獨立)。 1. 求至少 3 人同時上網的概率； 2. 至少幾人同時上網的概率小於 0.3？

改編成：2004/2005 年度 必答題第 7 題

一公司有職員六人。每天，各人需要使用電腦的概率爲 0.5。假設各人對電腦的需要是獨立的，且在任何兩天的需要也是獨立的。 (a)求在同一天內以下事件的概率： 1.剛好有三人需要使用電腦； (2 分) 2.最少有三人需要使用電腦。 (2 分) (b)若公司只有五台電腦。求最大的 n 使得公司在連續 n 天內都有足夠電腦以供使用的概率大於 0.9。 (4 分)

2)暗示解題，分散難點

這類試題設計的特點是內容具有一定的深度和廣度，知識點覆蓋面大，考查的能力較高。增加中間的設問，把單問改變爲分步設問，無異於給出提示，可調節難度；其作用是給考生留有較大的發揮餘地，優秀的考生得以脫穎而出，各種水準的考生能得到相應的分數，拉開了考生的檔次，有效地區分了考生。例如：

2008/2009 年度 選答題第 11(b)小題

(b)設 $\omega=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$，其中 k 是不能被 7 整除的整數。

(1)證明 $\omega^7=1$。由此，證明 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^6=0$。 (4 分)

(2)用(1)的結果，證明 $(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2=5$。 (3 分)

(3)用(2)的結果，求 $(\cos\frac{2k\pi}{7})^2+(\cos\frac{4k\pi}{7})^2+(\cos\frac{6k\pi}{7})^2$。 (4 分)

【分析】

此題的難點是(2)、(3)兩個問題，命題者爲了使考生發現解題思路，對(2)和(3)的解法作了明確的提示，若按照指引的方向解答，細心分析題意，體會命題者的意圖，設法溝通各小題之間的內在聯繫，注意題目特點，就能快速求解。

【解】

(b)(1) $\omega^7=(\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7})^7=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1$

由 $\omega^7=1$，得 $\omega^7-1=0$

即 $(\omega-1)(\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)=0$

$\because\ \omega\neq 1$

$\therefore 1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^6=0$；證明成立。

(2) $(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2$

$=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}+\omega^4+\frac{1}{\omega^4}+\omega^6+\frac{1}{\omega^6}+6$

$=\omega^2+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^6+\omega+6$

$=-1+6$

$=5$；證明成立。

(3) $\omega+\omega^{-1}=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}+\cos(-\frac{2k\pi}{7})+i\sin(-\frac{2k\pi}{7})=2\cos\frac{2k\pi}{7}$

同理，$\omega^2+\omega^{-2}=2\cos\frac{4k\pi}{7}$ 及 $\omega^3+\omega^{-3}=2\cos\frac{6k\pi}{7}$

代入 $(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2=5$ 得：

$(2\cos\frac{2k\pi}{7})^2+(2\cos\frac{4k\pi}{7})^2+(2\cos\frac{6k\pi}{7})^2=5$

$\therefore (\cos\frac{2k\pi}{7})^2+(\cos\frac{4k\pi}{7})^2+(\cos\frac{6k\pi}{7})^2=\frac{5}{4}$

參考樣題：《文達附加數學》(蘇一方，黃鳴嬋)第 464 頁復習題 13 乙部第 32 題

設 $\omega=\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$，其中 $i^2=-1$，且 k 爲一已知整數，使 $\omega\neq1$。

(a)試證對於任意整數 n，$\omega^n+\omega^{-n}=2\cos\dfrac{2nk\pi}{5}$。

(b)證明 $\omega^5=1$。

由此，或用其他方法，證明 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$。

(c)利用(b)的結果，試證

$(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2=3$。

(d)由(a)及(c)，證明 $(\cos\dfrac{2k\pi}{5})^2+(\cos\dfrac{4k\pi}{5})^2=\dfrac{3}{4}$。

又例如：2002/2003 年度 選答題第 8 題

給出二次方程 $x^2+2px-q^3=0$，其中 p 和 q 爲實數及 q>0。設 α 和 β 是此方程的兩個根。

1.以 p 和 q 表 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$。

2.證明 $\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$ 是方程 $x^3+3qx+2p=0$ 的一個根。

3.求方程 $x^3+3x^2+6x+10=0$ 的一個根。

[提示：設 $x=y-1$] (16 分)

【分析】

這是一道能充份說明澳門大學考題特點的試題；採取多題設問，暗示解法的方式，以此降低題目難度，區分不同層次的考生。此題的設計巧妙，考生必須將原方程 $x^3+3x^2+6x+10=0$ 改作根的變換成新方程 $x^3+3x+6=0$，再利用 $\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$ 是方程 $x^3+3qx+2p=0$ 的一個根的關係，求得該三次方程唯一的實數根。

【解】

1. $\alpha+\beta=-\dfrac{2p}{1}=-2p$；$\alpha\beta=\dfrac{-q^3}{1}=-q^3$。

2.令 $x=\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$，代入 $x^3+3qx+2p$，得：

$$
\begin{aligned}
&x^3+3qx+2p\\
&=(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})^3+3q(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})+2p\\
&=(\alpha+\beta+2p)+3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})+3q(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})\\
&=(-2p+2p)+3(-q^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})+3q(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})
\end{aligned}
$$

$=0$；證明成立。

所以，$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$是方程 $x^3+3qx+2p=0$ 的一個根。

3.將 $x=y-1$，代入方程 $x^3+3x^2+6x+10=0$，並化簡得：

$y^3+3y+6=0$

利用 1.及 2.的結論，令 $p=3$、$q=1$；

則$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$是方程 $x^3+3x+6=0$ 的一個根。

又 $\alpha+\beta=-2p=-6$，$\alpha\beta=-q^3=-1$；

$\therefore \alpha=-3+\sqrt{10}$，$\beta=-3-\sqrt{10}$。

方程 $y^3+3y+6=0$ 的一個根爲 $\sqrt[3]{-3+\sqrt{10}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{10}}$；

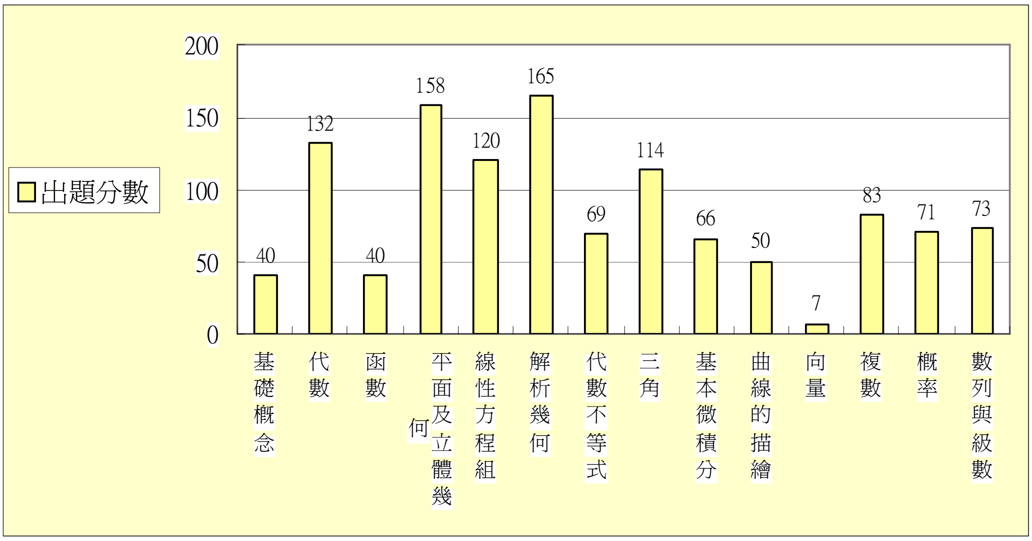
所以，原方程 $x^3+3x^2+6x+10=0$ 的一個根爲 $\sqrt[3]{-3+\sqrt{10}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{10}}-1$。

四、命題趨勢

1)全面綜合考查基礎知識

全面考查了《考試大綱》中各部份的內容，可以說教材中各章的內容都有所涉及，如線性方程組、向量、複數、概率等教學課時較少的內容，在試卷中也有所考查**【見表一】**。在全面考查的前提下，重點考查了高中數學知識的主幹內容，如平面及立體幾何、解析幾何、代數不等式、三角、數列與級數等仍是支撐整份試卷的主體內容**【見圖一】**。尤其是在每年試卷的必答題中，每題所涉及的具體內容都是高中數學的重點內容，要求層次恰當，試題淡化特殊的技巧，大多數試題既有常規解法，同時在知識的應用上又有一定的靈活性。

代數重點考查了函數的性質、多項式、指數及對數等，解析幾何重點考查了直線和二次曲線的位置關係，立體幾何仍以多面體的有關線面關係和角爲考查重點，試卷還考查了基本微積分、曲線的描繪、向量、複數等內容。



【圖一】 2001 至 2009 年度考題出題分數分佈

2)突出數學思想方法考查

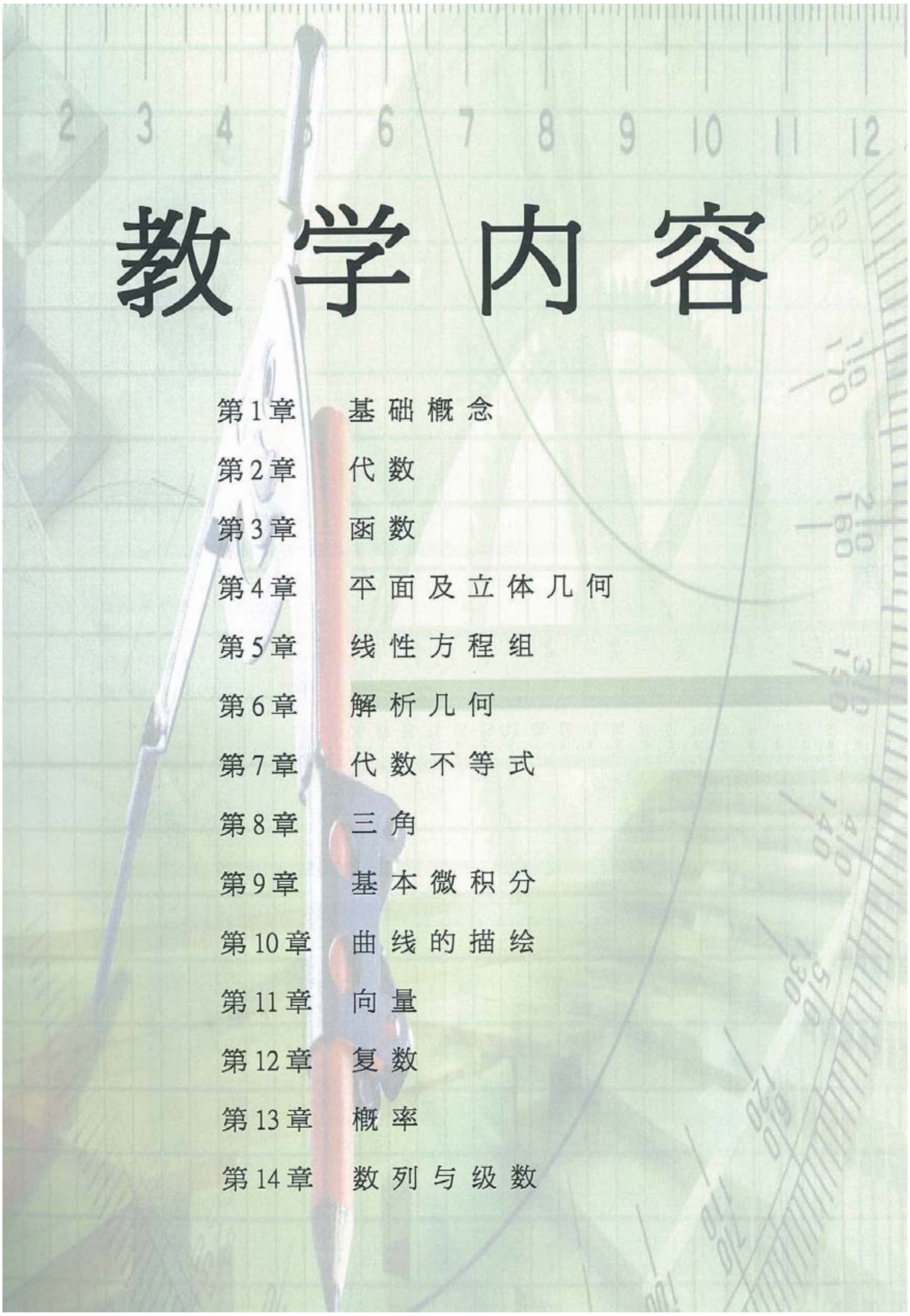
數學思想方法是對數學知識的最高層次的概括與提煉，是適合於中學數學全部內容的通法，是考試的核心，數學思想和方法的考查分三個層面：首先是具體方法的考查，如配方法、換元法、消去法、割補法、待定係數法、數學歸納法；然後是一般的邏輯方法，如分析法、綜合法、模擬法、歸納法、演繹法、反證法等；最高層次是數學思想，如函數與方程思想、數形結合思想、分類討論思想、轉換與化歸思想、運動與變換思想等。

例如：函數與方程的思想是試卷重點考查的對象，2003/2004 年度選答題第 10 題出現的解析幾何題中的曲線方程及韋達定理的應用都是方程思想的最佳體現，又例如 2005/2006 年度選答題第 12 題的線性方程組題，在消元、轉化後引入函數圖像討論方程組的解，此題還考查了指數函數性質及數形結合的思想。

換元法在考試中常考不衰，如 2005/2006 年度必答題第 7 題，通過換元處理，把原方程化歸爲二次方程根和係數關係求解；2006/2007 年度選答題第 12 題，此題設計比較精妙，爲帶多個參數的方程組解的討論，但難度不大，考生若按照題目提示，利用換元法簡化方程求解。

轉換與化歸思想是試卷考查的一大重點，如 2009/2010 年度選答題第 12 題，求解過程需要兩次轉化；其一是無限轉化爲有限，即利用錯位相減法對數列進行處理，其二是化歸(拆分)爲兩個基本數列求和問題；2007/2008 年度必答題第 5 題複數題和 2001/2002 年度必答題第 7 題數列題，都體現了轉換與化歸思想。

分類討論是一種十分重要的思想方法，如 2003/2004 年度必答題第 7 題，必須對排列組合的加、乘原理作出討論；2001/2002 年度必答題第 2 題，要以指數的底數進行分類討論。此外，在每年考核代數不等式的題目中，都恰如其份的考查綜合法、分析法、歸納法等內容，這裏不作詳述。總之，考試命題考慮從不同的角度運用不同的思想方法，創設不同的解題途徑，從而有效區分不同程度學生的數學能力。



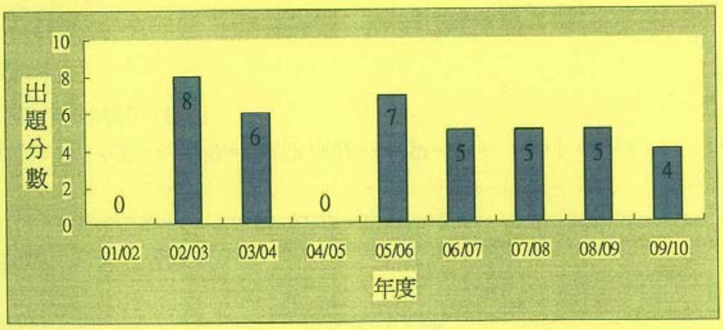
教学内容

1 基礎概念

考試大綱

實數系統。
集合語言。
笛卡兒積。
數學歸納法的原理及運用。

命題趨勢



2002/2003

4)利用數學歸納法，證明

$(1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^5+2^5+\cdots+n^5)=\frac{1}{2}[n(n+1)]^3$， $n=1，2，3\cdots$ (8 分)

證：

(1)當 $n=1$ 時，左式$=1^3+3(1^5)=4$；右式$=\frac{1}{2}[2]^3=4$，

∴左式＝右式，等式成立。

(2)假設當 $n=k$($k\in N$且$k\geq 2$)時，等式成立，即

$$(1^3+2^3+\cdots+k^3)+3(1^5+2^5+\cdots+k^5)=\frac{1}{2}[k(k+1)]^3$$

那麼當 $n=k+1$ 時，

$$[1^3+2^3+\cdots+(k+1)^3]+3[1^5+2^5+\cdots+(k+1)^5]$$

$$=\frac{1}{2}[k(k+1)]^3+(k+1)^3+3(k+1)^5$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)^3[k^3+2+6(k+1)^2]$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)^3[k^3+6k^2+12k+8]$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)^3(k+2)^3$$

$$=\frac{1}{2}[(k+1)(k+2)]^3$$

這就是說，當 $n=k+1$ 時，等式也成立。

∴根據(1)和(2)，對任何$n\in N$，等式都成立。

2003/2004

6)利用數學歸納法，證明

$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)=2^n(1)(3)(5)\cdots(2n-1)$， $n=1，2，3\cdots$ (6 分)

證：

(1)當 $n=1$ 時，左式$=1+1=2$；右式$=2^1\cdot 1=2$，

∴左式＝右式，等式成立。

(2)假設當 $n=k$($k\in N$且$k\geq 2$)時，等式成立，即

$(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)=2^{k}(1)(3)(5)\cdots(2k-1)$

那麼當 n＝k＋1 時，

$$\begin{aligned}(k+2)(k+3)(k+4)\cdots(2k)(2k+1)(2k+2)&=(k+2)(k+3)\cdots(2k)(2k+1)\cdot 2(k+1)\\&=(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(2k)\cdot 2(2k+1)\\&=2^{k}(1)(3)(5)\cdots(2k-1)\cdot 2(2k+1)\\&=2^{k+1}(1)(3)(5)\cdots(2k-1)(2k+1)\\&=2^{k+1}(1)(3)(5)\cdots[2(k+1)-1]\end{aligned}$$

這就是說，當 n＝k＋1 時，等式也成立。

∴根據(1)和(2)，對任何 $n\in N$ ，等式都成立。

2005/2006

4)用數學歸納法，證明對於 n＝1，2，3・・・以下等式成立：

$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　(7 分)

證：

(1)當 n＝1 時，左式＝1；右式＝$\frac{1}{6}(1+1)(1+2)$＝1，

∴左式＝右式，等式成立。

(2)假設當 n＝k($k\in N$且$k\geq 2$)時，等式成立，即

$$1\cdot k+2\cdot(k-1)+3\cdot(k-2)+\cdots+(k-1)\cdot 2+k\cdot 1=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$$

那麼當 n＝k＋1 時，

$$\begin{aligned}&1\cdot(k+1)+2\cdot(k)+3\cdot(k-1)+\cdots+k\cdot(2)+[k+1]\\&=1\cdot k+1+2\cdot(k-1)+2+3\cdot(k-2)+3+\cdots+k\cdot 1+k+[k+1]\\&=1\cdot k+2\cdot(k-1)+3\cdot(k-2)+\cdots+k\cdot 1+[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]\\&=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)+\frac{(k+1)[1+(k+1)]}{2}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)\cdot[k+3]\\&=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]\end{aligned}$$

這就是說，當 n＝k＋1 時，等式也成立。

∴根據(1)和(2)，對任何 $n\in N$ ，等式都成立。

2006/2007

3)(1)用數學歸納法，證明對於 n＝1，2，3・・・以下等式成立：

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (5 分)

證：

(1)當 n＝1 時，左式＝$1^2=1$；右式＝$\frac{1}{6}(1+1)(2+1)=1$，

∴左式＝右式，等式成立。

(2)假設當 n＝k($k\in N$且$k\geq 2$)時，等式成立，即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

那麼當 n＝k＋1 時，$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[2k^2+7k+6]$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$$

這就是說，當 n＝k＋1 時，等式也成立。

∴根據(1)和(2)，對任何$n\in N$，等式都成立。

2007/2008

8)(a)用數學歸納法，證明對任意正整數 n，

$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (5 分)

證：

(1)當 n＝1 時，左式＝$1^3=1$；右式＝$\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4}=1$，

∴左式＝右式，等式成立。

(2)假設當 n＝k($k\in N$且$k\geq 2$)時，等式成立，即

$1^3+2^3+\cdots+k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

那麼當 n＝k＋1 時，$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$$=\frac{(k+1)^2}{4}[k^2+4(k+1)]$$

$$=\frac{(k+1)^2}{4}[k^2+4k+4]$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}$$

這就是說，當 n＝k＋1 時，等式也成立。

∴根據(1)和(2)，對任何 $n\in N$ ，等式都成立。

2008/2009

4)(a)用數學歸納法，證明對任意正整數 n ，

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\quad(5\text{ 分})$$

證：

(1)當 n＝1 時，左式＝$\dfrac{1}{1\times2\times3}=\dfrac{1}{6}$；右式＝$\dfrac{1+3}{4(1+1)(1+2)}=\dfrac{1}{6}$，

∴左式＝右式，等式成立。

(2)假設當 n＝k($k\in N$且$k\geq2$)時，等式成立，即

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$

那麼當 n＝k＋1 時，

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k^2+5k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+3]}{4[(k+1)+1][(k+1)+2]}$$

這就是說，當 n＝k＋1 時，等式也成立。

∴根據(1)和(2)，對任何 $n\in N$ ，等式都成立。

2009/2010

4)(b)用數學歸納法及(a)的結果，證明對任意正整數 n ，

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2 \quad (4\text{ 分})$$

證：

(1)當 n＝1 時，左式 $=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$ ；右式 $=2\sqrt{2}-2\approx 0.83$ ，

∴左式＞右式，不等式成立。

(2)假設當 n＝k($k\in N$ 且 $k\geq 2$)時，不等式成立，即

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>2\sqrt{k+1}-2$$

那麼當 n＝k＋1 時，

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\sqrt{k+1}-2+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$=(2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}})-2$$

由(a)的結果知 $2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>2\sqrt{x+1}$ ，令 $x=k+1$ ，則 $2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\sqrt{k+2}$

$$\therefore 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\sqrt{k+2}-2$$

$$=2\sqrt{(k+1)+1}-2$$

這就是說，當 n＝k＋1 時，不等式也成立。

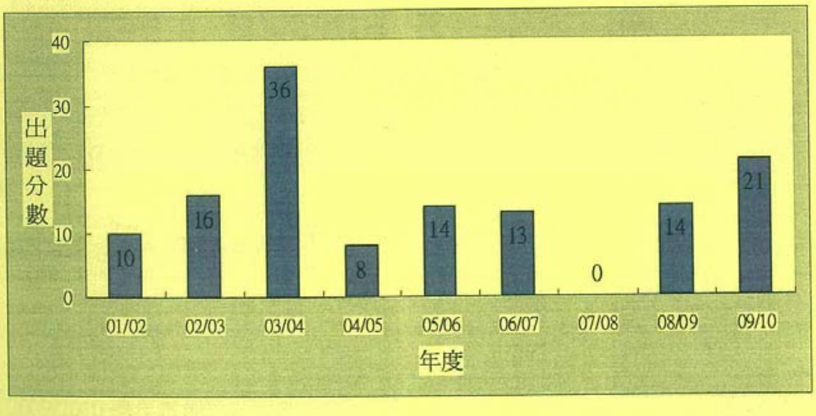
∴根據(1)和(2)，對任何 $n\in N$ ，不等式都成立。

2 代數

考試大綱

方程、恆等式及函數的性質。
線性及二次方程。
多項式。因式定理及餘式定理。
部份分式。
二項展開式及其性質；帕斯卡三角形。
指數及根式。對數。

命題趨勢



2001/2002

若 x^3-6x^2+ax+b 能被 x^2-4x+3 整除，求 a 和 b。 (6 分)

解：

設 $x^3-6x^2+ax+b=(x^2-4x+3)(mx+n)$

$x=1$ 代入上式，並化簡：$-5+a+b=0$

$x=3$ 代入上式，並化簡：$-27+3a+b=0$

解得：$a=11$，$b=-6$。

2001/2002

化簡 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ 。 (4 分)

解：

原式 $=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 2^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}=2^{\frac{15}{16}}=\sqrt[16]{2^{15}}$ 。

教學備忘

根　式	$\sqrt[n]{a}$ $(n>1, n\in \mathbf{N}^*)$，其中 n 为根指数，a 为被开方数	$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & n \text{ 为奇数} \\ \lvert a\rvert & n \text{ 为偶数}\end{cases}$
分数指数幂	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$　其中：$a>0, m, n\in \mathbf{N}^*, n>1$	
运算性质	(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$；(2) $(a^r)^s=a^{rs}$；(3) $(a\cdot b)^r=a^r\cdot b^r$. (其中 $a>0, b>0, r\in \mathbf{R}, s\in \mathbf{R}$)	

2002/2003

給出二次方程 $x^2+2px-q^3=0$，其中 p 和 q 爲實數及 $q>0$。設 α 和 β 是此方程的兩個根。

1.以 p 和 q 表 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$ 。

2.證明 $\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$ 是方程 $x^3+3qx+2p=0$ 的一個根。

3.求方程 $x^3+3x^2+6x+10=0$ 的一個根。

[提示：設 $x=y-1$] (16 分)

解：

1. $\alpha+\beta=-\dfrac{2p}{1}=-2p$ ；$\alpha\beta=\dfrac{-q^3}{1}=-q^3$ 。

2.令 $x=\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$，代入 $x^3+3qx+2p$，得：

$$x^3+3qx+2p$$
$$=(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})^3+3q(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})+2p$$
$$=(\alpha+\beta+2p)+3\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})+3q(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})$$
$$=(-2p+2p)+3(-q^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})+3q(\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}})$$
$$=0$$

所以，$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$是方程 $x^3+3qx+2p=0$ 的一個根。

3.將 $x=y-1$，代入方程 $x^3+3x^2+6x+10=0$，並化簡得：

$y^3+3y+6=0$

利用 1.及 2.的結論，令 $p=3$、$q=1$；

則$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$是方程 $x^3+3x+6=0$ 的一個根。

又 $\alpha+\beta=-2p=-6$，$\alpha\beta=-q^3=-1$；

$\therefore\alpha=-3+\sqrt{10}$，$\beta=-3-\sqrt{10}$。

方程 $y^3+3y+6=0$ 的一個根爲 $\sqrt[3]{-3+\sqrt{10}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{10}}$；

所以，原方程 $x^3+3x^2+6x+10=0$ 的一個根爲 $\sqrt[3]{-3+\sqrt{10}}+\sqrt[3]{-3-\sqrt{10}}-1$。

2003/2004

(a)化簡 $\dfrac{\log_2 a^3b-\log_2 a^2b}{\log_4\sqrt{a}}$。 (4 分)

(b)解 $2^{2x}-3(2^x)-4=0$。 (4 分)

解：

(a)原式 $=\dfrac{(3\log_2 a+\log_2 b)-(2\log_2 a+\log_2 b)}{\log_2 a^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{\log_2 a}{\frac{1}{4}\log_2 a}=4$。

(b)原方程即 $(2^x-4)(2^x+1)=0$

$2^x=4$ 或 $2^x=-1$(不合)

$\therefore x=2$ 。

典型例題

解題步驟 ＼ 例题	计算 $\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.
(1)化商的对数为对数的差	$\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}=\log_a(x^2\sqrt{y})-\log_a\sqrt[3]{z}$
(2)化积的对数为对数的和	$=\log_a x^2+\log_a\sqrt{y}-\log_a\sqrt[3]{z}$
(3)化幂的对数为对数的倍数	$=2\log_a x+\dfrac{1}{2}\log_a y-\dfrac{1}{3}\log_a z$

2003/2004

(a)因式分解 $x^4-y^4-4x^2+4y^2$ 。 (4 分)

解：

(a)原式 $=(x^2+y^2)(x^2-y^2)-4(x^2-y^2)$

$=(x^2-y^2)(x^2+y^2-4)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+y^2-4)$

2003/2004

(a)證明對於所有實數 c，二次方程 $(c^2+1)x^2+c^2x-(2c^2+1)=0$ 都有兩個不同的實根。 (4 分)

(b)求(a)中二次方程的兩個根之積的最大值。 (4 分)

解：

(a)$\because \triangle=(c^2)^2-4(c^2+1)[-(2c^2+1)]$

$=c^4+4(2c^4+3c^2+1)$

$=9c^4+12c^2+4$

$=(3c^2+2)^2>0$

∴對於所有實數 c，方程都有兩個不同的實根。

(b)方程的兩個根之積 $=\dfrac{-(2c^2+1)}{c^2+1}=-\dfrac{2(c^2+1)-1}{c^2+1}=-2+\dfrac{1}{c^2+1}$ ；

當 $c^2=0$ 時，上式有最大值 -1 。

2003/2004

(a)求在 $(1-\dfrac{3}{2}x-x^2)^5$ 的展開式中 x^4 的係數。 (5 分)

(b)設 n 爲正整數及對於 $0\le r\le n$，C_n^r 爲在 $(1+x)^n$ 的展開式中 x^r 的係數。

1.證明在 $[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}$ 的展開式中，對於 $0\le k\le n$，x^k 的係數爲 $(k+1)C_n^k$。 (5 分)

2.考慮在 $[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}(1+x)^n$ 的展開式中 x^n 的係數，證明 $(C_n^0)^2+2(C_n^1)^2+\cdots\cdots+(n+1)(C_n^n)^2=(n+2)C_{2n-1}^n$。 (6 分)

解：

(a) $(1-\frac{3}{2}x-x^2)^5=[1+(-\frac{3}{2}x-x^2)]^5$

$$=\cdots+C_5^2(-\frac{3}{2}x-x^2)^2+C_5^3(-\frac{3}{2}x-x^2)^3+C_5^4(-\frac{3}{2}x-x^2)^4+\cdots$$

展開式中 x^4 的係數爲：$C_5^2\cdot(-1)^2+C_5^3\cdot C_3^2(-\frac{3}{2})^2(-1)+C_5^4\cdot(-\frac{3}{2})^4=-\frac{515}{16}$。

教學備忘

二項展开式	$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$

(b) 1.在 $[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}$ 的展開式中，x^k 的係數爲 $C_{n-1}^k+(n+1)C_{n-1}^{k-1}$；

$$\begin{aligned}C_{n-1}^k+(n+1)C_{n-1}^{k-1}&=\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+(n+1)\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\&=\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}[(n-k)+(n+1)k]\\&=\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\cdot n(k+1)\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot(k+1)\\&=(k+1)C_n^k\end{aligned}$$

公式小結

公　式	$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ $C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\quad(n,m\in\mathbf{N}^*,m\le n)$

2. $[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}\cdot(1+x)^n$

$$=[1C_n^0+2C_n^1x+3C_n^2x^2+\cdots+(k+1)C_n^kx^k+\cdots+(n+1)C_n^nx^n]\cdot(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)$$

展開式中 x^n 的係數爲：

$$C_n^0C_n^n+2C_n^1C_n^{n-1}+3C_n^2C_n^{n-2}+\cdots+(n+1)C_n^nC_n^0$$

$$=(C_n^0)^2+2(C_n^1)^2+3(C_n^2)^2+\cdots+(n+1)(C_n^n)^2 \quad \cdot\cdot\cdot(1)$$

教學備忘

组合数的性质	$C_n^m=C_n^{n-m}, C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$	特例	$C_n^0=1$

$$[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}(1+x)^n$$
$$=[1+(n+1)x]\cdot(1+x)^{2n-1}$$

$$=[1+(n+1)x]\cdot(C_{2n-1}^0+C_{2n-1}^1x+C_{2n-1}^2x^2+\cdots+C_{2n-1}^{n-1}x^{n-1}+C_{2n-1}^nx^n+\cdots+C_{2n-1}^{2n-1}x^{2n-1})$$

展開式中 x^n 的係數爲：

$$C_{2n-1}^n+(n+1)C_{2n-1}^{n-1}=\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}+(n+1)\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$$

$$=(n+2)\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$$

$$=(n+2)C_{2n-1}^n \quad \cdot\cdot\cdot(2)$$

根據(1)和(2)，得：$(C_n^0)^2+2(C_n^1)^2+\cdots\cdots+(n+1)(C_n^n)^2=(n+2)C_{2n-1}^n$ 。

2004/2005

(a)設 a＝$\log_{10}2$ 及 b＝$\log_{10}3$ 。以 a 及 b 表 $\log_{10}5\sqrt{6}$ 。 (3 分)

(b)解方程 $\log_5(1-4\cdot5^x)=2x+1$ 。 (5 分)

解：

(a) $\log_{10}5\sqrt{6}=\log_{10}5+\frac{1}{2}\log_{10}6$

$$=(\log_{10}10-\log_{10}2)+\frac{1}{2}(\log_{10}2+\log_{10}3)$$

$$=(1-a)+\frac{1}{2}(a+b)$$

$$=1-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

教學備忘

对数	$a^b=N \Leftrightarrow \log_a N=b$ $(a>0, a\neq 1, N>0)$，其中 a 为对数的底数，N 为真数；以 10 为底的对数（常用对数）记作 $\lg N$，以 e 为底的对数（自然对数）记作 $\ln N$ 特别：(1) 负数和零没有对数；(2) 1 的对数为零；(3) 底的对数为 1		
举例	解题步骤 \ 例题	将 $5^4=625$ 写成对数式	将 $\log_2 128=7$ 写成指数式
	(1) 明确底数等三数	$a=5, b=4, N=625$	$a=2, b=7, N=128$
	(2) 写出相应表达式	$\log_5 625=4$	$2^7=128$

公式小結

运算性质	① $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；② $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$； ③ $\log_a M^n=n\log_a M$ $(n\in \mathbf{R})$

(b)原方程即 $5^{2x+1}=1-4\cdot 5^x$

$5\cdot(5^x)^2+4\cdot 5^x-1=0$

$(5\cdot 5^x-1)(5^x+1)=0$

$5\cdot 5^x-1=0$ 或 $5^x+1=0$ (不合)

$5^x=\frac{1}{5}$

$\therefore x=-1$

經驗算，原方程的解爲 $x=-1$。

2005/2006

已知關於 x 的方程 $[\log_{10}(ax)][\log_{10}(ax^2)]=4$ 有解，且所有解都大於 1。求 a 的取值範圍。

[提示：設 $u=\log x$，把上述方程改寫成以 u 爲未知量的二次方程。] (8 分)

解：

設 $u=\log_{10}x$

原方程可寫成 $(\log_{10}a+u)(\log_{10}a+2u)=4$

化簡，得： $2u^2+3\log_{10}a\cdot u+(\log_{10}^2 a-4)=0$

由△＞0，得 $(3\log_{10}a)^2-4(2)(\log_{10}^2 a-4)>0$

教學備忘

即 $\log_{10}^2 a+32>0$

$\therefore a>0$ 。

解析式	$y=\log_a x\ (a>1)$	$y=\log_a x\ (0<a<1)$
图　像		
性　质	(1)定义域：$(0,+\infty)$；(2)值域：**R**；(3)过点$(1,0)$，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	(4)当 $a>1$ 时，在$(0,+\infty)$上是增函数	(4)当 $0<a<1$ 时，在$(0,+\infty)$上是减函数
	(5)在 $a>1$ 时，$x>1\Leftrightarrow\log_a x>0$，$0<x<1\Leftrightarrow\log_a x<0$	(5)在 $0<a<1$ 时，$0<x<1\Leftrightarrow\log_a x>0$，$x>1\Leftrightarrow\log_a x<0$
	(6)指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 与对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$ 互为反函数	

又原方程所有解都大於 1，所以 $u>0$ 。

在關於 u 的方程 $2u^2+3\log_{10}a\cdot u+(\log_{10}^2 a-4)=0$ 中，得：

$$\begin{cases}-\dfrac{3\log_{10}a}{2}>0\\ \dfrac{\log_{10}^2 a-4}{2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{10}a<0\\ \log_{10}a<-2\text{或}\log_{10}a>2\end{cases}\Rightarrow\log_{10}a<-2\Rightarrow a<\frac{1}{100}\text{ 。}$$

綜上所述，所求 a 的取值範圍爲 $0<a<\dfrac{1}{100}$ 。

2005/2006

設 $f(x)$ 爲多項式，其次數 $n\geq2$ 。證明 $(x-a)^2$ 可整除 $f(x)$，當且僅當 $f(a)=0$ 及 $f'(a)=0$。 (6 分)

解：

必要性證明：「$(x-a)^2$ 可整除 $f(x)\Rightarrow f(a)=0$ 及 $f'(a)=0$」

設 $f(x)=(x-a)^2g(x)$ ，則 $f(a)=(a-a)^2g(a)=0$ 。

又 $f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)=(x-a)[2g(x)+(x-a)g'(x)]$ ；

$\therefore f'(a)=(a-a)[2g(a)+(a-a)g'(a)]=0$ ，證明成立。

充分性證明：「$f(a)=0$ 及 $f'(a)=0\Rightarrow(x-a)^2$ 可整除 $f(x)$」

設 $f(x)=(x-a)h(x)$ ，則 $f'(x)=h(x)+(x-a)h'(x)$ ；

$\because f'(a)=h(a)+(a-a)h'(a)=0$ ，$\therefore h(a)=0$ 。

又設 $h(x)=(x-a)p(x)$ ，則 $f(x)=(x-a)h(x)=(x-a)^2p(x)$ ，證明成立。

2006/2007

若 $f(x)=x^3+ax^2+x+b$ 被 x^2+x-2 除時，其餘式爲 $7x-3$。求 a 和 b 的值。(6 分)

解：

設 $x^3+ax^2+x+b=(x^2+x-2)(x+m)+7x-3$

$$=x^3+(m+1)x^2+(m+5)x+(-2m-3)$$

比較等式兩邊各項係數，得：$\begin{cases} a=m+1 \\ 1=m+5 \\ b=-2m-3 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} m=-4 \\ a=-3 \\ b=5 \end{cases}$。

2006/2007

已知在 $(1+2x-10x^2)(1+x)^{10}$ 的展開式中，x^k 的係數爲 0，求 k 的值。 (7 分)

解：$(1+2x-10x^2)(1+x)^{10}$

$$=(1+2x-10x^2)(\cdots+C_{10}^{k-2}x^{k-2}+C_{10}^{k-1}x^{k-1}+C_{10}^{k}x^{k}+\cdots)$$

公式小結

通项公式	$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r$

展開式中 x^k 的係數爲：$1\cdot C_{10}^{k}+2\cdot C_{10}^{k-1}-10\cdot C_{10}^{k-2}$

由題意，得：$1\cdot C_{10}^{k}+2\cdot C_{10}^{k-1}-10\cdot C_{10}^{k-2}=0$

$$\frac{10!}{k!(10-k)!}+2\cdot\frac{10!}{(k-1)!(11-k)!}-10\cdot\frac{10!}{(k-2)!(12-k)!}=0$$

$$\frac{1}{k(k-1)}+2\frac{1}{(k-1)(11-k)}-10\cdot\frac{1}{(12-k)(11-k)}=0$$

$$\frac{(11-k)+2k}{k(k-1)(11-k)}=\frac{10}{(12-k)(11-k)}$$

$$\frac{11+k}{k(k-1)}=\frac{10}{12-k}$$

即 $k^2-k-12=0$

$k=4$ 或 $k=-3$(不合)

2008/2009

若 x^3+ax^2+x+b 能被 x^2-x-2 整除，求 a 和 b。 (5 分)

解：

設 $x^3+ax^2+x+b=(x^2-x-2)(mx+n)$

$x=-1$ 代入上式，並化簡：$-2+a+b=0$

$x=2$ 代入上式，並化簡：$10+4a+b=0$

解得：$a=-4$，$b=6$。

2008/2009

設 $u=\log_x 2$，其中 $x>0$ 及 $x\neq 1$。以 u 表 $\log_{2x} x+\log_{4x} x$。 (2 分)

解：

$$\log_{2x} x+\log_{4x} x=\frac{\log_x x}{\log_x 2x}+\frac{\log_x x}{\log_x 4x}=\frac{1}{1+\log_x 2}+\frac{1}{1+2\log_x 2}=\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1+2u}$$ 。

公式小結

对数换底公式	$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$（其中 $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1, N>0$）

2008/2009

在 $(1+px+\frac{x^2}{p})(1-x)^4$ 的展開式中，x、x^2 及 x^3 的係數按序爲一等差數列的連續三項。求 p 的值。 (7 分)

解：

$$(1+px+\frac{x^2}{p})(1-x)^4=(1+px+\frac{x^2}{p})(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)$$

$$=1+(-4+p)x+(6-4p+\frac{1}{p})x^2+(-4+6p-\frac{4}{p})x^3+\cdots$$

由題意，得：$2\cdot(6-4p+\frac{1}{p})=(-4+p)+(-4+6p-\frac{4}{p})$

化簡，即：$15p^2-20p-6=0$

$\therefore\ p=\frac{10\pm\sqrt{190}}{15}$ 。

2009/2010

解方程 $3\log_{10}x-\sqrt{3\log_{10}x-2}-4=0$。 (6 分)

解：

原方程即 $3\log_{10}x-4=\sqrt{3\log_{10}x-2}\Rightarrow\begin{cases}3\log_{10}x-2\geq 0\cdots(1)\\ 3\log_{10}-4\geq 0\cdots(2)\\ (3\log_{10}x-4)^2=3\log_{10}x-2\cdots(3)\end{cases}$

由(1)：$\log_{10}x\geq\frac{2}{3}$，$\therefore x\geq 10^{\frac{2}{3}}$。

由(2)：$\log_{10}x\geq\frac{4}{3}$，$\therefore x\geq 10^{\frac{4}{3}}$。

由(3)：$\log_{10}^2 x-3\log_{10}x+2=0$

$(\log_{10}x-1)(\log_{10}x-2)=0$

$\therefore x=10$ 或 $x=100$

綜上所述，原方程的解爲 $x=100$。

2009/2010

設 α 和 β 爲方程 $x^2+3kx+(2k^2+k-2)=0$ 的根，其中 k 爲常數。

(a)證明 α 和 β 爲不相同的實數。 (2 分)

(b)以 k 表 $(\alpha-2)(\beta-2)$。 (3 分)

(c)設 $\beta<2<\alpha$，求 k 的取值範圍。 (3 分)

解：

(a) $\because\triangle=(3k)^2-4(2k^2+k-2)=k^2-4k+8=(k-2)^2+4>0$

$\therefore$ 方程有兩個不同的根；α 和 β 爲不相同的實數。

(b)由根和係數關係：$\alpha+\beta=-3k$，$\alpha\beta=2k^2+k-2$；

$\therefore(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=(2k^2+k-2)-2(-3k)+4=2k^2+7k+2$。

(c) $\because\beta<2<\alpha$

$\therefore\beta-2<0<\alpha-2$，即 $(\alpha-2)(\beta-2)<0$

利用(b)的結論，得：$2k^2+7k+2<0$

$\therefore\frac{-7-\sqrt{33}}{4}<k<\frac{-7+\sqrt{33}}{4}$。

2009/2010

設 n 爲正整數。若在 $(1+x)^n$ 的展開式中，x^4、x^5 及 x^6 的係數按序爲一等差數列中的連續三項，求 n 的值。 (7 分)

解：

由題意：C_n^4、C_n^5、C_n^6 成等差數列；

$$\therefore 2\cdot C_n^5 = C_n^4 + C_n^6$$

$$2\cdot\frac{n!}{5!(n-5)!}=\frac{n!}{4!(n-4)!}+\frac{n!}{6!(n-6)!}$$

即 $\dfrac{2}{5(n-5)}=\dfrac{1}{(n-4)(n-5)}+\dfrac{1}{30}$

化簡，得：$n^2-21n+98=0$

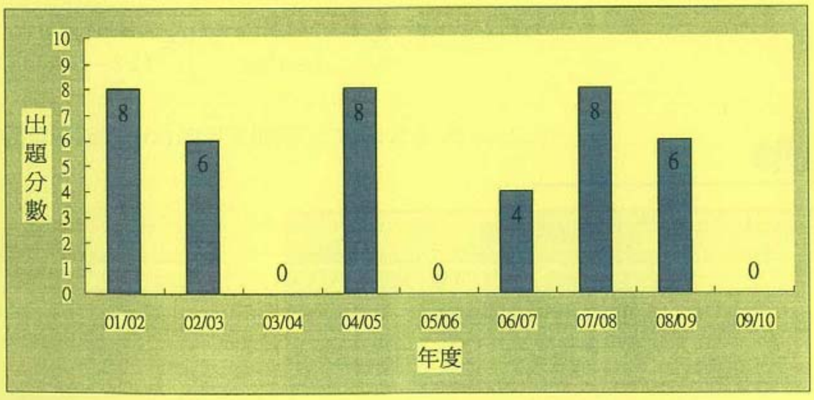
$\therefore n=7$ 或 $n=14$ 。

3 函數

考試大綱

映射、函數、定義域及值域。
圖。
線性及二次函數、指數函數、有理函數、對數函數。
反函數。

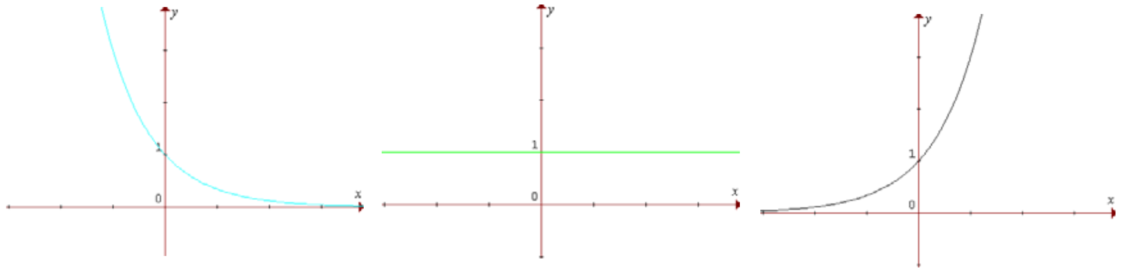
命題趨勢



2001/2002

2(b)設 $a>0$ ，當 a 在不同的範圍時，繪出 $y=a^x$ 的圖像。 (4 分)

解：



$(0<a<1)$　　　$(a=1)$　　　$(a>1)$

2001/2002

3(b)問 $y=\log_{10}(x^2-9)$ 中 x 應在哪範圍內 y 才有意義？ (4 分)

解：

要使 y 有意義，則必須 $x^2-9>0$ ；解得 $x>3$ 或 $x<-3$ 。

教學備忘

$y=f(x)$，其中 $x\in$ 非空数集（定义域）A，$y\in$ 非空数集 B（像的集合（值域）C 满足 $C\subseteq B$）

2002/2003

1)求函數 $f(x)=\ln(x^2-5)+\arcsin(2x-5)$ 的定義域。 (6 分)

解：

$$\begin{cases} x^2-5>0 \\ -1\le 2x-5\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\sqrt{5} \text{或} x<-\sqrt{5} \\ 2\le x\le 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{5}<x\le 3 \text{ 。}$$

所以，函數 $f(x)$ 的定義域爲 $\{x : x\in R$ 且 $\sqrt{5}<x\le 3\}$ 。

典型例题

例题 / 解题步骤	求函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{2-x}$ 的定义域
(1)列不等式(组)	$x+1\geqslant 0$ 且 $2-x\neq 0$
(2)解不等式(组)	$x\geqslant -1$ 且 $x\neq 2$
(3)求出函数定义域	函数定义域是：$\{x\mid x\geqslant -1\}\cap\{x\mid x\neq 2\}=[-1,2)\cup(2,+\infty)$

2004/2005

2)設 a 爲正數及 $f(x)=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$ 爲偶函數（即 $f(-x)=f(x)$ ）。

(a)求數 a 。 (4 分)

(b)證明 $f(x)$ 在$\{x：x>0\}$上是增函數。 (4 分)

解：

(a)由 $f(-x)=f(x)$ ，得 $\frac{e^{-x}}{a}+\frac{a}{e^{-x}}=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$

即 $\frac{1}{ae^x}+ae^x=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$

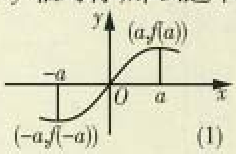
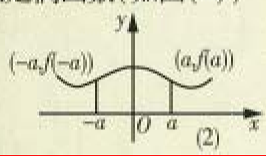
$e^x(a-\frac{1}{a})-\frac{1}{e^x}(a-\frac{1}{a})=0$

$(a-\frac{1}{a})(e^x-\frac{1}{e^x})=0$

當 $x\neq 0$ ，即 $e^x-\frac{1}{e^x}\neq 0$ 時， $a-\frac{1}{a}=0$ ；

$\therefore a=\pm 1$ (負號舍去)

教學備忘

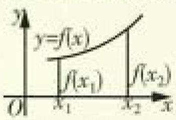
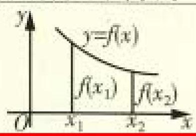
	偶函数	奇函数
定义	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 叫做偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 叫做奇函数
	如果函数 $f(x)$ 是奇函数或偶函数，那么我们就说函数 $f(x)$ 具有奇偶性	
分类	函数的奇偶性分为四类：奇函数而非偶函数；偶函数而非奇函数；既是奇函数又是偶函数；既非奇函数又非偶函数	
图像特征	奇函数的图像关于原点对称，反过来，如果一个函数的图像关于原点对称，那么这个函数是奇函数(如图(1))；偶函数的图像关于 y 轴对称，反过来，如果一个函数的图像关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数(如图(2))  	

(b) $f'(x) = e^{x} - e^{-x}$

當 $x > 0$ 時，總有 $e^{x} - e^{-x} = e^{x} - \dfrac{1}{e^{x}} > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $\{x : x > 0\}$ 上是增函數。

教學備忘

	增函数	减函数
定义	如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数	如果对于属于定义域 I 内某个区间的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数
	如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性，这一区间叫做 $y=f(x)$ 的单调区间；在单调区间上增函数的图像是上升的，减函数的图像是下降的	
图示		

2006/2007

2)求函數 $f(x) = \log_a \dfrac{2+x}{2-x}$，其中 $a > 1$。

(1)求 $f(x)$ 的定義域，並判別 $f(x)$ 的奇偶性。 (4 分)

解：

$\dfrac{2+x}{2-x} > 0 \Rightarrow (2+x)(2-x) > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$

所以，函數 $f(x)$ 的定義域爲 $\{x : x \in R$ 且 $-2 < x < 2\}$。

$f(-x) = \log_a \dfrac{2-x}{2+x} = \log_a \left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{-1} = -\log_a \dfrac{2+x}{2-x} = -f(x)$

又 $f(x)$ 的定義域關於原點對稱，所以 $f(x)$ 爲奇函數。

教學備忘

判定函数的奇偶性，常分为三步：
(1)判定函数的定义域对应的点集是否关于原点对称；
(2)判定等量关系 $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$)是否关于定义域内任意一个 x 恒成立；
(3)鉴定函数的奇偶性

2007/2008

2)設 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$。

(a)求 $f(x)$ 的定義域及值域。 (4 分)

(b)求 $f(x)$ 的反函數 $f^{-1}(x)$。 (4 分)

解：

教學備忘

函数 $y=f(x)(x\in A)$，设它的值域为 C. 从 $y=f(x)$ 中用 y 表示 x 得到 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过 $x=\varphi(y)$，x 在 A 中有惟一值与它对应，那么 $x=\varphi(y)$ 就表示 y 是自变量，x 是自变量 y 的函数，这样的函数 $x=\varphi(y)$ 叫函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，y 是自变量，$y\in C$. 习惯上，x,y 对调，把 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in C$

(a) $\because e^{2x}+1>1\neq 0$

$\therefore f(x)$ 的定義域爲 $x\in R$。

令 $y=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$，則 $e^{2x}y+y=e^{2x}-1$

即 $(y-1)e^{2x}=-(1+y)$

$\because y\neq 1$

$\therefore e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$

教學備忘

函数 $y=f(x)$ 的定义域是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域；函数 $y=f(x)$ 的值域，是其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域，即：

	函数 $y=f(x)$	反函数 $y=f^{-1}(x)$
定义域	A	C
值　域	C	A

又 $e^{2x}>0$，得 $\dfrac{1+y}{1-y}>0$

即 $(1+y)(1-y)>0$

$\therefore -1<y<1$

所以，函數 $f(x)$ 的值域爲 $\{y\ :\ y\in R$ 且 $-1<y<1\}$。

(b)由(a)知，$e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}\ (-1<y<1)$

等式兩邊取 e 爲底的對數：$2x=\ln\dfrac{1+y}{1-y}$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}\ (-1<y<1)$

上式中 x 與 y 對調：$y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$

所以，$f(x)$ 的反函數 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$。

典型例題

解题步骤＼例　题	求函数 $f(x)=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$ 的反函数
(1)逆解 x	由 $y=\sqrt{x}+1\ (x\geqslant 0)$，解得 $x=(y-1)^2$
(2)交换 x 和 y	$\therefore y=(x-1)^2$
(3)确定 $f^{-1}(x)$	$\because y=\sqrt{x}+1\geqslant 1$，故 $f^{-1}(x)=(x-1)^2(x\geqslant 1)$

2008/2009

2)(b)設 $f(x)=\ln(\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x)$。

(1)求函數 $f(x)$ 的定義域及值域。 (4 分)

(2)求 x 使得 $f(x)=0$。 (2 分)

解：

(1) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x>0 \Rightarrow 2(\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\dfrac{\pi}{6})>0 \Rightarrow 2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})>0$

$\therefore k\pi-\dfrac{\pi}{12}<x<k\pi+\dfrac{5\pi}{12}(k\in Z)$。

所以，函數 $f(x)$ 的定義域爲 $\{x:\ x\in R$ 且 $k\pi-\dfrac{\pi}{12}<x<k\pi+\dfrac{5\pi}{12}(k\in Z)\}$。

$f(x)=\ln(\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x)=\ln[2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})]$

$\because 0<2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})\le 2$

$\therefore f(x)\le \ln 2$

所以，函數 $f(x)$ 的值域爲 $\{y:\ y\in R$ 且 $y\le \ln 2\}$。

(2)由 $f(x)=0$，得 $\ln[2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})]=0$

即 $2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})=e^0=1$

$\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6},k\in Z$

$x=\dfrac{k\pi}{2}+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12},k\in Z$

又 $k\pi-\dfrac{\pi}{12}<x<k\pi+\dfrac{5\pi}{12}(k\in Z)$

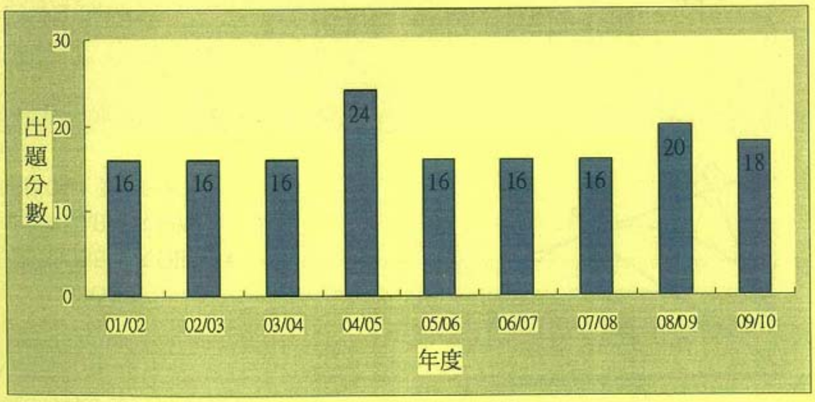
所以，原方程的解爲 $x=\dfrac{k\pi}{2}+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12},k\in Z$。

4 平面及立體幾何

考試大綱

直線、角、三角形、多邊形及圓形的性質及定理。
簡易立體圖形，包括長方體、角柱、圓柱、角錐、直立圓錐、球體。

命題趨勢



2001/2002

在圖一中，PQ 是圓 C_1 及 C_2 於 D 的公切線，切圓 C_1 於 A 的切線與圓 C_2 交於 B 和 C。直線 CD 與圓 C_1 的另一交點為 E。設∠DAB＝x 及∠DCB＝y。

(1)證明∠ADB＝x＋y。

(2)證明△EDA 與△ADB 相似。

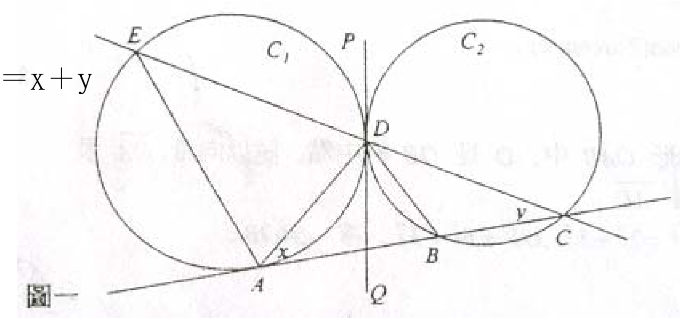
(3)若 EA＝ED，求 x 與 y 的關係。 (16 分)

解：

(1)∵∠ADQ＝∠DAB＝x

∠BDQ＝∠DCB＝y

∴∠ADB＝∠ADQ＋∠BDQ＝x＋y



(2)∵∠AED＝∠DAB

∠EDA＝x＋y＝∠ADB

∴△EDA~△ADB

(3)在△EDA 中，∠D＝∠A 且∠E＋∠D＋∠A＝180^0

∴x＋2(x＋y)＝180^0

∴3x＋2y＝180^0

2002/2003

在圖一，APB 是以 O 為圓心的半圓，半徑為 1，PQ 是半圓上點 P 的切線，且∠PQB 是一直角。QB 與半圓交於 R。設∠ABP＝x。

(1)證明∠PBQ＝x。

(2)證明 QR＝2 $\sin^2 x$。

若 QR＝RB，

(3)證明 $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，及

(4)求梯形 PQRO 的面積。 (16 分)

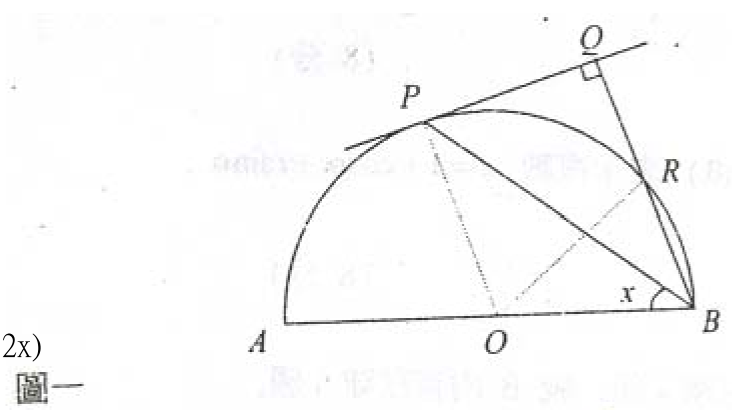
解：

(1)連 OP，則 OP // BQ

∴∠OPB＝∠PBQ

又∠OPB＝∠OBP＝x

∴∠PBQ＝x



(2)QR＝QB－RB

＝PB cos x－2(OB cos 2x)

$=2\ (OB\cos x)\cos x-2(OB\cos 2x)$

$=2\cos^2 x-2\cos 2x$

$=2\cos^2 x-2\ (2\cos^2 x-1)$

$=-2\cos^2 x+2$

$=2(1-\cos^2 x)$

$=2\sin^2 x$

(3)由(2)結論知，$QR=2\sin^2 x$ 及 $RB=2\cos 2x$

$\therefore 2\sin^2 x=2\cos 2x$

即 $\sin^2 x=1-2\sin^2 x$

$\sin^2 x=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (負號舍去)

(4)由(2)、(3)結論知，$QR=2\sin^2 x=\dfrac{2}{3}$

$PQ=PB\sin\angle PBQ=(\ 2\ OB\cos x)\sin x=2\cos x\sin x=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

所以，梯形 PQRO 的面積$=\dfrac{1}{2}PQ(QR+PO)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot(\dfrac{2}{3}+1)$

$=\dfrac{5\sqrt{2}}{9}$

2003/2004

在圖 1，△ABD 及△BCE 是等邊三角形，AE 和 CD 交於 F。

(a)證明 A，D，B 及 F 共圓。

[提示：先證明△ABE 和△DBC 是全等三角形。] (3 分)

(b)設 AB=1，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$。從 D 及 F 到直線 AC 的垂線分別與直線 AC 交於 X 及 Y。設 $\angle ACD=\alpha$。

(1)以 α 表 $\angle EAC$。

[提示：利用(a)，求 $\angle AFD$ 。] (3 分)

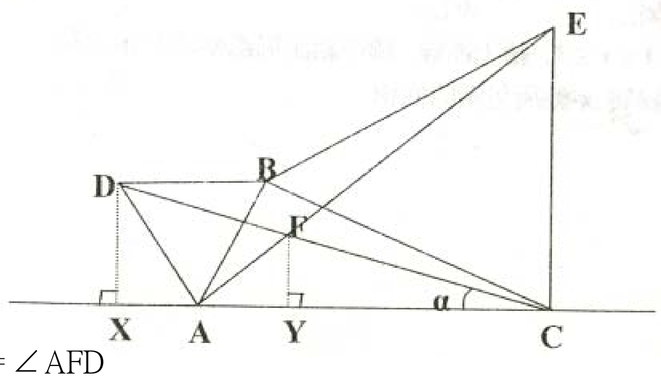
(2)證明 $\dfrac{FY}{\tan\alpha}+\dfrac{FY}{\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)}=2$。 (3 分)

(3)考慮△CDX，證明 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$。 (3 分)

(4)求 FY，且答案以根式表示。 (4 分)

解：

圖 I



(a)∵∠CBE＝∠DBA

∴∠ABE＝∠DBC

又 AB＝DB，BE＝BC

∴△ABE≅△DBC

∴∠BAF＝∠BDF

所以 A，D，B 及 F 共圓。

(b)(1)在△AFC 中，∠FAC＋α＝∠AFD

∴∠EAC＝∠FAC＝∠AFD－α＝∠DBA－α＝$60^0-\alpha$。

(2) $\dfrac{FY}{\tan\alpha}+\dfrac{FY}{\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)}=YC+\dfrac{FY}{\tan\angle EAC}=YC+AY=AC=\dfrac{BA}{\cos 60^0}=2$，證明成立。

(3)在△ADX 中，DX＝1 · $\sin 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；XA＝1 · $\cos 60^0=\dfrac{1}{2}$

∴$\tan\alpha=\dfrac{DX}{XC}=\dfrac{DX}{XA+AC}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+2}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$。

(4)∵ $\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{5}}{1+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

由(b)(2)結論知，$\dfrac{FY}{\tan\alpha}+\dfrac{FY}{\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)}=2$

$$\therefore FY=\frac{2}{\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)}}=\frac{2}{\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$$ 。

2004/2005

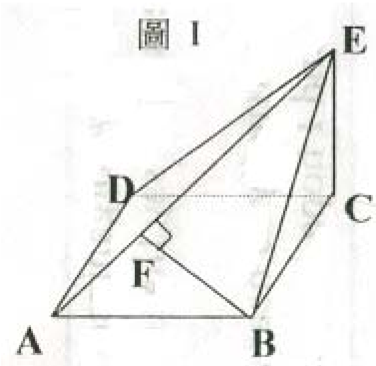
在圖 1，E－ABCD 是一四棱錐，其底 ABCD 是一正方形，AB＝1，EC 垂直於底面 ABCD，且 EC＝1。設 F 是 AE 上一點且 BF 垂直於 AE。

(1)求△ABE 的面積。 (3 分)

(2)求 BF。 (2 分)

(3)求二面角 D—AE—B。 (3 分)

解：



(1) $S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(2) $BF=AB\cdot\sin\angle BAF=AB\cdot\frac{BE}{AE}=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

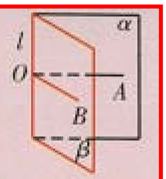
(3)連 DF，則 $\angle DFB$ 爲所求二面角。

$\because DF=FB=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $DB=\sqrt{2}$

$$\therefore \cos\angle DFB=\frac{DF^2+FB^2-DB^2}{2DF\cdot FB}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-2}{2\cdot\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore \angle DFB=120^0$ 。

教學備忘

定义	平面内的一条直线把平面分为两部分，其中的每一部分都叫做半平面．从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这条直线叫做二面角的棱，每个半平面叫做二面角的面．棱为 l，两个面分别为 α,β 的二面角记为 $\alpha-l-\beta$．一个面平垂直于二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l，且与两个半平面的交线分别是射线 OA,OB,O 为垂足，则 $\angle AOB$ 叫做二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角．平面角是直角的二面角叫做直二面角，相交成直二面角的两个平面，叫做互相垂直的平面 
范围	二面角的取值范围是[0,π]

2004/2005

在圖 2 中，AC 是一直線。直線 DE 分別與半圓 ADB 及 BEC 相切於點 D 及 E。直線 AD 及 CE 交於 F。設$\angle DAB=x$及$\angle ECB=y$。

(a)(1)證明$\angle DBE=\pi-x-y$。 (2 分)

(2)證明 BDFE 是一長方形。 (4 分)

(3)證明$FB\perp AC$。 (3 分)

(b)設$AB=2$及$BC=1$。

(1)證明$\triangle CEB$，$\triangle CFA$及$\triangle BEF$是三個相似三角形。 (3 分)

(2)求 CE。 (4 分)

解：

(a)(1)$\angle BDE+\angle DEB+\angle DBE=180^0=\pi$

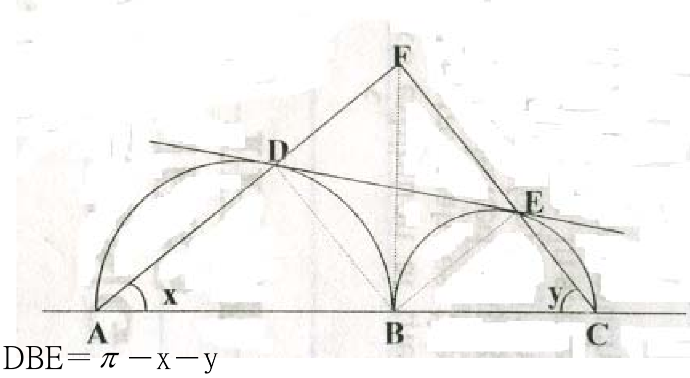
$\because\angle BDE=\angle DAB=x$，

$\angle DEB=\angle BCE=y$

$\therefore x+y+\angle DBE=\pi$

即$\angle DBE=\pi-x-y$。

圖 II



(2)在四邊形 DBEF 中，

$\angle BDF=\angle BEF=90^0$

$\therefore\angle DFE+\angle DBE=180^0$

又$\angle DFE=\pi-x-y$及$\angle DBE=\pi-x-y$

$\therefore(\pi-x-y)+(\pi-x-y)=180^0$

$\therefore x+y=90^0$

即$\angle DFE=\angle DBE=90^0$

所以，BDFE 是一長方形。

(3)$\because\angle BFE=\angle BDE=x$

$\therefore\angle BFC+\angle BCF=x+y=90^0$

$\angle FBC=180^0-(\angle BFC+\angle BCF)=180^0-90^0=90^0$

$\therefore FB\perp AC$。

(b)(1)$\because\angle CEB=\angle CFA=90^0$，$\angle BCE=\angle ACF$

$\therefore\triangle CEB\sim\triangle CFA$

$\because\angle CEB=\angle BEF=90^0$，$\angle BCE=\angle EBF$

$\therefore\triangle CEB\sim\triangle BEF$

所以，$\triangle CEB$，$\triangle CFA$及$\triangle BEF$是三個相似三角形。

(2)令 CE＝m(m＞0)，則 EF＝2m

∵△CEB~△BEF

$$\therefore \frac{EC}{BC}=\frac{BE}{FB}$$

$$\frac{m}{1}=\frac{\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{9m^2-1}}$$

化簡，得：$9m^4=1$

∵m＞0，∴m＝$\frac{\sqrt{3}}{3}$。

2005/2006

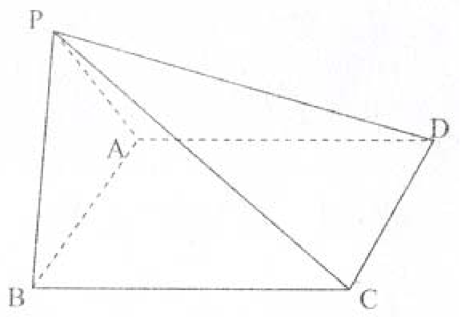
如圖，四棱錐 P－ABCD 的底面 ABCD 是矩形，且 AB＝2，BC＝$\sqrt{2}$。側面 PAB 是等邊三角形，且側面 PAB 與底面 ABCD 垂直。

(1)證明側面 PBC 與側面 PAB 垂直。 (4 分)

(2)求側棱 PC 與底面 ABCD 所成角的大小。 (6 分)

(3)設平面 PAB 與平面 PCD 所成的二面角是α，求 sinα。 (6 分)

解：



(1)取 AB 中點 O，連 PO，則 PO⊥AB 且 PO⊥底面 ABCD

∴PO⊥BC

又 BC⊥AB

∴BC⊥側面 PAB

∵BC⊂側面 PBC

∴側面 PBC⊥側面 PAB

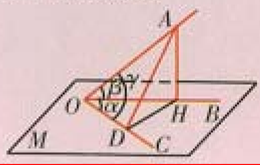
教學備忘

	判　定	性　质
平面和平面垂直	如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直	如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面

(2)連 OC，則∠PCO 爲側棱 PC 與底面 ABCD 所成角；

$$\angle PCO=\tan^{-1}\frac{PO}{OC}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\tan^{-1}1=45^0$$

教學備忘

平面的斜线与平面所成的角	定义	平面的斜线和它在平面内的射影所成的角，是这条直线和这个平面内任一条直线所成的角中最小的角，这个角叫做直线与平面所成的角. 如果直线和平面垂直，则称直线和平面所成的角是直角；如果直线和平面平行或在平面内，则称直线和平面所成的角是 0°的角
	几个角的关系 	OB 是 OA 在平面 M 内的射影，OC 为 M 内一条直线，$AH\perp$ 平面 M，若 OA 与平面 M 所成角为 β，$\angle BOC=\alpha$，$\angle AOC=\gamma$，则 $\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma$

(3)取 CD 中點 Q，連 PQ，則∠OPQ 爲所求二面角α；

$$\sin\alpha=\frac{OQ}{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

2006/2007

如圖，ABCD－EFGH 爲一正立方體，其邊長爲 1。設點 M 在 BH 上，且 GM⊥BH，點 N 在 CH 上，且 NM⊥BH。

(1)考慮△BGH 的面積，求 MG 的長。 (3 分)

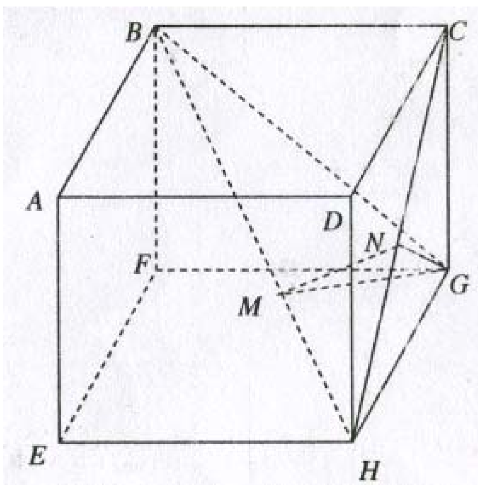
(2)求 MH 的長。 (2 分)

(3)證明△BCH 與△NMH 相似，並求 MN 及 NH 的長。 (5 分)

(4)求 NG 的長。 (3 分)

(5)求二面角 C—BH—G。 (3 分)

解：



(1)由 $S_{\Delta BGH}=\frac{1}{2}HG\cdot BG=\frac{1}{2}BH\cdot MG$

得 $1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3}\cdot MG$

$\therefore MG=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$。

(2) $MH=\sqrt{HG^2-MG^2}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

(3)∵∠BHC＝∠MHN，∠BCH＝∠NMH＝90^0

∴△BCH~△NMH

由 $\dfrac{BC}{HC}=\dfrac{MN}{MH}$，得 $MN=\dfrac{BC\cdot MH}{HC}=\dfrac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$\therefore NH=\sqrt{MH^2+MN^2}=\sqrt{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

(4)在 Rt△CGH 中，$HC=\sqrt{2}$，$NH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

∴N 是 CH 的中點，且 NG＝NH＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

(5)$\angle NMG$ 爲所求二面角；

$$\cos\angle NMG=\frac{MN^2+MG^2-NG^2}{2MN\cdot MG}=\frac{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \angle NMG=60^0$

2007/2008

如圖，正方形 ABCD 和正方形 ABEF 的邊長均爲 1，且正方形 ABCD 垂直於正方形 ABEF。設點 P 和點 Q 分別爲線段 AC 和 BF 上的動點，且 CP＝BQ＝x，0＜x＜$\sqrt{2}$。

(a)設 O 爲點 P 在 AB 上的垂足。

(1)證明∠POQ 是一直角。 (2 分)

(2)求 PQ 的長(答案以 x 表示)。 (7 分)

(b)設 x＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 P 和 Q 分別爲 AC 和 BF 的中點。求面 APQ 與面 BPQ 所成的二面角。【提示：設 R 爲 PQ 的中點，連 AR 和 BR。】 (7 分)

解：

(a)(1)∵面 ABCD⊥面 ABEF，PO⊥AB

∴PO⊥面 ABEF

∴PO⊥OQ。

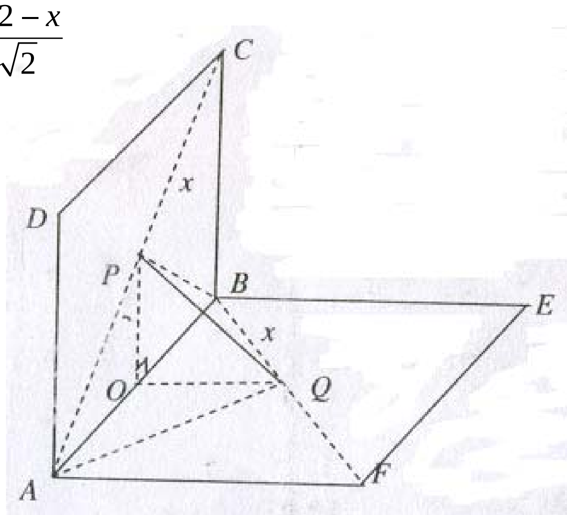
(2)△POA 中，$PO=(\sqrt{2}-x)\sin 45^0=\dfrac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$

△QOB 中，$OQ=x\sin 45^0=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

△POQ 中，$PQ=\sqrt{PO^2+OQ^2}$

$$=\sqrt{\frac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{2}+\frac{x^2}{2}}$$

$$=\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1}$$



(b)當 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 時，P、Q 分別爲 AC、BF 的中點；AP＝AQ＝BP＝BQ＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

取 PQ 的中點 R，連 RA、RB，則∠ARB 爲面 APQ 與面 BPQ 所成的二面角。

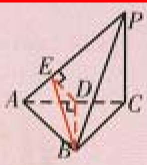
$$PQ=\sqrt{x^2-\sqrt{2}x+1}=\sqrt{\frac{1}{2}-1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore AR=\sqrt{AP^2-PR^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

在△ARB 中，$\cos\angle ARB=\dfrac{AR^2+BR^2-AB^2}{2AR\cdot BR}=\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{3}{8}-1}{2\cdot\frac{3}{8}}=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore \angle ARB=\cos^{-1}(-\dfrac{1}{3})$ 。

典型例題

例　题 / 解题步骤	
例　题	如图，$PC\perp$ 平面 ABC，$AB=BC=CA=PC$，求二面角 $B-PA-C$ 的平面角的正切值 
(1)作二面角的平面角	$\because PC\perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，交线为 AC，作 $BD\perp AC$ 于 D 点，根据面面垂直性质定理有：$BD\perp$ 平面 PAC. 作 $DE\perp PA$ 于 E，连 BE，据三垂线定理有：$BE\perp PA$，从而 $\angle BED$ 是二面角 $B-PA-C$ 的平面角. 设 $PC=a$，依题意知三角形 ABC 是边长为 a 的正三角形
(2)计算角的大小	$\therefore D$ 是 AC 的中点，且 $BD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$　$\because PC=CA=a$，$\angle PCA=90°$ $\therefore\ \angle PAC=45°$，$\therefore$ 在 $Rt\triangle DEA$ 中，$ED=AD\cdot\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{4}a$ 则在 $Rt\triangle BED$ 中，$\tan\angle BED=\frac{BD}{ED}=\sqrt{6}$
(3)说明结果	因此，二面角 $B-PA-C$ 的平面角的正切值为 $\sqrt{6}$

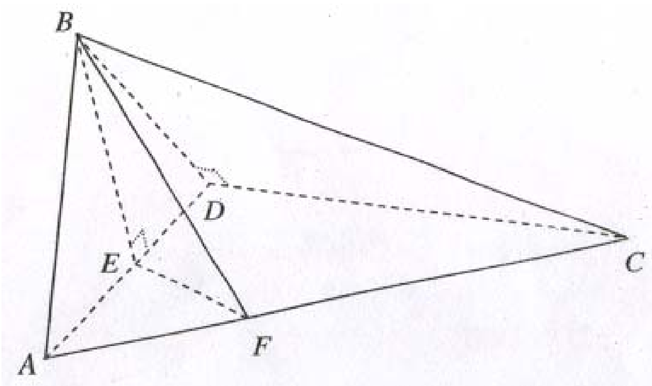
2008/2009

如圖，B－ACD 是三棱錐，AC＝BC＝1、$\angle$BDC＝$\frac{\pi}{2}$、$\angle$BCD＝$\angle$ACD＝$\frac{\pi}{6}$及$\angle$ADB＝$\frac{\pi}{3}$。設 E 爲點 B 到 AD 的垂足、點 F 爲 AC 上的一點及$\angle$BFE＝α。

(a)證明△ADC 及△BDC 是全等三角形。由此，求$\angle$ADC 及 AB 的長。 (5 分)
(b)證明 BE⊥△ADC。 (3 分)
(c)以α表 BF 的長。 (2 分)
(d)證明 $\cos\angle BAC=\frac{1}{4}$。由此證明 $AF^2-\frac{1}{4}AF+\frac{1}{4}-\frac{3}{16\sin^2\alpha}=0$。 (4 分)
(e)若 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，求 AF 的長。 (2 分)

解：

(a)$\because$AC＝BC，$\angle$ACD＝$\angle$BCD，DC＝DC
$\therefore$△ADC≅△BDC
$\therefore\angle ADC=\angle BDC=90^0$
$\because AD=BD$，$\angle ADB=60^0$
$\therefore$△ABD 是等邊三角形
$AB=BD=BC\sin 30^0=\frac{1}{2}$



(b)$\because$CD⊥BD，CD⊥AD
$\therefore$CD⊥面 ABD
$\therefore$CD⊥BE
又 BE⊥AD
$\therefore$BE⊥面 ADC

教學備忘

	判　　定	性　　质
直线和平面垂直	如果一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直,那么这条直线和这个平面垂直	(三垂线定理)在平面内的一条直线,如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直那么它也和这条直线垂直(逆命题也成立——三垂线定理的逆定理) 

(c)在 Rt△BEF 中，$\sin\alpha=\frac{BE}{BF}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{BF}$

$\therefore BF=\frac{\sqrt{3}}{4\sin\alpha}$

(d)在△ABC 中，$\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{\frac{1}{4}+1-1}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}=\dfrac{1}{4}$

在△ABF 中，$\cos\angle BAF=\dfrac{AB^2+AF^2-BF^2}{2AB\cdot AF}=\dfrac{\frac{1}{4}+AF^2-\frac{3}{16\sin^2\alpha}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot AF}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \dfrac{1}{4}+AF^2-\dfrac{3}{16\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{4}AF$

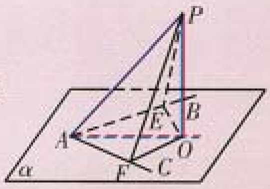
即 $AF^2-\dfrac{1}{4}AF+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{16\sin^2\alpha}=0$ ，證明成立。

(e)當 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 時，$AF^2-\dfrac{1}{4}AF+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{8}=0$

即 $8AF^2-2AF-1=0$

$\therefore AF=-\dfrac{1}{4}$ (不合)或 $AF=\dfrac{1}{2}$ 。

典型例題

例题 / 解题步骤	求证：如果一个角所在平面外一点到角的两边的距离相等，那么这点在平面内的射影在这个角的平分线上
(1) 写出已知与求证	已知：$\angle BAC$ 在平面 α 内，点 $P\notin\alpha$，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，$PO\perp\alpha$，垂足分别是 E、F、O，$PE=PF$，求证：$\angle BAO=\angle CAO$
(2) 明确点 O 到 AB、AC 的垂线	$\because PE\perp AB$，$PF\perp AC$，$PO\perp\alpha$，$\therefore AB\perp OE$，$AC\perp OF$（三垂线定理的逆定理） 
(3) 证明两角相等	$\because PE=PF$，$PA=PA$，$\therefore Rt\triangle PAE\cong Rt\triangle PAF$，$\therefore AE=AF$ 又 $AO=AO$，$\therefore Rt\triangle AOE\cong Rt\triangle AOF$，$\therefore \angle BAO=\angle CAO$

2008/2009

(a)一高爲 h cm、半徑爲 r cm 的正圓錐，其體積爲 2π cm^3。設該圓錐的側面積爲 A cm^2。

(1)證明 $A^2=\pi^2(r^4+\dfrac{36}{r^2})$。 (4 分)

解：

(a)(1) $\because V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=2\pi$，$\therefore h=\dfrac{6}{r^2}$。

又 $A=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$

$\therefore A^2=\pi^2r^2(h^2+r^2)=\pi^2r^2(\dfrac{36}{r^4}+r^2)=\pi^2(\dfrac{36}{r^2}+r^4)$，證明成立。

2009/2010

(a)如圖 1，兩平面 α 與 β 相交於直線 l，點 A 和點 B 分別在平面 α 及平面 β 之上，點 P 和點 Q 分別爲點 A 及點 B 到直線 l 的垂足。設點 X 在平面 β 之上，使得 PX // QB 及 XB＝PQ。

(1)證明 PQBX 爲一矩形。 (2 分)

(2)證明∠AXB＝$\dfrac{\pi}{2}$。 (3 分)

(3)設 θ 爲平面 α 與平面 β 所夾的二面角。

證明 $\cos\theta=\dfrac{AP^2+BQ^2+PQ^2-AB^2}{2AP\cdot BQ}$。 (3 分)

(b)如圖 2，D－ABC 是三棱錐，BC＝1、∠DAC＝∠DAB＝∠ABC＝$\dfrac{\pi}{2}$、∠ACD＝$\dfrac{\pi}{6}$ 及∠BCD＝$\dfrac{\pi}{4}$。用(a)(3)的結果，或用其他方法，求二面角 A－DC－B。 (8 分)

解：

(a)(1)∵PX //QB，PQ⊥QB 且 XB＝PQ

∴XB⊥QB，∠XBQ 爲一直角

所以，PQBX 爲一矩形。

(2)∵XB //PQ，PQ⊥AP

∴XB⊥AP

又 XB⊥PX

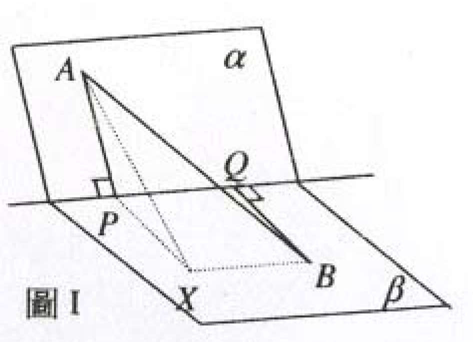


圖 I

$\therefore$XB⊥平面 APX

$\therefore$XB⊥AX，$\angle$AXB＝$\dfrac{\pi}{2}$

(3)$\because$$\angle$APX＝$\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{AP^2 + PX^2 - AX^2}{2AP\cdot PX}$$

$$= \frac{AP^2 + BQ^2 - (AB^2 - XB^2)}{2AP\cdot BQ}$$

$$= \frac{AP^2 + BQ^2 + PQ^2 - AB^2}{2AP\cdot BQ}$$

公式小結

正弦定理	在△ABC 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，且△ABC 的外接圆的半径为 R，则 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$
余弦定理	在△ABC 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，则：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

(b)過 A 作 AP⊥DC 交 DC 於 P，過 B 作 BQ⊥DC 交 DC 於 Q；令所求二面角 A－DC－B 爲ϕ。

又 AP＝$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，BQ＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，AB＝$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

及 PQ＝DC－DP－QC＝$\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$$\therefore \cos\phi = \frac{AP^2 + BQ^2 + PQ^2 - AB^2}{2AP\cdot BQ}$$

$$= \frac{(\frac{\sqrt{6}}{4})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{4})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

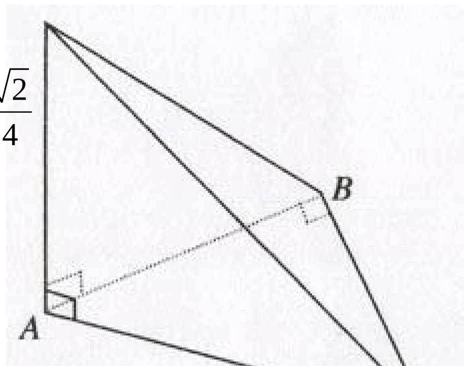


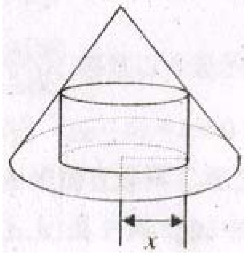
圖 II

$\therefore$所求二面角 A－DC－B 爲$\phi = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

2009/2010

(a)如圖，正圓錐的高及底半徑均爲 1 ，圓錐內接有半徑爲 x 的正圓柱。設 $V(x)$ 爲該圓柱的體積。

(1)證明 $V(x)=\pi(x^2-x^3)$ ， $0\le x\le 1$ 。 (2 分)



解：

圓錐內接正圓柱的半徑爲 x ，高爲 $1-x$ ；

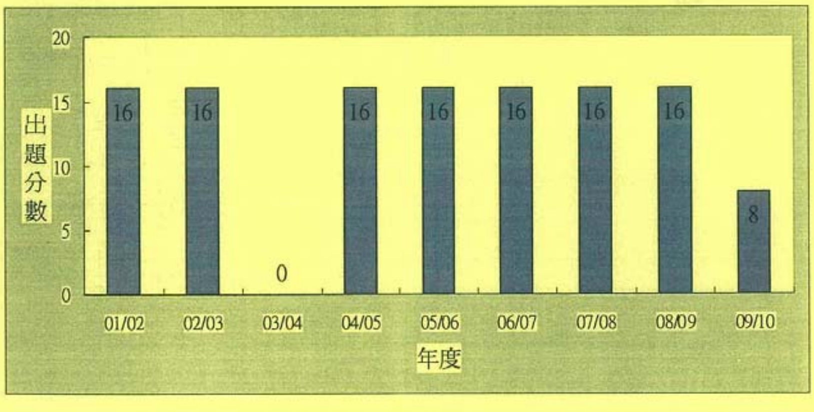
$\therefore V(x)=\pi x^2(1-x)=\pi(x^2-x^3)$ ，其中 $0\le x\le 1$ 。

5 線性方程組

考試大綱

不多於三個未知量。
$M \times M$ 矩陣；矩陣加法及乘法($M \leq 3$)。
行列式(階數不大於三)。

命題趨勢



2001/2002

(a)計算行列式：$\begin{vmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 101 & 201 & 301 \\ 201 & 302 & 403 \end{vmatrix}$。(6 分)

(b) 1.求以下方程組的通解：$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$。

2.利用 b.1.中之通解，求 m ，n 之值使得以下方程組有解：$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=4 \\ x+my-z=n \end{cases}$。

(10 分)

解：

(a)原式 $=\begin{vmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 1 & 1 & 1 \\ 201 & 302 & 403 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 1 & 0 & 0 \\ 201 & 101 & 101 \end{vmatrix}=0$

(b) 1. $\begin{cases} x+y+z=3\cdots(1) \\ 2x-y+z=4\cdots(2) \end{cases}$

$(1)+(2)$ ：$3x+2z=7$

$(2)-(1)$ ：$x-2y=1$

令 $x=t(t\in R)$ ，則 $y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$ ，$z=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}t$ 。

2.將 $\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ z=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}t \end{cases}$ ，代入 $x+my-z=n$ ，得：

$t+m(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t)-(\frac{7}{2}-\frac{3}{2}t)=n$

即 $(-\frac{1}{2}m-n-\frac{7}{2})+(\frac{1}{2}m+\frac{5}{2})t=0$

$\because t \in R$，$\therefore \begin{cases} -\dfrac{1}{2}m - n - \dfrac{7}{2} = 0 \\ \dfrac{1}{2}m + \dfrac{5}{2} = 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} m = -5 \\ n = -1 \end{cases}$。

2002/2003

(a) $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$，在設有計算出 A 的值的情況下，證明 19 可整除 A。

(提示：已知 19 可整除 323，950 及 703。) (6 分)

(b)給出以 x，y 和 z 爲未知量的方程組：

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ kx + y + kz = 2 \\ k^2 x + y + z = 1 \end{cases}$$

1.求 k 的值得使方程組有唯一解。

2.設 $k = -1$，求此方程組的通解。 (10 分)

解：

(a) $A = 45 + 0 + 0 - 105 - 0 - 54 = -114$

(b) 1. $D \neq 0$ 時有唯一解，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \\ k^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + k + k^3) - (k^2 + k + k) = k^3 - k^2 - k + 1 = (k+1)(k-1)^2$$

$\therefore k \neq 1$ 及 $k \neq -1$。

2.當 $k = -1$ 時，將方程組的增廣矩陣實施列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

係數矩陣與增廣矩陣的秩都是 2，而有 3 個未知數，故有無限多組解，且有 3－2＝1 個未知數可選爲任意數。

由增廣矩陣的簡化矩陣知，原方程組即：

$$\begin{cases} x+z=-\dfrac{1}{2} \\ 2y=3 \end{cases}$$

故原方程組之解爲 $x=t$ ，$y=\dfrac{3}{2}$ ，$z=-\dfrac{1}{2}-t$ ，$(t\in R)$。

2004/2005

(a)因式分解行列式：$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$。 (6 分)

(b)求以下方程組的通解：$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y-4z=0 \end{cases}$。 (5 分)

(c)利用 b.的通解，解：$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y-4z=0 \\ 2x^2+y^2+z^2=18 \end{cases}$。 (5 分)

解：

$$\text{(a)原式}=\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ c(a-b) & b-a & b^2-a^2 \\ a(b-c) & c-b & c^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ c & -1 & -a-b \\ a & -1 & -b-c \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} c(a+b) & 0 & -ab \\ c-a & 0 & c-a \\ a & -1 & -b-c \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} c(a+b) & -ab \\ c-a & c-a \end{vmatrix}$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)[c(a+b)+ab]$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

(b) $\begin{cases} 2x+y+z=0\cdots(1) \\ x+2y-4z=0\cdots(2) \end{cases}$

$(1)\times 2-(2)$ ：$3x+6z=0$ ，即 $x+2z=0$

$(2)\times 2-(1)$ ：$3y-9z=0$ ，即 $y-3z=0$

令 $z=t(t\in R)$ ，則 $x=-2t$ ， $y=3t$ 。

(c)將 $\begin{cases} x=-2t \\ y=3t \\ z=t \end{cases}$ ，代入 $2x^2+y^2+z^2=18$ ，得：

$2(-2t)^2+(3t)^2+(t)^2=18$ ，$\therefore t^2=1$ ，即 $t=\pm 1$

原方程組的解爲 $x=-2$ ， $y=3$ ， $z=1$ 或 $x=2$ ， $y=-3$ ， $z=-1$ 。

2005/2006

(a)因式分解行列式：$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (a+c)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ 。 (7 分)

(b) 1.求以下方程組的通解：$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-y-2z=8 \end{cases}$ 。 (4 分)

2.利用 b.1.的通解，說明對任意實數 k ，方程組：

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-y-2z=8 \\ \log_{10}x+\log_{10}y+\log_{10}z=k \end{cases}$$

都有唯一解。(提示：考慮適當的函數的圖像。) (5 分)

解：

(a)原式 $=\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 0 & b^2-a^2 & (a+c)^2-(b+c)^2 \\ 0 & c^2-b^2 & (a+b)^2-(a+c)^2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} (b+a)(b-a) & (a+b+2c)(a-b) \\ (c+b)(c-b) & (2a+b+c)(b-c) \end{vmatrix}$

$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -b-a & a+b+2c \\ -c-b & 2a+b+c \end{vmatrix}$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}-b-a & 2c\\ -c-b & 2a\end{vmatrix}$$
$$=(a-b)(b-c)[2a(-b-a)+2c(c+b)]$$
$$=2(a-b)(b-c)[b(c-a)+(c^2-a^2)]$$
$$=2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(b) $\begin{cases} x-2y+z=1\cdots(1) \\ 3x-y-2z=8\cdots(2) \end{cases}$

$(2)\times 2-(1)$ ： $5x-5z=15$ ，即 $x-z=3$

$(2)-(1)\times 3$ ： $5y-5z=5$ ，即 $y-z=1$

令 $z=t(t\in R)$ ，則 $x=3+t$ ， $y=1+t$ 。

(c)將 $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$ ，代入 $\log_{10}x+\log_{10}y+\log_{10}z=k$ ，得：

$\log_{10}(3+t)+\log_{10}(1+t)+\log_{10}t=k$

即 $\log_{10}[(3+t)(1+t)t]=k$

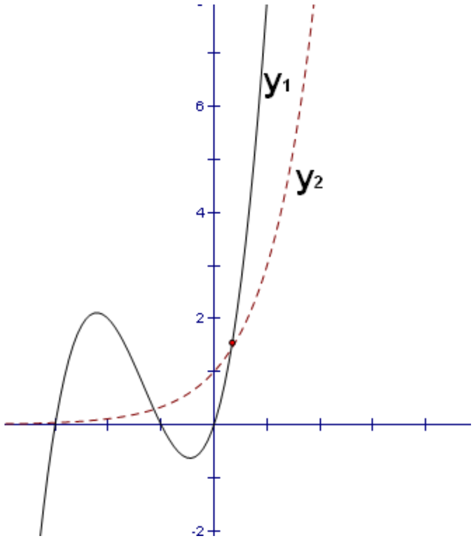
$(3+t)(1+t)t=10^k$

在同一坐標系中作出兩個函數 $y_1=(3+t)(1+t)t$ 和 $y_2=10^k$ 的圖像，如圖所示。

$\forall k\in R$ ，函數 $y_2=10^k$ 在區間 $(-\infty,+\infty)$ 上總是單調遞增的；而且，要使 $\log_{10}t$

有意義，必須 $t>0$ ，故 y_1 、 y_2 在第一象限內必有唯一交點。

所以，對任意實數 k ，原方程組都有唯一解。



2006/2007

(a)因式分解行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$。 (6 分)

(b)已知以 x ， y ， z 爲未知量的方程組：

$$(E)\begin{cases} x+y+z=1 \\ px+qy+rz=s \\ p^2x+q^2y+r^2z=s^2 \end{cases}$$

1.證明方程組(E)有唯一解當且僅當 p ， q ， r 的值互不相同。 (2 分)

2.設 $p=q\neq r$ 。求 s 的值得使方程組(E)有解，並對每一求等得的 s 值解方程組(E)。 (8 分)

[提示：設 $w=x+y$]

解：

$$(a)原式=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p-q & q-r & r \\ p^2-q^2 & q^2-r^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} p-q & q-r \\ p^2-q^2 & q^2-r^2 \end{vmatrix}$$

$$=(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p+q & q+r \end{vmatrix}$$

$$=(p-q)(q-r)(r-p)$$

(b) 1.方程組(E)的係數行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}=(p-q)(q-r)(r-p)$

∴當且僅當 p ， q ， r 的值互不相同，即 $D\neq 0$ 時，方程組(E)有唯一解。

2.設 $w=x+y$ ，且 $p=r$ ，方程組(E)可寫成 $\begin{cases} w+z=1\cdots(1) \\ pw+rz=s\cdots(2) \\ p^2w+r^2z=s^2\cdots(3) \end{cases}$

解(1)、(2)得：$\begin{cases} w=\dfrac{r-s}{r-p} \\ z=\dfrac{s-p}{r-p} \end{cases}$，並代入(3)，得：

$$p^2\cdot\frac{r-s}{r-p}+r^2\cdot\frac{s-p}{r-p}=s^2$$

即 $p^2(r-s)+r^2(s-p)=s^2(r-p)$

$r^2(s-p)+[p^2(r-s)-s^2(r-p)]=0$

$r^2(s-p)+[-r(s^2-p^2)+sp(s-p)]=0$

$(s-p)[r^2-r(s+p)+sp]=0$

$(s-p)(r-s)(r-p)=0$

$\because p\neq r$，$\therefore s=p$ 或 $s=r$

當 $s=p$ 時，$\begin{cases} w=1 \\ z=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$，原方程組(E)的解為 $\begin{cases} x=t \\ y=1-t\,(t\in R) \\ z=0 \end{cases}$。

當 $s=r$ 時，$\begin{cases} w=0 \\ z=1 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases}$，原方程組(E)的解為 $\begin{cases} x=u \\ y=-u\,(u\in R) \\ z=1 \end{cases}$。

2007/2008

(a)因式分解行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{vmatrix}$。 (6 分)

(b)設 $a>0$，已知以 x，y 和 z 為未知量的方程組：

(E) $\begin{cases} x+y+z=ax \\ x+y+z=ay \\ x+y+z=az \end{cases}$

有非平凡解(即$(x，y，z)\neq(0，0，0)$)。

1.求 a 的值。 (4 分)

2.解方程組(E)。 (6 分)

解：

(a)原式$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p-q & q-r & r \\ p^3-q^3 & q^3-r^3 & r^3 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} p-q & q-r \\ p^3-q^3 & q^3-r^3 \end{vmatrix}$

$=(p-q)(q-r)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p^2+pq+q^2 & q^2+qr+r^2 \end{vmatrix}$

$=(p-q)(q-r)[(q^2+qr+r^2)-(p^2+pq+q^2)]$

$=(p-q)(q-r)[(r^2-p^2)+q(r-p)]$

$=(p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r)$

(b) 1. $D=0$時有非平凡解，

$$D=\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}=(1-a)^3+2-3(1-a)=a^2(a-3)$$

$\therefore a=3$或$a=0$(不合)

2.當$a=3$時，將方程組(E)的增廣矩陣實施列運算：

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

由增廣矩陣的簡化矩陣知，原方程組(E)即：

$$\begin{cases} y-z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

故原方程組(E)之解爲$x=y=z=t$，$(t\in R)$。

2008/2009

(a)因式分解行列式：$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$。 (7 分)

(b) 1.求下列方程組的通解：

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$。 (4 分)

2.利用 1.的通解，或用其他方法，解下列方程組：

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ xy+xz+yz=14 \end{cases}$$ 。(5 分)

解：

(a)原式$=\begin{vmatrix} a-b & a^2-b^2 & c(b-a) \\ b-c & b^2-c^2 & a(c-b) \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & a+b & -c \\ 1 & b+c & -a \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & a+b & -c \\ 0 & c-a & c-a \\ 0 & -bc & a(b+c) \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} c-a & c-a \\ -bc & a(b+c) \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)[a(b+c)+bc]$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

(b) 1.$\begin{cases} x-2y+z=1\cdots(1) \\ 2x+y-z=0\cdots(2) \end{cases}$

$(1)+(2)$ ： $3x-y=1$

$(1)+(2)\times 2$ ： $5x-z=1$

令 $x=t(t\in R)$，則 $y=3t-1$， $z=5t-1$ 。

2.將$\begin{cases} x=t \\ y=3t-1 \\ z=5t-1 \end{cases}$，代入 $xy+xz+yz=14$，得：

$t(3t-1)+t(5t-1)+(3t-1)(5t-1)=14$

即 $23t^2-10t-13=0$

$\therefore t=-\dfrac{13}{23}$ 或 $t=1$

當$t=-\dfrac{13}{23}$時，原方程組的解爲$(x，y，z)=(-\dfrac{13}{23}，-\dfrac{62}{23}，-\dfrac{88}{23})$。

當$t=1$時，原方程組的解爲$(x，y，z)=(1，2，4)$。

2009/2010

設下列方程組(E)有非零解：

$$(E)\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x+y-3z=0 \\ 5x+3y+pz=0 \end{cases}$$

其中 p 爲常數。

(a)求 p 的值。 (3 分)

(b)求(E)的通解。 (5 分)

解：

(a) $D=0$時有非零解，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & p \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \\ 5 & 8 & p-5 \end{vmatrix}=4(p-5)+48=4p+28$$

$\therefore p=-7$。

(b)將方程組(E)的增廣矩陣實施列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 8 & -12 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -½ & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

係數矩陣與增廣矩陣的秩都是 2，而有 3 個未知數，故有無限多組解，且有 3－2＝1 個未知數可選爲任意數。

由增廣矩陣的簡化矩陣知，原方程組(E)即：

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}z=0 \\ 2y-3z=0 \end{cases}$$

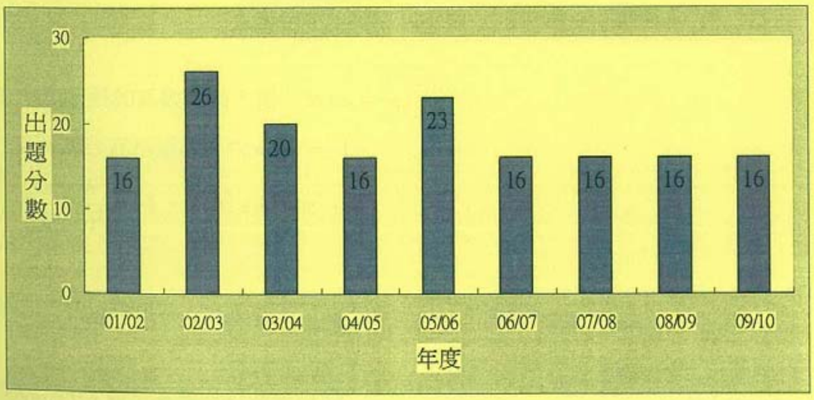
故原方程組(E)之解爲$z=t$，$x=\dfrac{1}{2}t$，$y=\dfrac{3}{2}t$，$(t\in R)$。

6 解析幾何

考試大綱

直線和圓。
切線與法線。
直線及曲線的相交。
二次曲線的標準形式。
二次曲線的平移。
極座標。

命題趨勢



2001 / 2002

給定橢圓(E)：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$及(E)外的一點 P(h，k)。

(1)若 y＝mx＋c 是由 P 至(E)的切線，證明 $a^2m^2+b^2=c^2$。 (4 分)

(2)由此證明$(h^2-a^2)m^2-2hkm+k^2-b^2=0$。 (4 分)

(3)若由 P 至(E)的兩切線互相垂直，證明 $h^2+k^2=a^2+b^2$。 (4 分)

(4)描述 P 的軌跡。 (4 分)

解：

(1)將 $y=mx+c$ 代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，得：

$b^2x^2+a^2(mx+c)^2=a^2b^2$

即 $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2cmx+a^2(c^2-b^2)=0$

由△＝0，得 $(2a^2cm)^2-4(a^2m^2+b^2)a^2(c^2-b^2)=0$

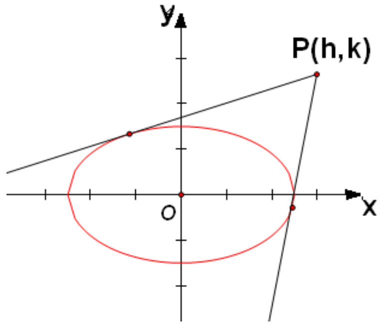
即 $a^2c^2m^2-(a^2m^2+b^2)(c^2-b^2)=0$

$a^2c^2m^2-(a^2m^2c^2-a^2m^2b^2+b^2c^2-b^4)=0$

$a^2m^2b^2-b^2c^2+b^4=0$

$\because b\neq 0$ ，$\therefore a^2m^2-c^2+b^2=0$

即 $a^2m^2+b^2=c^2$



(2)$\because$點 $P(h,k)$ 在 $y=mx+c$ 上，$\therefore k=mh+c$

$\because (h^2-a^2)m^2-2hkm+k^2-b^2$

$=(h^2-a^2)m^2-2h(mh+c)m+(mh+c)^2-b^2$

$=(h^2m^2-a^2m^2)-2h^2m^2-2hcm+(m^2h^2+2mhc+c^2)-b^2$

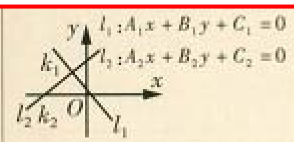
$=-a^2m^2+c^2-b^2$

$=-a^2m^2+(a^2m^2+b^2)-b^2$

$=0$

$\therefore$證明成立。

公式小結

垂直		l_1, l_2 有斜截式方程，$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$
		$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

(3)由(2)及根和係數關係，得：$m_1m_2=\dfrac{k^2-b^2}{h^2-a^2}$

又兩切線互相垂直，$\therefore m_1m_2=-1$

即 $\dfrac{k^2-b^2}{h^2-a^2}=-1$ ，$\therefore h^2+k^2=a^2+b^2$

(4) P 的軌跡是以圓心在原點，半徑爲 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圓。

2002 / 2003

設 P(2，3)為一定點，過點 P 且斜率為 m 的直線與 x 軸的正向及 y 軸的正向分別交於點 A 及點 B，設 O 為原點。

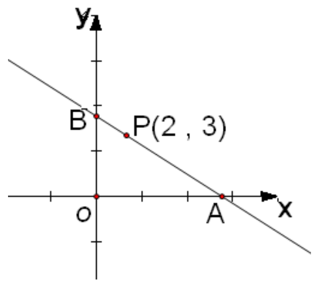
(1)求 $|OA|+|OB|$，答案以 m 表示及給出 m 的範圍。 (6 分)

(2)求 $|OA|+|OB|$ 的最小值。 (4 分)

解：

(1)設直線 AB 方程為 $y-3=m(x-2)$

則 $A(-\frac{3}{m}+2,0)$ 及 $B(0,-2m+3)$



由題意，知 $m<0$，得：

$$|OA|+|OB|=\left|-\frac{3}{m}+2\right|+|-2m+3|$$

$$=(-\frac{3}{m}+2)+(-2m+3)$$

$$=-2m-\frac{3}{m}+5$$

(2) $\because (-2m)+(-\frac{3}{m})\geq 2\sqrt{(-2m)(-\frac{3}{m})}$，(當且僅當 $m=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 時，等號成立)

即 $(-2m)+(-\frac{3}{m})\geq 2\sqrt{6}$

$$(-2m)+(-\frac{3}{m})+5\geq 2\sqrt{6}+5$$

$\therefore |OA|+|OB|$ 的最小值為 $2\sqrt{6}+5$。

2002 / 2003

給出 C：$x^2+y^2+x-6y+k=0$ 及直線 L：$x+2y-3=0$，設 C 與 L 相交於不同的兩點 $A(x_1，y_1)$及 $B(x_2，y_2)$。

(1)求一個以 y_1 和 y_2 為根的二次方程。 (4 分)

(2)求 k 的範圍。 (3 分)

(3)證明 $y_1+y_2=4$ 及 $y_1y_2=\frac{12+k}{5}$。 (3 分)

(4)以 k 表 x_1x_2。 (3 分)

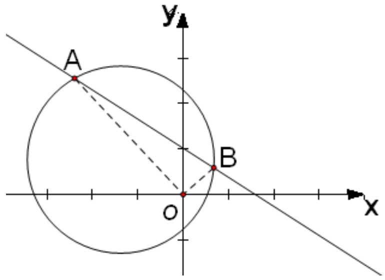
(5)設 O 為原點，若∠AOB 是一直角，求 k。 (3 分)

解：

(1)將 $x=-2y+3$ 代入 $x^2+y^2+x-6y+k=0$，得：

$(-2y+3)^2+y^2+(-2y+3)-6y+k=0$

即 $5y^2-20y+(k+12)=0$



(2)由△>0，得 $(-20)^2-4(5)(k+12)>0$

$\therefore k<8$

(3)由(1)及根和係數關係，得：

$y_1+y_2=-\dfrac{-20}{5}=4$ ， $y_1y_2=\dfrac{k+12}{5}$

(4) $x_1x_2=(-2y_1+3)(-2y_2+3)$

$=4y_1y_2-6(y_1+y_2)+9$

$=4(\dfrac{k+12}{5})-6(4)+9$

$=\dfrac{4k-27}{5}$

教學備忘

曲线 C 和方程 $f(x,y)=0$ 的关系	纯粹性	曲线 C 上的点的坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解
	完备性	以方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点都是曲线 C 上的点

(5) $\because k_{OA}k_{OB}=-1$ ， $\therefore \dfrac{y_1-0}{x_1-0}\cdot\dfrac{y_2-0}{x_2-0}=-1$

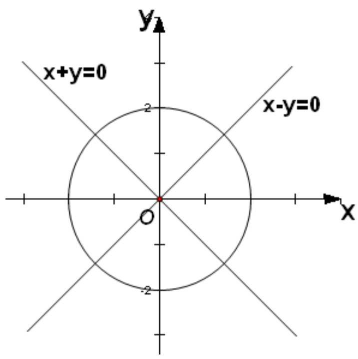
即 $y_1y_2+x_1x_2=0$

$\dfrac{k+12}{5}+\dfrac{4k-27}{5}=0$

$\therefore k=3$

2003 / 2004

(b)繪出方程 $x^4-y^4-4x^2+4y^2=0$ 的圖。 (4 分)



2003 / 2004

給出拋物線 $y^2=4x$。

(a)設 $y=mx+c$ 是拋物線的切線，證明 $c=\frac{1}{m}$。 (4 分)

(b)拋物線的兩條切線交於點 P(h，k)，證明兩條切線的斜率滿足 $hm^2-km+1=0$。 (1 分)

(c)若(b)中的兩條切線有夾角 α，證明 $\tan^2\alpha=\frac{k^2-4h}{(h+1)^2}$。 (8 分)

(d)設 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，問 P 的軌跡是哪種曲線？ (3 分)

解：

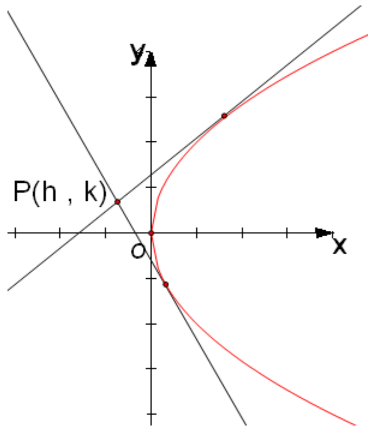
(a)將 $y=mx+c$ 代入 $y^2=4x$，得：

$(mx+c)^2=4x$

即 $m^2x^2+(2mc-4)x+c^2=0$

由△＝0，得 $(2mc-4)^2-4m^2c^2=0$

即 $-16mc+16=0$，$\therefore c=\frac{1}{m}$



(b)由(a)得切線 $y=mx+\frac{1}{m}$

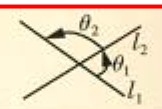
$\therefore k=mh+\frac{1}{m}$，即 $hm^2-km+1=0$

(c)由(b)及根和係數關係，得：

$m_1+m_2=-\frac{-k}{h}=\frac{k}{h}$ 及 $m_1m_2=\frac{1}{h}$

$$\therefore \tan\alpha=\frac{(m_1-m_2)^2}{(1+m_1m_2)^2}=\frac{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}{(1+m_1m_2)^2}=\frac{(\frac{k}{h})^2-4(\frac{1}{h})}{(1+\frac{1}{h})^2}=\frac{k^2-4h}{(h+1)^2}$$

公式小結

夹角与到角	直线 l_1 按逆时针方向旋转到与 l_2 重合时所旋转的角叫做直线 l_1 到 l_2 角（如图中 θ_1），范围 $[0,\pi)$. 直线 l_1 到 l_2 角中不是钝角的角叫做直线 l_1,l_2 的夹角，范围 $[0,\frac{\pi}{2})$. l_1 到 l_2 的角的公式是：$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$；$l_1$ 和 l_2 的夹角公式是：$\tan\theta=\left\lvert\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right\rvert$	 如图，l_1 到 l_2 的角为 θ_1，l_2 到 l_1 的角为 θ_2

(d)將 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 代入 $\tan^2\alpha=\dfrac{k^2-4h}{(h+1)^2}$ ，得：

$$3=\frac{k^2-4h}{(h+1)^2}$$

即 $3h^2-k^2+6h+4k+3=0$

所以， P 的軌跡是雙曲線的一個分支。

2004 / 2005

直線 L 過點 P(－2，0)且有斜率 m (m >0)。假設直線 L 與拋物線 $y^2=8x$ 交於兩不同的點 $A(x_1，y_1)$及 $B(x_2，y_2)$。

(a)證明 x_1 及 x_2 是方程 $m^2x^2+4(m^2-2)x+4m^2=0$ 的根。 (2 分)

(b)證明 $(x_1-x_2)^2=\dfrac{64(1-m^2)}{m^4}$ 。 (4 分)

(c)證明 $|AB|^2=\dfrac{64(1-m^4)}{m^4}$ 。 (5 分)

(d)設 $m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ，若點 Q(h，k)爲一動點使得△ABQ 的面積爲 $\sqrt{192}$ ，求點 Q(h，k)的座標所滿足的方程。 (5 分)

解：

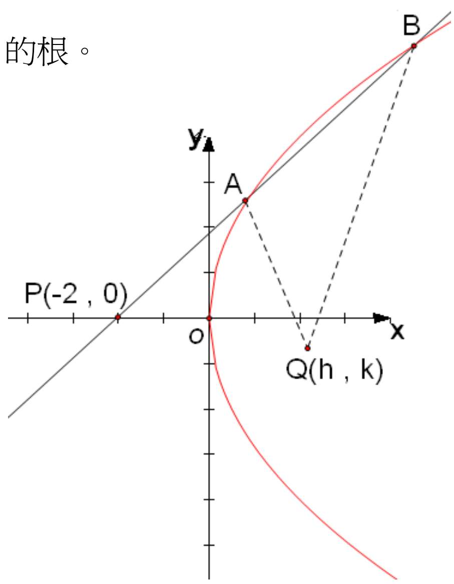
(a)設直線 AB 方程爲 $y=m(x+2)$

將 $y=m(x+2)$ 代入 $y^2=8x$ ，得：

$m^2(x^2+4x+4)=8x$

即 $m^2x^2+4(m^2-2)x+4m^2=0$

所以 x_1 、 x_2 是方程 $m^2x^2+4(m^2-2)x+4m^2=0$ 的根。



(b)由(a)及根和係數關係，得：

$x_1+x_2=\dfrac{4(2-m^2)}{m^2}$ 及 $x_1x_2=4$

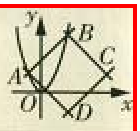
$$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=[\frac{4(2-m^2)}{m^2}]^2-4(4)$$

$$=\frac{64(1-m^2)}{m^4}$$

(c) $|AB|^2=(x_1-x_2)^2(1+m^2)=\dfrac{64(1-m^2)}{m^4}\cdot(1+m^2)=\dfrac{64(1-m^4)}{m^4}$

典型例題

例题 / 解题步骤	一个正方形 $ABCD$ 的两顶点 A,B 在抛物线 $y=x^2$ 上，另两个顶点 C,D 在直线 $y=x-4$ 上，求这个正方形的边长 
(1) 设参数，沟通正方形与抛物线联系	设直线 AB 的方程为 $y=x+b$. 由 $\begin{cases}y=x+b\\y=x^2\end{cases}$ 得 $x^2-x-b=0$
(2) 构建等量关系，确定参数值	当 $b>-\frac{1}{4}$ 时，$\lvert AB\rvert=\sqrt{2}\lvert x_1-x_2\rvert=\sqrt{2(1+4b)}$，又 $\lvert AD\rvert=\dfrac{\lvert b+4\rvert}{\sqrt{2}}$，$\therefore$ 由 $\lvert AB\rvert$，$\lvert AD\rvert$ 都是正方形 $ABCD$ 的边长，得 $\lvert AB\rvert=\lvert AD\rvert$，故 $\sqrt{2(1+4b)}=\dfrac{\lvert b+4\rvert}{\sqrt{2}}$，解得 $b_1=2$ 或 $b_2=6$
(3) 探求正方形边长 $\lvert AB\rvert$	因此，该正方形边长为 $\lvert AB\rvert=\sqrt{2(1+4b)}=3\sqrt{2}$ 或 $5\sqrt{2}$

(d) $m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 時，$|AB|^2=\dfrac{64(1-\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}}=192$，$\therefore |AB|=\sqrt{192}$

又直線 AB 方程爲 $x-\sqrt{2}y+2=0$

$$\therefore S_{\Delta ABQ}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h_{AB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{192}\cdot\frac{\left|h-\sqrt{2}k+2\right|}{\sqrt{3}}=\sqrt{192}$$

公式小結

点 (x_0,y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式是 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

即 $\left|h-\sqrt{2}k+2\right|=2\sqrt{3}$

所以，點 Q(h，k)所滿足的方程爲 $h-\sqrt{2}k+2\pm2\sqrt{3}=0$

2005 / 2006

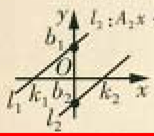
已知l_1：$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$和$l_2$：$(\cos 3\theta)x+(-2\sin\theta)y=-1$在直角坐標平面上爲平行直線，其中$0\le\theta<\pi$，求$\theta$值。 (7 分)

解：

$\because l_1 // l_2$

$\therefore (\cos\theta)(-2\sin\theta)-(\sin\theta)(\cos 3\theta)=0$

公式小結

平行	$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 	l_1, l_2 有斜率，$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=k_2 \\ b_1\ne b_2 \end{cases}$
		$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2-A_2B_1=0 \\ (A_1C_2-A_2C_1)^2+(B_1C_2-B_2C_1)^2\ne 0 \end{cases}$

即$\sin\theta(2\cos\theta+\cos 3\theta)=0$

$\sin\theta(2\cos\theta+4\cos^3\theta-3\cos\theta)=0$

$\sin\theta(4\cos^3\theta-\cos\theta)=0$

$\sin\theta\cos\theta(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=0$或$\cos\theta=0$或$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$或$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\because 0\le\theta<\pi$

$\therefore \theta=0$或$\theta=\dfrac{\pi}{2}$或$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$或$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

2005 / 2006

(a)設l_1：$y=3x+c$爲一直線，且橢圓$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$上有兩個不同點 P($x_1$，$y_1$)及 Q($x_2$，$y_2$)關於$l_1$對稱。

設l_2：$y=mx+d$爲通過 P 及 Q 的直線。

1.求m值。 (2 分)

2.以d分別表x_1+x_2及y_1+y_2，並求d的取值範圍。 (6 分)

3.考慮 P 及 Q 的中點，求c的取值範圍。 (3 分)

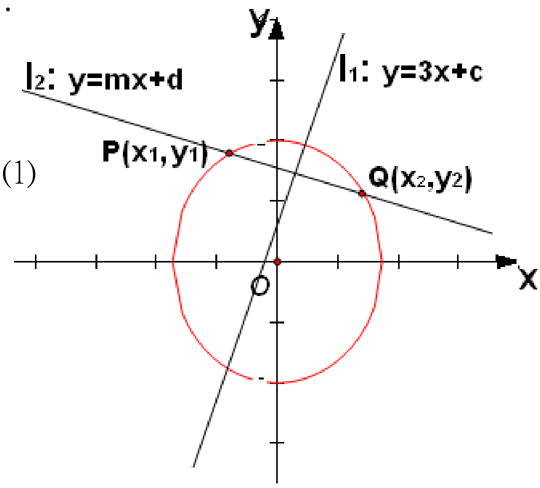
(b)設點 A(h，k)爲橢圓 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上一點。證明橢圓 E 在點 A 的切線 L：$\dfrac{hx}{a^2}+\dfrac{ky}{b^2}=1$。

[提示：利用$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=0$當且僅當$x=h$及$y=k$，證明橢圓 E 與直線 L 只有一交點。] (5 分)

解：

(a) 1. $\because l_1 \perp l_2$，$\therefore (3)(m)=-1$，即 $m=-\dfrac{1}{3}$

2.將 $y=-\dfrac{1}{3}x+d$ 代入 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$，得：



$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{1}{4}(-\dfrac{1}{3}x+d)^2=1$

化簡，得：$13x^2-6dx+(9d^2-36)=0$ (1)

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{-6d}{13}=\dfrac{6d}{13}$

$y_1+y_2=(-\dfrac{1}{3}x_1+d)+(-\dfrac{1}{3}x_2+d)$

$=-\dfrac{1}{3}(x_1+x_2)+2d$

$=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6d}{13}+2d$

$=\dfrac{24d}{13}$

l_2 與橢圓有兩個交點，方程(1)有兩相異實根，即△＞0

$\therefore (-6d)^2-4(13)(9d^2-36)>0$

化簡，得：$3d^2-13<0$

$\therefore -\dfrac{\sqrt{39}}{3}<d<\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

3. PQ 中點座標爲 $(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})=(\dfrac{3d}{13},\dfrac{12d}{13})$

又 PQ 中點在 l_1 上，$\therefore \dfrac{12d}{13}=3\cdot\dfrac{3d}{13}+c$，即 $d=\dfrac{13}{3}c$

$\because -\dfrac{\sqrt{39}}{3}<d<\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

$\therefore -\dfrac{\sqrt{39}}{3}<\dfrac{13}{3}c<\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

即 $-\dfrac{\sqrt{39}}{13}<c<\dfrac{\sqrt{39}}{13}$

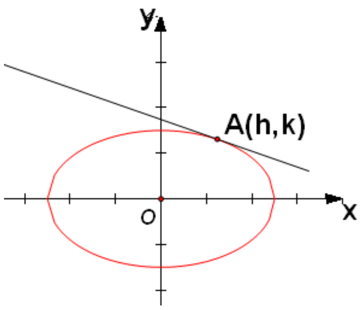
(b)設點(s ， t)在橢圓 E 及直線 L 上，則

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1\,(1) \quad 及 \quad \frac{hs}{a^2}+\frac{kt}{b^2}=1\,(2)$$

又 $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}=1$ (3)

(1)－(2)×2＋(3)： $\frac{(s-h)^2}{a^2}+\frac{(t-k)^2}{b^2}=0$

∴當且僅當 $s=h$ 及 $t=k$ 時上式成立，橢圓 E 與直線 L 只有一交點。



教學備忘

直线与方程的关系	在平面直角坐标系中,对于任何一条直线,都有一个表示这条直线的关于 x,y 的二元一次方程;任何关于 x,y 的二元一次方程都表示一条直线

2006 / 2007

已知雙曲線 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 與直線 $y=m(x-2)$ 交於兩點 P(x_1，y_1)及 Q(x_2，y_2)，且 P 及 Q 分別在雙曲線的左、右分支上。

(1)證明 x_1 及 x_2 滿足方程 $(m^2-3)x^2-4m^2x+(4m^2+3)=0$ 。 (3%)

(2)以 m 表 x_1+x_2 及 x_1x_2 。 (2%)

(3)求 m 的取值範圍。 (3%)

(4)設 O 爲原點。若 $\angle POQ$ 爲直角，證明 $8x_1^2x_2^2-9(x_1^2+x_2^2)+9=0$ ，並由此求 m 的值。 (8%)

解：

(1)將 $y=m(x-2)$ 代入 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ ，得：

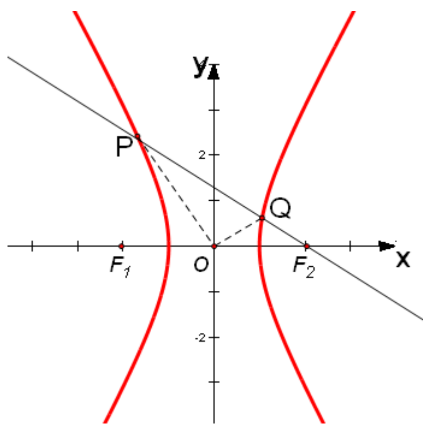
$$x^2-\frac{m^2(x-2)^2}{3}=1$$

$$3x^2-m^2(x^2-4x+4)=3$$

即 $(m^2-3)x^2-4m^2x+(4m^2+3)=0$

(2)由(1)及根和係數關係，得：

$$x_1+x_2=-\frac{-4m^2}{m^2-3}=\frac{4m^2}{m^2-3} \;,\; x_1x_2=\frac{4m^2+3}{m^2-3}$$



(3)$\because x_1x_2<0$，$\therefore \dfrac{4m^2+3}{m^2-3}<0$

即 $m^2-3<0$，解得 $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

(4)$\because k_{OP}k_{OQ}=-1$，$\therefore \dfrac{y_1-0}{x_1-0}\cdot\dfrac{y_2-0}{x_2-0}=-1$

教學備忘

1. 所有直线都存在倾斜角，但并非所有直线都存在斜率（与 x 轴垂直的直线斜率不存在）.
2. 倾斜角的范围为 $[0,\pi)$.
3. 经过两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ 的直线的斜率公式是 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

即 $y_1y_2=-x_1x_2$

兩邊平方：$y_1^2y_2^2=x_1^2x_2^2$

$\because x_1^2-\dfrac{y_1^2}{3}=1$，$\therefore y_1^2=3(x_1^2-1)$，同理 $y_2^2=3(x_2^2-1)$，代入上式，得：

$$3(x_1^2-1)\cdot 3(x_2^2-1)=x_1^2x_2^2$$

$$9(x_1^2x_2^2-x_1^2-x_2^2+1)=x_1^2x_2^2$$

$\therefore 8x_1^2x_2^2-9(x_1^2+x_2^2)+9=0$，證明成立。

$$8x_1^2x_2^2-9[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+9=0$$

$$-9(x_1+x_2)^2+8(x_1x_2)^2+18x_1x_2+9=0$$

將 $x_1+x_2=\dfrac{4m^2}{m^2-3}$、$x_1x_2=\dfrac{4m^2+3}{m^2-3}$ 代入上式，得：

$$-9(\frac{4m^2}{m^2-3})^2+8(\frac{4m^2+3}{m^2-3})^2+18(\frac{4m^2+3}{m^2-3})+9=0$$

即 $9[(m^2-3)^2-(4m^2)^2]+2(4m^2+3)[4(4m^2+3)+9(m^2-3)]=0$

$9(5m^2-3)(-3m^2-3)+2(4m^2+3)(25m^2-15)=0$

$(5m^2-3)[9(-3m^2-3)+10(4m^2+3)]=0$

$(5m^2-3)(13m^2+3)=0$

$\because 13m^2+3\neq 0$，$\therefore 5m^2-3=0$，解得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

又 $m=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，故所求的 $m=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$。

2007 / 2008

已知橢圓 $ax^2+by^2=1$(其中 $a>0$，$b>0$)與直線 $x+y=1$ 交於兩個不同點 P(x_1，y_1)及 Q(x_2，y_2)，且 $|PQ|=2\sqrt{2}$。

(a)證明 x_1 及 x_2 滿足方程 $(a+b)x^2-2bx+(b-1)=0$。 (2%)
(b)證明 $a+b>ab$。 (2%)
(c)以 a 及 b 表 x_1+x_2 及 x_1x_2。 (2%)
(d)證明 $a^2+b^2+3ab-a-b=0$。 (5%)
(e)設 O 爲原點及 C 爲 P 和 Q 的中點。若 OC 的斜率爲 2，求 a 及 b 的值。 (5%)

解：

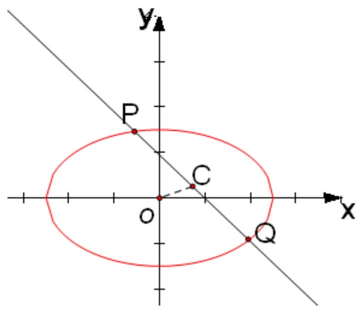
(a)將 $y=1-x$ 代入 $ax^2+by^2=1$，得：

$ax^2+b(1-x)^2=1$

化簡，得：$(a+b)x^2-2bx+(b-1)=0$

∵直線與橢圓有兩個不同交點，

∴ x_1 、 x_2 滿足上面方程。



(b)由△>0，得 $(-2b)^2-4(a+b)(b-1)>0$

化簡，即 $-ab+a+b>0$，∴ $a+b>ab$

(c)由(a)及根和係數關係，得：

$$x_1+x_2=-\frac{-2b}{a+b}=\frac{2b}{a+b}，\quad x_1x_2=\frac{b-1}{a+b}$$

(d)由 $|PQ|=\sqrt{[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2](1+k_{PQ}^2)}$

得 $2\sqrt{2}=\sqrt{[(\frac{2b}{a+b})^2-4(\frac{b-1}{a+b})][1+(-1)^2]}$

即 $8=2[\frac{4b^2}{(a+b)^2}-\frac{4(b-1)}{a+b}]$

$(a+b)^2=b^2-(a+b)(b-1)$

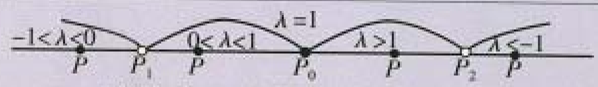
∴ $a^2+b^2+3ab-a-b=0$，證明成立。

(e) PQ 中點 C 的座標爲 $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

又 $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{(1-x_1)+(1-x_2)}{2}=1-\frac{x_1+x_2}{2}=1-\frac{b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$

$\therefore$C 的座標爲$(\dfrac{b}{a+b},\dfrac{a}{a+b})$

教學備忘

定义	设 P_1,P_2 是直线 l 上的两点，点 P 是 l 上不同于 P_1,P_2 的任意一点，则存在一个实数 λ，使 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，$\lambda$ 叫做点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比
图示	 （其中点 P_0 是线段 P_1P_2 的中点）

公式小結

设 λ 为 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比，P_1,P_2,P 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x,y)$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ 定比分点坐标公式 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$ 特别：$\overrightarrow{P_1P_2}$ 中点公式 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$

$\because OC$ 的斜率爲 2，$\therefore \dfrac{\dfrac{a}{a+b}-0}{\dfrac{b}{a+b}-0}=2$，即 $a=2b$

將 $a=2b$ 代入 $a^2+b^2+3ab-a-b=0$，並化簡得：

$11b^2-3b=0$

$\therefore b=0$(不合) 或 $b=\dfrac{3}{11}$

$\therefore a=2b=2\cdot\dfrac{3}{11}=\dfrac{6}{11}$

2008 / 2009

已知拋物線 C：$y=x^2$ 與直線 L：$y=mx+c$。設 C 與 L 交於點 M(x_1，x_1^2)及 N(x_2，x_2^2)。

(a)證明 $x_1+x_2=m$ 及 $x_1x_2=-c$。 (3 分)

(b)由(a)，或用其他方法，推導出拋物線 C 在點 M 的切線的斜率爲 $2x_1$。 (1 分)

(c)設 M 和 N 爲不同的兩點。

1.若 $c=2$，且 C 在點 M 的切線和 C 在點 N 的切線相交於點 Q。求交點 Q 的軌跡。 (6 分)

2.設 O 爲原點。以 x_1 及 x_2 表 $\cos\angle$MON。若 $\angle$MON 爲銳角，求 c 的取值範圍。(6 分)

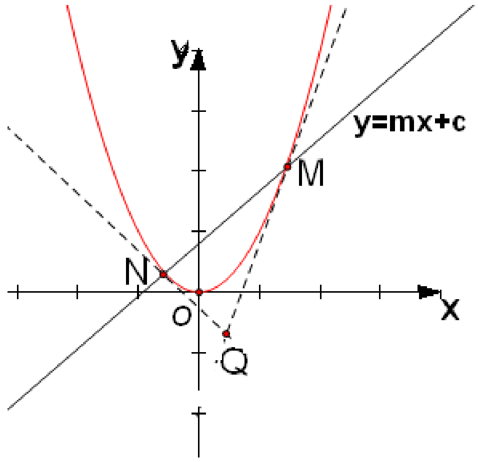
解：

(a)將 $y=mx+c$ 代入 $y=x^2$，得：

$x^2-mx-c=0$

由根和係數關係，知：

$x_1+x_2=-\frac{-m}{1}=m$，$x_1x_2=\frac{-c}{1}=-c$



(b)$\because \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2)=2x$

$\therefore$在點 M 的切線的斜率爲 $2x_1$。

(c) 1.在點 M 的切線方程爲 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$

即 $y=2x_1x-x_1^2$ (1)

同理，在點 N 的切線方程爲 $y=2x_2x-x_2^2$ (2)

(1)－(2)：$0=2(x_1-x_2)x-(x_1^2-x_2^2)$

即 $0=2x-(x_1+x_2)$，$\therefore x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{m}{2}$

(1)＋(2)：$2y=2x(x_1+x_2)-(x_1^2+x_2^2)$

即 $2y=2x(x_1+x_2)-(x_1+x_2)^2+2x_1x_2$

又 $x=\frac{m}{2}$，$x_1+x_2=m$，$x_1x_2=-c=-2$

$\therefore 2y=m\cdot m-m^2+2(-2)$，即 $y=-2$

所以，交點 Q 的軌跡方程爲 $y=-2$。

2. $\cos\angle MON=\frac{|MO|^2+|NO|^2-|MN|^2}{2|MO||NO|}$

$$=\frac{(x_1^2+x_1^4)+(x_2^2+x_2^4)-[(x_1-x_2)^2+(x_1^2-x_2^2)^2]}{2\sqrt{x_1^2+x_1^4}\cdot\sqrt{x_2^2+x_2^4}}$$

$$=\frac{x_1x_2+x_1^2x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_1^4}\cdot\sqrt{x_2^2+x_2^4}}$$

$\angle$MON 為銳角，$\cos\angle MON>0$

$\therefore x_1x_2+x_1^2x_2^2>0$

$x_1x_2(1+x_1x_2)>0$

即 $-c(1-c)>0$，$\therefore c<0$ 或 $c>1$

2009/2010

已知拋物線 P：$y=4x^2$。設 A(a，$4a^2$)為 P 上一點，其中 $a\neq 0$。

(a)若直線 $y=mx+c$ 與拋物線 P 相切，證明 $m^2+16c=0$。由此，或用其他方法，推導出拋物線 P 在點 A 的切線的斜率為 $8a$。 (5 分)

(b)設拋物線 P 在點 A 的切線及法線分別與 y-軸相交於點 H 和點 K。證明 HK 的中點為點 F(0，$\frac{1}{16}$)。 (5 分)

(c)設 C 是以點 F 為圓心並通過點 A 的圓。證明拋物線 P 在點 A 的切線與圓 C 在點 A 的切線的夾角為 $\tan^{-1}|8a|$。 (6 分)

解：

(a)將 $y=mx+c$ 代入 $y=4x^2$，得：

$mx+c=4x^2$

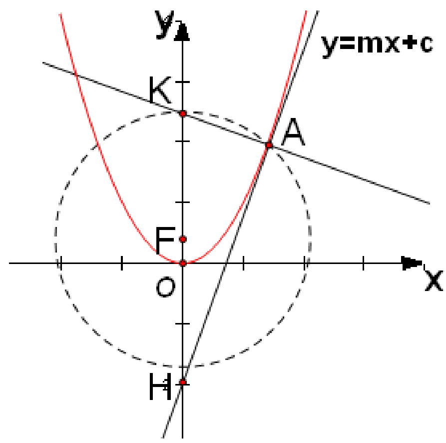
即 $4x^2-mx-c=0$

由△=0，得 $(-m)^2-4(4)(-c)=0$

$\therefore m^2+16c=0$

$\because \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(4x^2)=8x$

$\therefore$在點 A 的切線的斜率為 $8a$。



(b)直線 AH 方程為 $y-4a^2=8a(x-a)$

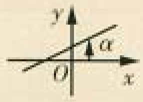
令 $x=0$，得 H 的座標為(0，$-4a^2$)

直線 AK 方程為 $y-4a^2=-\frac{1}{8a}(x-a)$

令 $x=0$，得 K 的座標為(0，$4a^2+\frac{1}{8}$)

$\therefore$線段 HK 的中點 F 的座標爲$\left(0，\dfrac{-4a^2+(4a^2+\frac{1}{8})}{2}\right)=\left(0，\dfrac{1}{16}\right)$

教學備忘

倾斜角	在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线，如果把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转的最小正角记为 α，那么 α 就叫做直线的倾斜角．当直线和 x 轴平行或重合时，规定直线的倾斜角为 0°  
斜率	倾斜角不是 90°的直线，它的倾斜角的正切叫做这条直线的斜率，直线的斜率常用 k 表示，即 $k=\tan\alpha$

(c)$\because$線段 FA 的斜率爲$\dfrac{4a^2-\frac{1}{16}}{a-0}=\dfrac{64a^2-1}{16a}$

$\therefore$圓 C 在點 A 的切線的斜率爲$\dfrac{16a}{1-64a^2}$

設拋物線 P 在點 A 的切線與圓 C 在點 A 的切線的夾角爲θ

則$\tan\theta=\left|\dfrac{8a-\frac{16a}{1-64a^2}}{1+8a\cdot\frac{16a}{1-64a^2}}\right|=8\left|\dfrac{-64a^3-a}{64a^2+1}\right|=8|a|=|8a|$

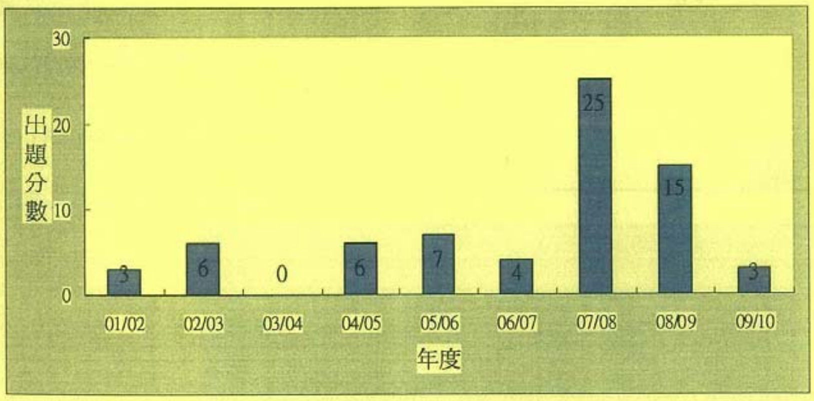
$\therefore\theta=\tan^{-1}|8a|$

7 代數不等式

考試大綱

簡易代數不等式及絕對不等式的運算。
二元線性不等式。

命題趨勢



2001/2002

3)(a)證明 $2x^2-3x+6>0$。 (3 分)

解：

$$2x^2-3x+6=2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{39}{8}\ge\frac{39}{8}>0$$，證明成立。

2002/2003

2)設 $0<a<1$，解不等式 $\log_a(\frac{3}{2})^{-x^2}+\log_a(\frac{4}{9})^{2x}<\log_a(\frac{32}{243})$。 (6 分)

解：

原不等式即 $\log_a(\frac{2}{3})^{x^2}+\log_a(\frac{2}{3})^{4x}<\log_a(\frac{2}{3})^5$

$$x^2\log_a(\frac{2}{3})+4x\log_a(\frac{2}{3})<5\log_a(\frac{2}{3})$$

$\because \log_a\frac{2}{3}>0$，$\therefore x^2+4x<5$

即 $x^2+4x-5<0$

$\therefore -5<x<1$。

2004/2005

5)(a)證明對任意正數 x 及 y，有 $x+y\ge 2\sqrt{xy}$。 (2 分)

(b)若正數 x 及 y 滿足 $xy=x+y+3$，證明 $xy\ge 9$。 (4 分)

解：

(a) $\because (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\ge 0$

$\therefore x-2\sqrt{xy}+y\ge 0$

即 $x+y\ge 2\sqrt{xy}$，證明成立。

教學備忘

比较法	作差比较	要证明 $P>Q$,只需证明 $P-Q>0$
比较法	作商比较	如果 $P,Q>0$,那么要证明 $P>Q$,只需证明 $\frac{P}{Q}>1$
综合法	利用某些已经证明过的不等式和不等式的性质推导出要证明的不等式	
分析法	从求证的不等式出发,分析这个不等式成立的充分条件,如果这些充分条件都已具备,那么断定原不等式成立	

(b)$\because xy-3=x+y\geq 2\sqrt{xy}$

$\therefore xy-2\sqrt{xy}-3\geq 0$

$(\sqrt{xy}-3)(\sqrt{xy}+1)\geq 0$

即$\sqrt{xy}-3\geq 0$，$\therefore xy\geq 9$，證明成立。

典型例題

解题方法	若 $a,b>0$, $x,y\in\mathbf{R}$，且 $a+b=1$，求证：$ax^2+by^2\geq(ax+by)^2$
比较法	$\because ax^2+by^2-(ax+by)^2=a(1-a)x^2-2abxy+b(1-b)y^2$ $=abx^2-2abxy+aby^2=ab(x-y)^2\geq 0$, $\therefore ax^2+by^2\geq(ax+by)^2$
综合法	$\because ax^2+by^2=a(a+b)x^2+b(a+b)y^2$ $=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+ab(x^2-2xy+y^2)$ $=(ax+by)^2+ab(x-y)^2\geq(ax+by)^2$, $\therefore ax^2+by^2\geq(ax+by)^2$
分析法	要证 $ax^2+by^2\geq(ax+by)^2$， 只需证 $a(1-a)x^2-2abxy+b(1-b)y^2\geq 0$，即 $ab(x-y)^2\geq 0$ $\because a,b>0$, $\therefore ab(x-y)^2\geq 0$ 成立，故 $ax^2+by^2\geq(ax+by)^2$ 成立

2005/2006

1)設 a 及 b 爲正數，且 $a+b=1$。

(1)證明 $ab\leq\frac{1}{4}$。 (2 分)

(2)求 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$ 的最小值。 (5 分)

解：

(1)$\because \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，$\therefore \frac{1}{2}\geq\sqrt{ab}$

即 $ab\leq\frac{1}{4}$，證明成立。

教學備忘

1. 如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）
2. 如果 a,b 是正数，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，即两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数. 特别：如果 a,b 是正数，则 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$

(2) $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{a^2b^2+a^2+b^2+1}{ab}=\frac{a^2b^2+(a+b)^2-2ab+1}{ab}=\frac{(1-ab)^2+1}{ab}$

$\because ab \le \frac{1}{4}$

$\therefore -ab \ge -\frac{1}{4}$

$1-ab \ge \frac{3}{4}$

$(1-ab)^2+1 \ge (\frac{3}{4})^2+1=\frac{25}{16}$ ‧ ‧ ‧(1)

又 $\frac{1}{ab} \ge 4$ ‧ ‧ ‧(2)

$(1)\times(2)$ ： $\frac{(1-ab)^2+1}{ab} \ge \frac{25}{16}\cdot 4$

$\therefore (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{(1-ab)^2+1}{ab} \ge \frac{25}{4}$

所以，$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$ 的最小值是 $\frac{25}{4}$ 。

2006/2007

2)已知函數 $f(x)=\log_a \frac{2+x}{2-x}$ ，其中 $a>1$ 。

(2)解不等式 $f(x) \ge \log_a 3x$ 。 (4 分)

解：

原不等式即 $\log_a \frac{2+x}{2-x} \ge \log_a 3x \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+x}{2-x}>0 \cdots (1) \\ 3x>0 \cdots (2) \\ \frac{2+x}{2-x} \ge 3x \cdots (3) \end{cases}$

由(1)，得： $-2<x<2$

由(2)，得： $x>0$

由(3)，得： $\frac{2+x}{2-x}-3x \ge 0 \Rightarrow \frac{3x^2-5x+2}{2-x} \ge 0 \Rightarrow \frac{(3x-2)(x-1)}{x-2} \le 0$

$\therefore x \le \frac{2}{3}$ 或 $1 \le x < 2$

綜上所述，原不等式的解爲 $0<x \le \frac{2}{3}$ 或 $1 \le x < 2$ 。

典型例題

解法	转化法：等价转化为高次不等式求解	
举例	解题步骤 \ 例题	解不等式$\frac{x^2-39}{x-2}\geq 2$.
	(1)移项、通分及分解因式	将原不等式变形为：$\frac{(x-7)(x+5)}{x-2}\geq 0$
	(2)转化为等价的高次不等式求解	$\therefore (x-2)(x-7)(x+5)\geq 0\ (x\neq 2)$
	(3)求高次不等式的解集	故不等式的解集为：$[-5,2)\cup[7,+\infty)$

2007/2008

1)解不等式$\log_2(12-2^x)\geq 5-x$。 (6 分)

解：

要使不等式有意義，則必須$12-2^x>0$，即$2^x<12$。

原不等式即$\log_2(12-2^x)\geq \log_2 2^{5-x}$

$\Rightarrow 12-2^x\geq 2^{5-x}$

$\Rightarrow 12(2^x)-(2^x)^2\geq 2^5$

$\Rightarrow (2^x)^2-12(2^x)+32\leq 0$

$\Rightarrow (2^x-8)(2^x-4)\leq 0$

$\Rightarrow 4\leq 2^x\leq 8$

$\Rightarrow 2^2\leq 2^x\leq 2^3$

$\Rightarrow 2\leq x\leq 3$

綜上所述，原不等式的解爲$2\leq x\leq 3$。

2007/2008

4)設$k>0$及$f(x)=x^3-3kx+2k\sqrt{k}$。

(a) 1.因式分解$f(x)$。[提示：$f(\sqrt{k})=0$。]

2.推算出：對任意正數x，$f(x)\geq 0$。 (5 分)

(b) 證明對任意正數a、b及c，

$$2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\leq 3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)$$

[提示：設$k=\sqrt[3]{ab}$及用(a)2.的結果。] (3 分)

解：

(a) 1.$\because f(\sqrt{k})=(\sqrt{k})^3-3k\sqrt{k}+2k\sqrt{k}=0$，$\therefore f(x)$有因式$(x-\sqrt{k})$。

以$(x-\sqrt{k})$除$f(x)$得商式$(x^2+\sqrt{k}x-2k)$；

$\therefore f(x)=(x-\sqrt{k})(x^2+\sqrt{k}x-2k)=(x-\sqrt{k})^2(x+2\sqrt{k})$。

2. 對任意正數x，都有$(x-\sqrt{k})^2(x+2\sqrt{k})\ge 0$，$\therefore f(x)\ge 0$，證明成立。

(b)原不等式可寫成$a+b-2\sqrt{ab}\le a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$

即$c-3\sqrt[3]{abc}+2\sqrt{ab}\ge 0$ ・・・(1)

設$k=\sqrt[3]{ab}$，$x=\sqrt[3]{c}$；

則$c-3\sqrt[3]{abc}+2\sqrt{ab}=x^3-3kx+2k\sqrt{k}\ge 0$。

∴不等式(1)成立，原不等式成立。

2007/2008

8)(b)證明對任意正整數n，

$$n^3<\sqrt{n^3(n+1)^3}<\frac{n^3+(n+1)^3}{2}$$ (4 分)

(c)用(a)及(b)的結果，證明對任意正整數n，

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}<\sqrt{1^3\cdot 2^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^3}+\cdots+\sqrt{n^3(n+1)^3}<\frac{[(n+1)^2-1][(n+1)^2+2]}{4}$$ (7 分)

解：

(b)$\because n^3$及$(n+1)^3$均為正整數且不相等

$$\therefore \frac{n^3+(n+1)^3}{2}>\sqrt{n^3\cdot(n+1)^3}$$

又$n^3=\sqrt{n^3\cdot n^3}<\sqrt{n^3\cdot(n+1)^3}$

$\therefore n^3<\sqrt{n^3(n+1)^3}<\dfrac{n^3+(n+1)^3}{2}$，證明成立。

(c)利用(b)的結論，令$n=1,2,3,\cdots$得

$$1^3<\sqrt{1^3\cdot 2^3}<\frac{1^3+2^3}{2}$$

$$2^3<\sqrt{2^3\cdot 3^3}<\frac{2^3+3^3}{2}$$

$$3^3<\sqrt{3^3\cdot 4^3}<\frac{3^3+4^3}{2}$$

· · ·　· · ·

$$n^3<\sqrt{n^3(n+1)^3}<\frac{n^3+(n+1)^3}{2}$$

上面n個式子相加：

$$1^3+2^3+\cdots+n^3<\sqrt{1^3\cdot 2^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^3}+\cdots+\sqrt{n^3(n+1)^3}<1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3-\frac{1^3}{2}-\frac{(n+1)^3}{2}$$

利用(a)的結論，得：

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}<\sqrt{1^3\cdot 2^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^3}+\cdots+\sqrt{n^3(n+1)^3}<\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}-\frac{2(n+1)^3+2}{4}$$

即

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}<\sqrt{1^3\cdot 2^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^3}+\cdots+\sqrt{n^3(n+1)^3}<\frac{(n+1)^2[(n+1)^2+2(n+1)+1]}{4}-\frac{2(n+1)^3+2}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{n^2(n+1)^2}{4}<\sqrt{1^3\cdot 2^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^3}+\cdots+\sqrt{n^3(n+1)^3}<\frac{(n+1)^4+(n+1)^2-2}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{n^2(n+1)^2}{4}<\sqrt{1^3\cdot 2^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^3}+\cdots+\sqrt{n^3(n+1)^3}<\frac{[(n+1)^2-1][(n+1)^2+2]}{4}$$

2008/2009

3)(b)求實數x的範圍，使得$\log_{2x}x+\log_{4x}x>0$。 (6 分)

解：

令$u=\log_x 2$，原不等式即$\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1+2u}>0$

$$\Rightarrow\frac{3u+2}{(u+1)(2u+1)}>0$$

$$\Rightarrow -1<u<-\frac{2}{3}\text{或}u>-\frac{1}{2}$$

即$-1<\log_x 2<-\frac{2}{3}$ · · · (1)或$\log_x 2>-\frac{1}{2}$ · · · (2)

由(1)：$-\frac{3}{2}<\log_2 x<-1 \Rightarrow 2^{-\frac{3}{2}}<x<2^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}<x<\frac{1}{2}$

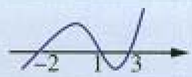
由(2)：$\begin{cases}\log_x 2<0\\ \log_2 x<-2\end{cases}$ 或 $\log_x 2>0$

$\Rightarrow \begin{cases}\log_2 x<0\\ \log_2 x<-2\end{cases}$ 或 $\log_2 x>0$

$\Rightarrow 0<x<2^{-2}$ 或 $x>1$

$\Rightarrow 0<x<\frac{1}{4}$ 或 $x>1$

典型例題

例 题 / 解题步骤	解不等式 $x^3-2x^2+6>5x$
(1)移项分解因式	将原不等式变形为：$(x+2)(x-1)(x-3)>0$
(2)找根用数轴画图	
(3)根据不等式符号和所画图形写出解集	故不等式解集为$(-2,1)\cup(3,+\infty)$

綜合(1)、(2)：所求 x 的範圍是 $0<x<\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{2\sqrt{2}}<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$。

2008/2009

4)(b)求最小的 n 使得 $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\ge\frac{6}{25}$。 (3 分)

解：

由(a)知：$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

原不等式即 $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\ge\frac{6}{25}$

$\because n$ 為正整數

$\therefore 25\cdot n(n+3)\ge 6\cdot 4(n+1)(n+2)$

即 $n^2+3n-48\ge 0$

$\therefore n\le\frac{-3-\sqrt{3^2-4(-48)}}{2}\approx-8.6$ (不合)或 $n\ge\frac{-3+\sqrt{3^2-4(-48)}}{2}\approx 5.6$

所求最小的 $n=6$。

2008/2009

10(a)一高為 h cm、半徑為 r cm 的正圓錐，其體積為 $2\pi\,\text{cm}^3$。設該圓錐的側面積為 $A\,\text{cm}^2$。

2.求 A^2 的最小值。由此，求 A 的最小值。 (6 分)

解：

教學備忘

如果 x,y 是正数，积 xy 是定值 P，和 $x+y$ 有最大值 $2\sqrt{P}$

如果 x,y 是正数，和 $x+y$ 是定值 P，积 xy 有最小值 $(\frac{a+b}{2})^2$

注意：上述取到最值的条件是："一正二定三相等"，缺一不可. 如 α 是锐角，$\frac{1}{4\sin\alpha}+\sin\alpha$ 的最小值为 1，但 $\frac{4}{\sin\alpha}+\sin\alpha$ 的最小值不是 4，而是 5.

由 1.知，$A^2=\pi^2(r^4+\frac{36}{r^2})$

$\because r^4+\frac{18}{r^2}+\frac{18}{r^2}\geq 3\cdot\sqrt[3]{r^4\cdot\frac{18}{r^2}\cdot\frac{18}{r^2}}=3\cdot 18^{\frac{2}{3}}$ (當且僅當 $r^4=\frac{18}{r^2}$ 時，等號成立)

$\therefore A^2=\pi^2(r^4+\frac{36}{r^2})\geq 3\cdot 18^{\frac{2}{3}}\pi^2$

所以，當 $r=\sqrt[6]{18}$ 時，A^2 有最小值 $3\cdot 18^{\frac{2}{3}}\pi^2$；此時 A 有最小值 $\pi\sqrt{3}\cdot 18^{\frac{1}{3}}$。

2009/2010

4)(a)設 $x>0$。證明 $2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x+1}>0$。 (3 分)

解：

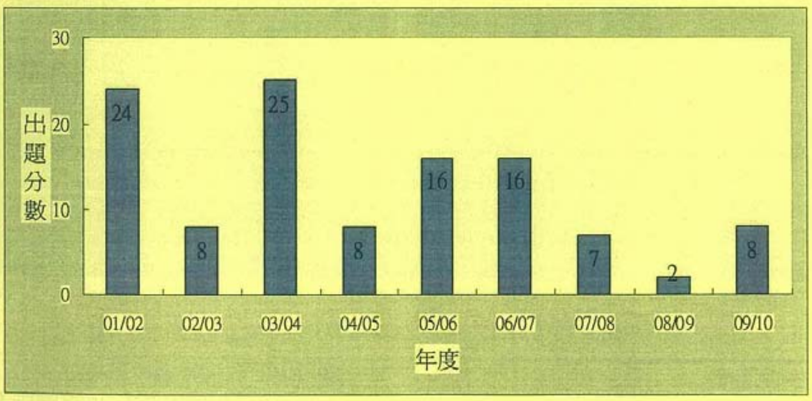
$$2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x+1}=\frac{2x+1-2\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}>0$$，證明成立。

8 三　角

考試大綱

弧度、弧與扇形。
三角函數。恆等式。
正弦及餘弦定律。
複合角公式。
反三角函數。三角函數方程及其通解。
$a\cos\theta+b\sin\theta$ 式。
三角形之面積。

命題趨勢



2001/2002

(a)設 $\tan\alpha = \dfrac{-1}{2}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 。

(b)化簡 $\sin(2\arctan x)$ 。

(8 分)

解：

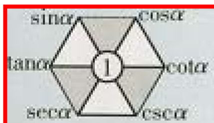
(a)當 α 爲第二象限時，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ，$\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 。

當 α 爲第四象限時，$\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ，$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 。

(b)令 $\arctan x = \theta\ (-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2})$，則 $\tan\theta = x$ 。

$\therefore \sin(2\arctan x) = \sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1+x^2}$ 。

公式小結



(1)平方关系式：$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$，$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$，$1 + \cot^2 = \csc^2\alpha$

(2)商数关系式：$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

(3)倒数关系式：$\sin\alpha\csc\alpha = 1$，$\cos\alpha\sec\alpha = 1$，$\tan\alpha\cot\alpha = 1$

三个“倒置阴影”三角形上方两个三角函数的平方和等于其下方函数值的平方，如 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$；

沿六边形边上任意相邻三个顶点的三角函数值，依顺时针方向，第一个值等于第二个值除以第三个值的商，如 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$；

六边形对角线上两端三角函数值的积等于1，如 $\tan\alpha\cot\alpha = 1$

2001/2002

(a)設 $0 \le \alpha < 2\pi$ ，若以 x 爲未知量的方程

$3x^2 + (4\sin\alpha)x - 2\cos\alpha = 0$

有重根，求 α 。 (8 分)

(b)利用 $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ ，證明

$(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x)\sin x = \cos 5x \sin 4x$ 。

由此證明

$\cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5} + \cos\dfrac{12\pi}{5} + \cos\dfrac{16\pi}{5} = -1$ 。 (8 分)

解：

(a)由△＝0，得：$(4\sin\alpha)^2-4(3)(-2\cos\alpha)=0$

即 $2\cos^2\alpha-3\cos\alpha-2=0$

$(2\cos\alpha+1)(\cos\alpha-2)=0$

$\therefore \cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\alpha=2$ (不合)

$\because 0\le\alpha<2\pi$，$\therefore \alpha=\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\dfrac{4\pi}{3}$。

(b)左式 $=\cos 2x\sin x+\cos 4x\sin x+\cos 6x\sin x+\cos 8x\sin x$

$$=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)+\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin 3x)+\frac{1}{2}(\sin 7x-\sin 5x)+\frac{1}{2}(\sin 9x-\sin 7x)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 9x-\sin x)$$

$=\cos 5x\sin 4x=$ 右式

∴證明成立。

令 $x=\dfrac{2\pi}{5}$ 代入 $(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x)\sin x=\cos 5x\sin 4x$，得：

$$(\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+\cos\frac{12\pi}{5}+\cos\frac{16\pi}{5})\sin\frac{2\pi}{5}=\cos 2\pi\sin\frac{8\pi}{5}$$

即 $(\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{8\pi}{5}+\cos\dfrac{12\pi}{5}+\cos\dfrac{16\pi}{5})\sin\dfrac{2\pi}{5}=1\cdot(-\sin\dfrac{2\pi}{5})$

$\therefore \cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{8\pi}{5}+\cos\dfrac{12\pi}{5}+\cos\dfrac{16\pi}{5}=-1$。

2002/2003

(1)設 $t=\tan x$，以 t 表 $\sin 2x$。

(2)求 $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=1+\sin 2x$ 的通解。

(8 分)

解：

(1) $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\tan x\cos^2 x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\dfrac{2t}{1+t^2}$。

公式小結

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(2)令 $t=\tan x$，原方程可寫成 $\dfrac{1+t}{1-t}=1+\dfrac{2t}{1+t^2}$，化簡得：

$t^2(1+t)=0$

$\therefore t=0$ 或 $t=-1$

即 $\tan x=0$ 或 $\tan x=-1$

$\therefore x=k\pi$ 或 $x=k\pi-\dfrac{\pi}{4}$，$k\in Z$。

2003/2004

若 $\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$，且 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{5}{9}$，求 $\sin 2\alpha$。 (6 分)

解：

由已知條件，得：$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\dfrac{5}{9}$

即 $1-\dfrac{1}{2}(\sin 2\alpha)^2=\dfrac{5}{9}$

$\therefore \sin 2\alpha=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\because \pi\le 2\alpha\le 2\pi$，$\therefore \sin 2\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$。

2003/2004

(a)求 $f(x)=\sec(2\arcsin\dfrac{1}{x})$ 的定義域。 (4 分)

(b)化簡 $\sec(2\arcsin\dfrac{1}{x})$。 (4 分)

解：

(a)解 $-1\le\dfrac{1}{x}\le 1$，得：$x\le -1$ 或 $x\ge 1$ ・・・(1)

函數 $y=\sec x$ 的定義域為 $\{x：x\in R$ 且 $x\ne k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z\}$

$\therefore 2\arcsin\dfrac{1}{x}\ne k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

即 $\arcsin\dfrac{1}{x}\ne\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$，但 $\arcsin\dfrac{1}{x}\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$

$\therefore \arcsin\frac{1}{x} \neq -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$\therefore x \neq \pm\sqrt{2}$ ・・・(2)

綜合(1)、(2)，所求 $f(x)$ 的定義域爲$\{x：x \leq -1$或$x \geq 1$，且$x \neq \pm\sqrt{2}\}$。

教學備忘

反正弦	在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上,符合条件 $\sin x = a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$的角 x,叫做实数 a 的反正弦,记作 $\arcsin a$,即 $x = \arcsin a$. 例如$\frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{3\pi}{4} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$
反余弦	在区间$[0,\pi]$上,符合条件 $\cos x = a$ $(-1 \leqslant a \leqslant 1)$的角 x 叫做实数 a 的反余弦,记作 $\arccos a$,即 $x = \arccos a$. 例如$\frac{\pi}{3} = \arccos\frac{1}{2}$, $\frac{5\pi}{6} = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$
反正切	在区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上,符合条件 $\tan x = a$ (a 为任意实数)的角 x 叫做实数 a 的反正切,记作 $\arctan a$,即 $x = \arctan a$. 例如$\frac{\pi}{3} = \arctan\sqrt{3}$, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \arctan\sqrt{3}$

(b)令$\arcsin\frac{1}{x} = \theta\ (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$，則$\sin\theta = \frac{1}{x}$。

$\therefore \sec(2\arcsin\frac{1}{x}) = \sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{1}{1-2\sin^2\theta} = \frac{1}{1-2(\frac{1}{x})^2} = \frac{x^2}{x^2-2}$。

2003/2004

(b)利用(a)，證明方程 $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ 的根爲$\cos\frac{\pi}{10}$，$\cos\frac{3\pi}{10}$，$\cos\frac{7\pi}{10}$及$\cos\frac{9\pi}{10}$。 (6 分)

(c)由此，求$\cos\frac{7\pi}{10}$，且答案以根式表示。 (5 分)

解：

(b)令$x = \cos\alpha\ (\cos\alpha \neq 0)$，原方程即$16\cos^4\alpha - 20\cos^2\alpha + 5 = 0$

方程兩邊乘以$\cos\alpha$：

$\cos\alpha \cdot (16\cos^4\alpha - 20\cos^2\alpha + 5) = 0$

即$\cos 5\alpha = 0$

$\therefore 5\alpha = k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z$

$\therefore \alpha = \dfrac{k\pi}{5} + \dfrac{\pi}{10}, k \in Z$

取 $k = 0,1,3,4$ ，得 $\alpha = \dfrac{\pi}{10}, \dfrac{3\pi}{10}, \dfrac{7\pi}{10}, \dfrac{9\pi}{10}$

$\therefore x = \cos\dfrac{\pi}{10}, \cos\dfrac{3\pi}{10}, \cos\dfrac{7\pi}{10}, \cos\dfrac{9\pi}{10}$

(c)由方程 $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$

得 $x^2 = \dfrac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4\cdot 16\cdot 5}}{2\cdot 16} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$

$\therefore x = \pm\sqrt{\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$

$\because \cos\dfrac{\pi}{10} > \cos\dfrac{3\pi}{10} > \cos\dfrac{7\pi}{10} > \cos\dfrac{9\pi}{10}$

$\therefore \cos\dfrac{7\pi}{10} = -\sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}}$

2004/2005

設 $0 < \theta < \pi$ 及 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{5}$ 。

(a)證明 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{7}{5}$ 。 (5 分)

(b)求 $\tan\theta$ 。 (3 分)

解：

(a)由 $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = (\dfrac{1}{5})^2$ ，得 $1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{25}$

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{24}{25}$

$\because (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 - (-\dfrac{24}{25}) = \dfrac{49}{25}$

$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{49}{25}} = \pm\dfrac{7}{5}$

$\because 2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{24}{25}$，且 $0<\theta<\pi$

$\therefore \cos\theta<0$ ， $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{7}{5}$，證明成立。

(b)解 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}\\ \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{7}{5}\end{cases}$，得： $\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{4}{5}\\ \cos\theta=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$ ，$\therefore \tan\theta=-\dfrac{4}{3}$ 。

2005/2006

(a) 1.求方程 $\cos 4\theta=0$ 的通解。 (2 分)

2.以 $\cos\theta$ 表 $\cos 4\theta$ 。 (4 分)

3.用(1)及(2)，求 $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ ，答案以方根表示。 (4 分)

(b) 1.證明 $\arctan x+\arctan y=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ ，其中 $xy\neq 1$ 。 (2 分)

2.用(b)1.的結果，證明：若 $\arctan x+\arctan y+\arctan z=0$ ，則 $x+y+z=xyz$ 。(4 分)

解：

(a) 1.由 $\cos 4\theta=0$ ，得： $4\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$

$\therefore \theta=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{8}(k\in Z)$ 。

2. $$\begin{aligned}\cos 4\theta&=2\cos^2 2\theta-1\\&=2(2\cos^2\theta-1)^2-1\\&=2(4\cos^4\theta-4\cos^2\theta+1)-1\\&=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1\end{aligned}$$

3.由(a) 1.的結論，方程 $\cos 4\theta=0$ 四個不同的根 $\theta=\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{7\pi}{8}$

由(a) 2.的結論，得： $8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=0$

$$\therefore \cos^2\theta=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(8)(1)}}{2\cdot 8}=\frac{8\pm\sqrt{32}}{16}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$$

即 $\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}}$

$\because \cos\dfrac{7\pi}{8} < \cos\dfrac{5\pi}{8} < 0 < \cos\dfrac{3\pi}{8} < \cos\dfrac{\pi}{8}$

$\therefore \cos\dfrac{3\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}$ 。

(b) 1.令 $\alpha = \arctan x$ ， $\beta = \arctan y$ $(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2})$，則 $\tan\alpha = x$ ， $\tan\beta = y$ 。

$\because \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

$\therefore \alpha + \beta = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$

即 $\arctan x + \arctan y = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ ，證明成立。

2.由 $\arctan x + \arctan y + \arctan z = 0$

得 $\arctan x + \arctan y = \arctan(-z)$

利用(b) 1.的結論，得： $\arctan\dfrac{x+y}{1-xy} = \arctan(-z)$

$\therefore \dfrac{x+y}{1-xy} = -z$ ，即 $x+y+z = xyz$ ，證明成立。

2006/2007

(a)已知 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ ，且 $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha = 2\cos^2\alpha$ 。

求 $\sin\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 的值。 (6 分)

(b)已知 $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ 。

1.試比較 $\sin\gamma$ 與 $\sin(\beta+\gamma)$ 的大小。 (2 分)

2.設 $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2}$ 及 $\sin(\beta+\gamma) = \dfrac{5}{13}$ ，求 $\cos\gamma$ 的值。(求解過程中不得使用計算器)

[提示： $\cos\gamma = \cos[(\beta+\gamma)-\beta]$] (8 分)

解：

(a)由 $\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha = 0$

得 $(\sin 2\alpha + 2\cos\alpha)(\sin 2\alpha - \cos\alpha) = 0$

$\sin 2\alpha + 2\cos\alpha = 0$ 或 $\sin 2\alpha - \cos\alpha = 0$

$\because \cos\alpha \neq 0$

$\therefore \sin\alpha + 1 = 0$ (不合)或 $2\sin\alpha - 1 = 0$

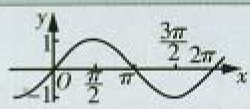
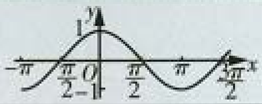
$\therefore \sin\alpha = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(b) 1. $\because \dfrac{\pi}{2} < \gamma < \beta + \gamma < \dfrac{3\pi}{2}$，且 $y = \sin x$ 在區間$[\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{3\pi}{2}]$上爲減函數。

$\therefore \sin\gamma > \sin(\beta + \gamma)$。

教學備忘

函　数	正弦函数	余弦函数
图　像		
定义域	**R**	**R**
值　域	$[-1,1]$，最大值为 1，最小值为 -1	$[-1,1]$，最大值为 1，最小值为 -1
周期性	周期为 2π	周期为 2π
奇偶性	奇函数	偶函数
单调性	在$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上都是增函数；在$[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上都是减函数	在$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上都是增函数；在$[2k\pi, (2k+1)\pi]$ $(k \in \mathbf{Z})$ 上都是减函数

2. $\because \cos(\beta+\gamma) = -\sqrt{1-\sin^2(\beta+\gamma)} = -\sqrt{1-(\dfrac{5}{13})^2} = -\dfrac{12}{13}$

$$\cos\beta = \frac{1-\tan^2\dfrac{\beta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\beta}{2}} = \frac{1-(\dfrac{1}{2})^2}{1+(\dfrac{1}{2})^2} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$$

$\therefore \cos\gamma = \cos[(\beta+\gamma)-\beta]$

$= \cos(\beta+\gamma)\cos\beta + \sin(\beta+\gamma)\sin\beta$

$$=-\frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}+\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5}$$

$$=-\frac{16}{65}$$

2007/2008

(a)證明 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{1+\sin 4x}{2}$。 (4 分)

(b)求 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ 的通解。 (3 分)

解：

(a)左式 $=\frac{1}{2}[\sin(2x+\frac{\pi}{4}+2x-\frac{\pi}{4})+\sin(2x+\frac{\pi}{4}-2x+\frac{\pi}{4})]$

$=\frac{1}{2}[\sin 4x+\sin\frac{\pi}{2}]=\frac{\sin 4x+1}{2}=$ 右式，證明成立。

典型例題

例题 / 解题步骤	求证：$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$
(1)转化分母	由 $\cos x\neq 0$，知 $\sin x\neq -1$，∴ 所以 $1+\sin x\neq 0$ 左边 $=\frac{\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$ $=\frac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$
(2)化简整理	左边 $=\frac{1+\sin x}{\cos x}=$ 右边
(3)说明结论	所以 $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$

证明一个等式,可以从它的任何一边开始,证得它等于另一边;还可以先证得另一个等式成立,从而推出需要证明的等式成立.
三角函数恒等式的证明方法常有多种

(b)利用(a)的結論，原方程可寫成：$\frac{1+\sin 4x}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$，化簡得：

$$\sin 4x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore 4x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}(k\in Z)$$

$$\therefore x=\frac{k\pi}{4}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{16}(k\in Z)$$

2008/2009

(a)設有恆等式 $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x = A\sin(2x+\theta)$ ，其中 $A>0$ 及 $0\le\theta<2\pi$ 爲常數。求 A 及 θ 。 (2 分)

解：

(a) $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x = 2(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}) = 2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

$\therefore A=2$ ， $\theta=\frac{\pi}{6}$ 。

公式小結

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\cos\beta}{1\mp\tan\alpha\cos\beta}$

典型例題

解题步骤 / 例题	化简 $\sin50°(1+\sqrt{3}\tan10°)$
(1)函数名转换(切化弦)	原式 $=\sin50°(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin10°}{\cos10°})$
(2)创设公式结构,整理转化	$=\sin50°\cdot\dfrac{2(\frac{1}{2}\cos10°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10°)}{\cos10°}=2\sin50°\cdot\dfrac{\sin40°}{\cos10°}$
(3)转变角的大小,沟通求解	$=2\cos40°\cdot\dfrac{\sin40°}{\cos10°}=\dfrac{\sin80°}{\cos10°}=1$

2009/2010

(a)設 $\tan\theta>1$ 。若 $\tan\theta+\cot\theta=4$ ，求 $\cos\theta$ 。 (4 分)

(b)證明恒等式 $\dfrac{\tan(A+B)-\tan A}{1+\tan B\tan(A+B)}=\dfrac{\sin B\cos B}{\cos^2 A}$ 。 (4 分)

解：

(a)由已知條件，得： $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$

即 $\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=4$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

將$\sin\theta=\dfrac{1}{4\cos\theta}$代入$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，並化簡得：

$16\cos^4\theta-16\cos^2\theta+1=0$

$\therefore\cos^2\theta=\dfrac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot16\cdot1}}{2\cdot16}=\dfrac{16\pm8\sqrt{3}}{32}=\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{8}=\dfrac{(\sqrt{3}\pm1)^2}{8}$

$\therefore\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}\pm1}{2\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$

$\because\tan\theta>1$

$\therefore\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$或$-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 。

(b)左式$=\dfrac{\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}-\dfrac{\sin A}{\cos A}}{1+\dfrac{\sin B}{\cos B}\cdot\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}}=\dfrac{\dfrac{\sin(A+B)\cos A-\cos(A+B)\sin A}{\cos(A+B)\cos A}}{\dfrac{\cos B\cos(A+B)+\sin B\sin(A+B)}{\cos B\cos(A+B)}}$

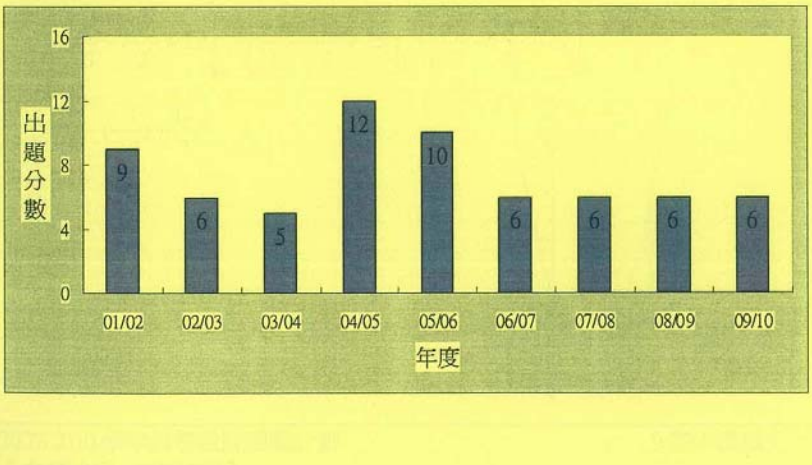
$=\dfrac{\dfrac{\sin B}{\cos A}}{\dfrac{\cos A}{\cos B}}=\dfrac{\sin B\cos B}{\cos^2 A}=$右式，證明成立。

9 基本微積分

考試大綱

多項式的和、差、積、商的微分法。
極大值、極小值及拐點。
多項式的不定積分。
定積分的簡易性質。
利用定積分計算面積。

命題趨勢



2001/2002

給出曲線 C： $y = x^2 + ax + 12$

3.求在第一象限中由 x 軸， y 軸，曲線 C 及 2.中的切線所包圍的區域的面積。(9 分)

解：

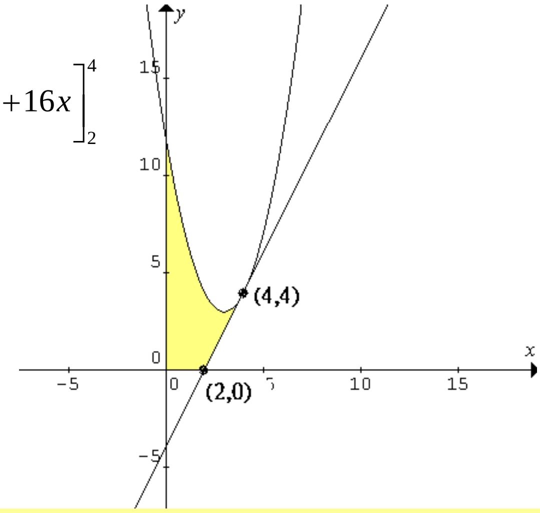
由 1.和 2.知，曲線 C： $y = x^2 - 6x + 12$ 及切線 $y = 2x - 4$ 。

$$\text{所求面積} = \int_0^2 (x^2 - 6x + 12)dx + \int_2^4 [(x^2 - 6x + 12) - (2x - 4)]dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 12x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x\right]_2^4$$

$$= \frac{44}{3} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{52}{3}$$



2002/2003

(b)求： $\int_0^4 |x^2 - 3x + 2| dx$ 。 (6 分)

解：

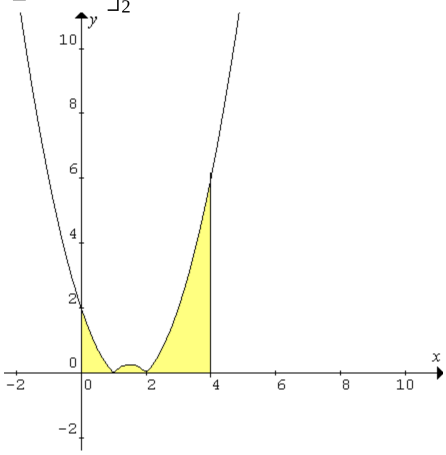
$$\text{原式} = \int_0^4 |(x-2)(x-1)| dx$$

$$= \int_0^1 (x-2)(x-1)dx - \int_1^2 (x-2)(x-1)dx + \int_2^4 (x-2)(x-1)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^4$$

$$= \frac{5}{6} - (-\frac{1}{6}) + \frac{14}{3}$$

$$= \frac{17}{3}$$



2003/2004

給出曲線 $y = x(x-a)(x-b)$，其中 a 和 b 是正數

(c)求曲線與 x 軸所包圍的面積。 (5 分)

解：

由(a)知，曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ ；

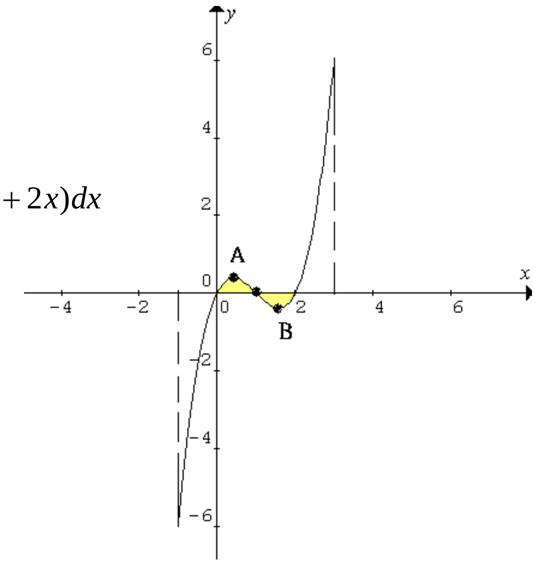
$$\text{所求面積} = \int_0^2 \left| x^3 - 3x^2 + 2x \right| dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4})$$

$$= \frac{1}{2}$$



2004/2005

(a)已知函數 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ 。

1.求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 。 (2 分)

2.求 $f(x)$ 的局部極大點，局部極小點和拐點。 (4 分)

(b)求由直線 $y = 1$ 及曲線 $y = x^2$ 和 $y = \dfrac{x^2}{4}$ 於第一象限內所包圍的區域的面積。

(6 分)

解：

(a) 1. $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ ； $f''(x) = 6x - 18$ 。

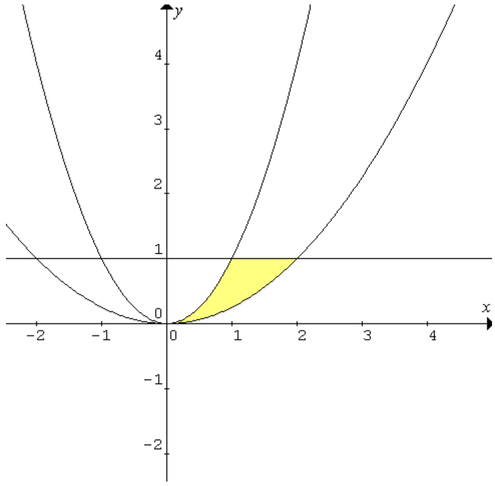
2.令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = 2$ 或 $x = 4$ ；

令 $f''(x) = 0$ ，得 $x = 3$ 。

x	$(-\infty,2)$	2	(2,3)	3	(3,4)	4	$(4,+\infty)$
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−		−	0	+		+
y		20		18		16	

如表所示，極大點爲(2，20)，極小點爲(4，16)；拐點爲(3，18)。

(b)解 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = 1 \end{cases}$，分別得交點座標(1，1)和(2，1)；



所求面積 $= \int_0^1 (2\sqrt{y} - \sqrt{y})dy$

$= \int_0^1 \sqrt{y}dy$

$= \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$= \frac{2}{3}$

2005/2006

(a)曲線 C： $y = x^3 + 1$在點$(-1$，0)的切線與曲線 C 有另一交點
求：由曲線 C 與上述切線所包圍的區域的面積。 (10 分)

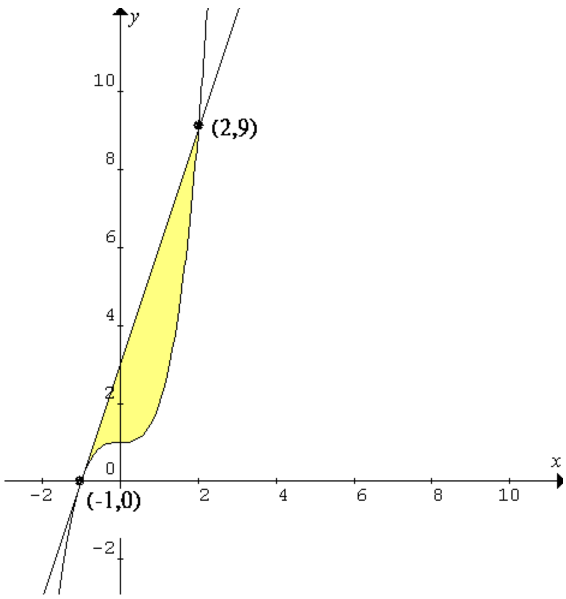
解：

(a)曲線 C： $y = x^3 + 1$在點$(-1$，0)的切線的斜率：

$y' = 3x^2$ ； $y'|_{x=-1} = 3(-1)^2 = 3$

$\therefore$切線方程爲 $y = 3(x+1)$ ，即 $y = 3x + 3$ 。

解 $\begin{cases} y = x^3 + 1 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$，得交點座標 $(x, y) = (-1, 0)$ 或 $(2, 9)$ ；



所求面積 $= \int_{-1}^{2} [(3x+3) - (x^3+1)]dx$

$= \int_{-1}^{2} [-x^3 + 3x + 2]dx$

$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{27}{4}$

2006/2007

(b)設 $0 \le a \le 1$，問當 a 為何值時 $\int_0^1 |x-a|dx$ 的值為最小？ (6 分)

解：

$$\int_0^1 |x-a|dx = \int_0^a (a-x)dx + \int_a^1 (x-a)dx$$

$$= \left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_0^a + \left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^1$$

$$= (\frac{a^2}{2}) + (\frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2})$$

$$= a^2 - a + \frac{1}{2}$$

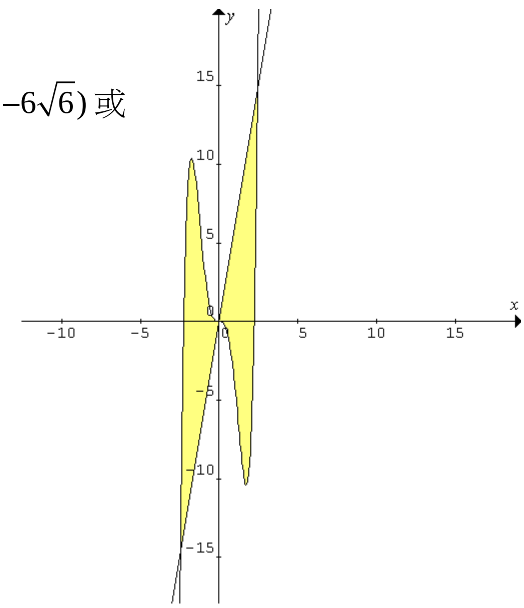
$$= (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

當 $a = \frac{1}{2}$ 時，$\int_0^1 |x-a|dx$ 有最小值 $\frac{1}{4}$ 。

2007/2008

(b)求由曲線 $y = x^5 - 5x^3$ 及直線 $y = 6x$ 所包圍的面積。 (6 分)

解：



解 $\begin{cases} y = x^5 - 5x^3 \\ y = 6x \end{cases}$，得交點座標 $(x,y) = (-\sqrt{6}, -6\sqrt{6})$ 或

$(0,0)$ 或 $(\sqrt{6}, 6\sqrt{6})$ 。

如圖所示，圖形面積關於原點對稱；

所求面積 $= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{6}} \left[6x - (x^5 - 5x^3)\right]dx$

$$= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{6}} [-x^5 + 5x^3 + 6x]dx$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^6}{6} + \frac{5x^4}{4} + 3x^2\right]_0^{\sqrt{6}}$$

$= 2 \times 27$

$= 54$

2008/2009

(b)計算 $\int_{-1}^{2} \left| |x| - x^2 \right| dx$ 。 (6 分)

解：

$$原式 = \int_{-1}^{0} (|x| - x^2) dx + \int_{0}^{1} (|x| - x^2) dx + \int_{1}^{2} (x^2 - |x|) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x - x^2) dx + \int_{0}^{1} (x - x^2) dx + \int_{1}^{2} (x^2 - x) dx$$

$$= [-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0} + [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_{0}^{1} + [\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{1}^{2}$$

$$= \frac{7}{6}$$

2009/2010

(b)設 $0 < a < 1$。求由曲線 $y = \pi(x^2 - x^3)$ 及 $y = \pi a x^2$ 所包圍的面積。 (6 分)

解：

解 $y = \pi(x^2 - x^3)$ 及 $y = \pi a x^2$ ，得交點 x 座標爲 $x = 0$ 或 $x = 1 - a$ ；

$\because 0 < a < 1$ ，$\therefore 0 < 1 - a < 1$ 。

$$所求面積 = \int_{0}^{1-a} \left| \pi(x^2 - x^3) - \pi a x^2 \right| dx$$

$$= \pi \int_{0}^{1-a} \left| x^2 (1 - a - x) \right| dx$$

$$= \pi \int_{0}^{1-a} (x^2 - a x^2 - x^3) dx$$

$$= \pi [\frac{x^3}{3} - \frac{a x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_{0}^{1-a}$$

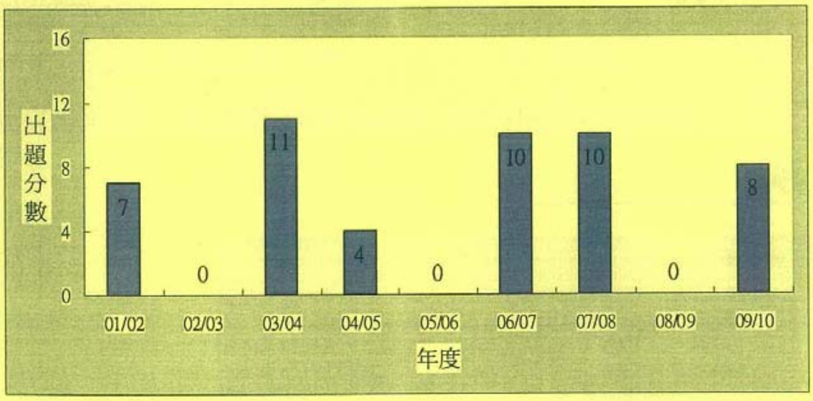
$$= \frac{\pi (1-a)^4}{12}$$

10 曲線的描繪

考試大綱

偶、奇及週期函數。
導數的應用。

命題趨勢



2001/2002

給出曲線 C： $y = x^2 + ax + 12$

1.當 $x = 4$ ，曲線的切線的斜率是 2，求 a 。(4 分)

2.寫出 1.中切線的方程。(3 分)

解：

1. $\because y' = 2x + a$

$\therefore y'|_{x=4} = 2(4) + a = 2$ ，即 $a = -6$ 。

2. 曲線 C： $y = x^2 - 6x + 12$

當 $x = 4$ 時， $y = 4^2 - 6 \cdot 4 + 12 = 4$ ；

所求的切線方程爲 $y - 4 = 2(x - 4)$ ，即 $y = 2x - 4$ 。

教學備忘

设函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处附近有定义，当自变量在 $x = x_0$ 处有增量 Δx 时，则函数 $y = f(x)$ 也相应地有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$；如果 $\Delta x \to 0$ 时 Δy 与 Δx 的比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$（也叫函数的平均变化率）有极限（即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于某个常数），我们把这个极限值叫做 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数，记为

$y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

一般地，函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数，是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的切线的斜率

2003/2004

給出曲線 $y = x(x - a)(x - b)$ ，其中 a 和 b 是正數

(a)設 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = -1$ 及 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=b} = 2$ ，求 a 和 b 。　(4 分)

(b)對 $-1 \le x \le 3$ ，繪出曲線，圖中給出局部極值點和拐點。 (7 分)

解：

公式小結

函　　数	函数的导数
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$ 注意：常函数的导数为 0
$y = f(x) + g(x)$ $y = f(x) - g(x)$ $y = cf(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$ $y' = f'(x) - g'(x)$ $y' = cf'(x)$
$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$	$y' = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$

(a) $y=x(x-a)(x-b)=x^3-(a+b)x^2+abx$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[x^3-(a+b)x^2+abx\right]=3x^2-2(a+b)x+ab$$

$\because \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}=-1$，$\therefore 3a^2-2(a+b)a+ab=-1$ ，即 $a(a-b)=-1$

$\because \frac{dy}{dx}\Big|_{x=b}=2$，$\therefore 3b^2-2(a+b)b+ab=2$ ，即 $b(b-a)=2$

解得： $a=1$ ，$b=2$ 。

教學備忘

多项式函数的导数与单调性的关系	$f(x)$在(a,b)上,满足$f'(x)>0 \Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$上是增函数	
	$f(x)$在(a,b)上,满足$f'(x)<0 \Leftrightarrow f(x)$在$(a,b)$上是减函数	
极值的意义	函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的值大(小)于在 $x=x_0$ 附近的值,称 $y=f(x_0)$为函数的极大(小)值	
极值的判定	多项式函数极值的判定:(1)在 $x=x_0$ 处导数为0;(2)在 $x=x_0$ 两侧导数异号	
	若左边是正数,右边是负数,则函数在该处有极大值	若左边是负数,右边是正数,则函数在该处有极小值

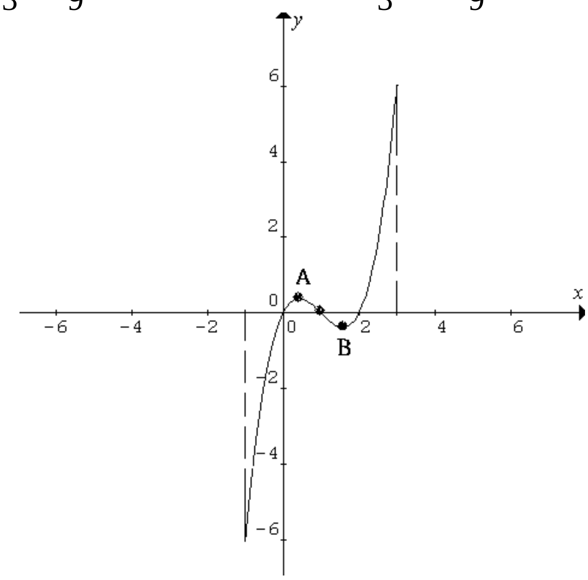
(b)曲線 $y=x^3-3x^2+2x$

$y'=3x^2-6x+2$ ； $y''=6x-6$

令 $y'=0$ ，得 $x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ ；令 $y''=0$ ，得 $x=1$

x	區間內	$1-\sqrt{3}/3$	區間內	1	區間內	$1+\sqrt{3}/3$	區間內
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−		−	0	+		+
y		$2\sqrt{3}/9$		0		$-2\sqrt{3}/9$	

如圖所示， $A(1-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9})$ 爲極大點， $B(1+\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9})$ 爲極小點；拐點爲 $(1,0)$ 。



2004/2005

(a)已知函數 $f(x)=x^3-9x^2+24x$。

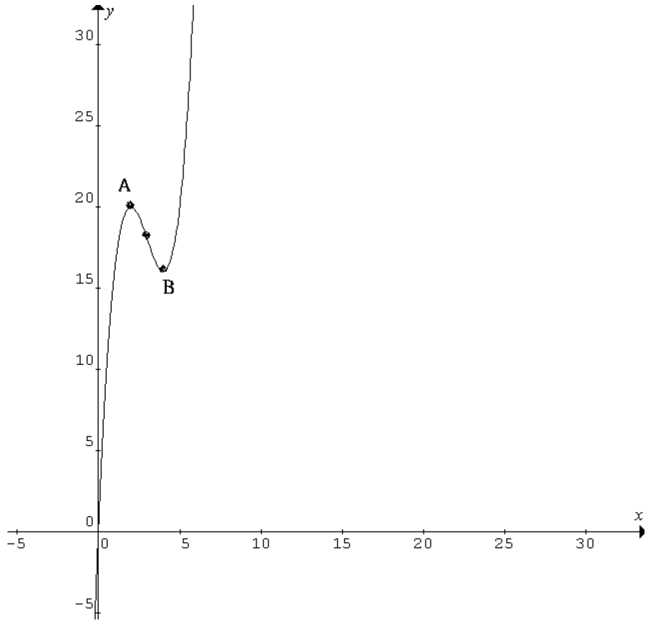
3.繪出 $f(x)$ 的圖像。 (2 分)

4.從 $f(x)$ 的圖像，求實數 a 的範圍使得方程 $x^3-9x^2+24x-a=0$ 只有一實根。 (2 分)

解：

3.及 4.

如圖所示，極大點為 A(2，20)，極小點為 B(4，16)；當 $a<16$ 或 $a>20$ 時，函數 $g(x)=x^3-9x^2+24x-a$ 的圖像與 x 軸總有一交點，此時使得方程 $x^3-9x^2+24x-a=0$ 只有一實根。



2006/2007

(a)設 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$。

1.證明 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$。 (3 分)

2.繪出曲線 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$，圖中給出局部極大值，局部極小值和拐點。 (7 分)

解：

(a)1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$；

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right]=\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$$

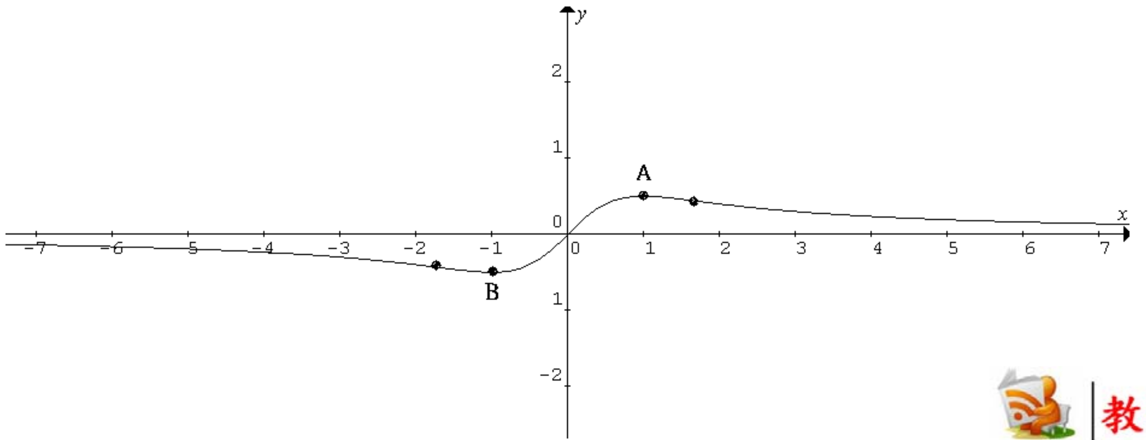
$$= \frac{-(x^2+1)[2x^3+2x+4x-4x^3]}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

2.令 $\frac{dy}{dx}=0$，得 $x=\pm 1$；令 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$，得 $x=0$ 或 $x=\sqrt{3}$。

x	區間內	$-\sqrt{3}$	區間內	-1	區間內	0	區間內	1	區間內	$\sqrt{3}$	區間內
y'	－		－	0	＋		＋	0	－		－
y''	－	0	＋		＋	0	－		－	0	＋
y		$-\sqrt{3}/4$		$-1/2$		0		$1/2$		$\sqrt{3}/4$	

如圖所示，點 A 有極大值 $\frac{1}{2}$，點 B 有極小值 $-\frac{1}{2}$；拐點爲 $(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4})$ 及 $(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$。



教學備忘

函数最值的意义	设 D 为函数 $y=f(x)$ 定义域的一个子集，$x_0\in D$，对任意的 $x\in D$ 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（$f(x)\geqslant f(x_0)$），称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 D 上的最大（小）值
多项式函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最值的确定	计算 $f(a)$，$f(b)$ 以及区间上的极值 $f(x_1)$，$f(x_2)$、…，这些值中最大的就是最大值，最小的就是最小值

典型例題

解题步骤 \ 例题	求 $y=x^3-12x$ 在 $[-3,1]$ 上的最大值和最小值
(1)求极值点	$y'=3x^2-12$，可以得到 $x=2,-2$ 为极值点
(2)计算函数值	$x=-3,-2,1$ 时，y 分别为 $9,16,-11$
(3)求最值	y 在 $[-3,1]$ 上的最大值为 16，最小值为 -11

2007/2008

(a)設 $y = x^5 - 5x^3$ 。

1.求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。 (2 分)

2.繪出曲線 $y = x^5 - 5x^3$ 。圖中給出局部極大值，局部極小值和拐點。 (8 分)

解：

(a)1. $\dfrac{dy}{dx} = 5x^4 - 15x^2$ ；

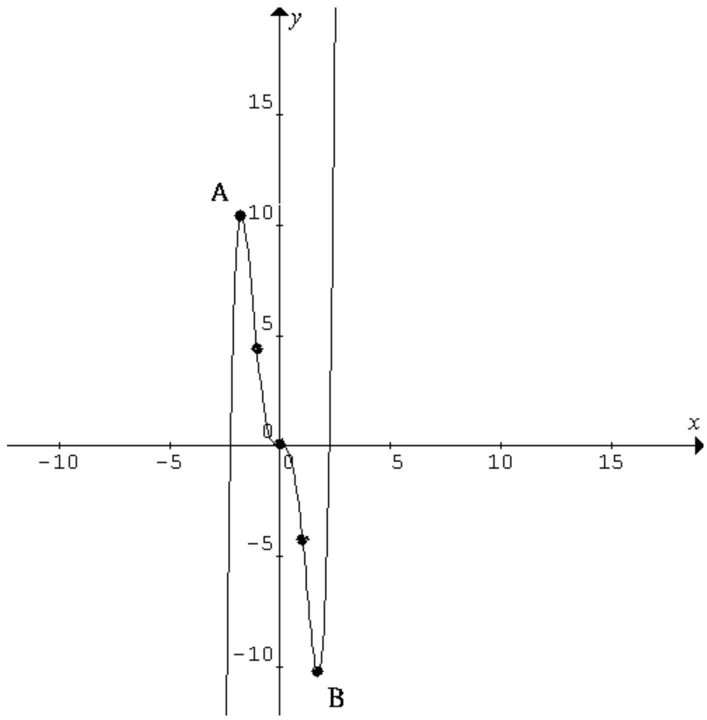
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(5x^4 - 15x^2) = 20x^3 - 30x \text{ 。}$$

2.令 $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ，得 $x = 0$ 或 $x = \sqrt{3}$ ；令 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ ，得 $x = 0$ 或 $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 。

x	區間內	$-\sqrt{3}$	區間內	$-\sqrt{6}/2$	區間內	0	區間內	$\sqrt{6}/2$	區間內	$-\sqrt{3}$	區間內
y'	+	0	−		−	0	−		−	0	+
y''	−		−	0	+	0	−	0	+		+
y		$6\sqrt{3}$		$21\sqrt{3}/8$		0		$-21\sqrt{3}/8$		$-6\sqrt{3}$	

如圖所示，點 A 有極大值 $6\sqrt{3}$ ，點 B 有極小值 $-6\sqrt{3}$ ；

拐點爲 $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{21\sqrt{3}}{8}\right)$ ，$(0,0)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, -\dfrac{21\sqrt{3}}{8}\right)$ 。



2009/2010

(a)如圖，正圓錐的高及底半徑均爲 1，圓錐內接有半徑爲 x 的正圓柱。設 $V(x)$ 爲該圓柱的體積。

2.求 $\frac{dV}{dx}$ 及 $\frac{d^2V}{dx^2}$。 (2 分)

3.繪出 $V(x)$ 的圖像，並在圖中把局部極大點，局部極小點和拐點標出來。(6 分)

解：

2. 由 1.知，$V(x)=\pi(x^2-x^3)$，$x\in[0,1]$。

$\therefore \frac{dV}{dx}=\pi(2x-3x^2)=\pi x(2-3x)$；

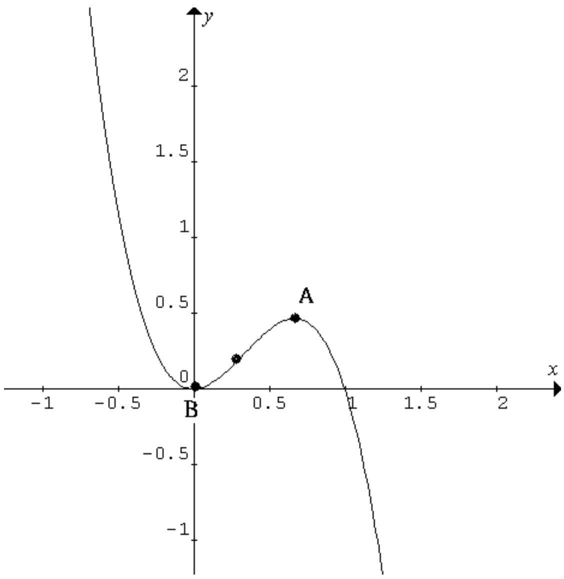
$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{d}{dx}[\pi(2x-3x^2)]=\pi(2-6x)$。

3. 令 $\frac{dV}{dx}=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{2}{3}$；

令 $\frac{d^2V}{dx^2}=0$，得 $x=\frac{1}{3}$。

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
V'	−	0	+		+	0	−
V''	+		+	0	−		−
V		0		$\frac{2\pi}{27}$		$\frac{4\pi}{27}$	

如圖所示，$A(\frac{2}{3},\frac{4\pi}{27})$ 爲極大點，$B(0,0)$ 爲極小點；拐點爲 $(\frac{1}{3},\frac{2\pi}{27})$。

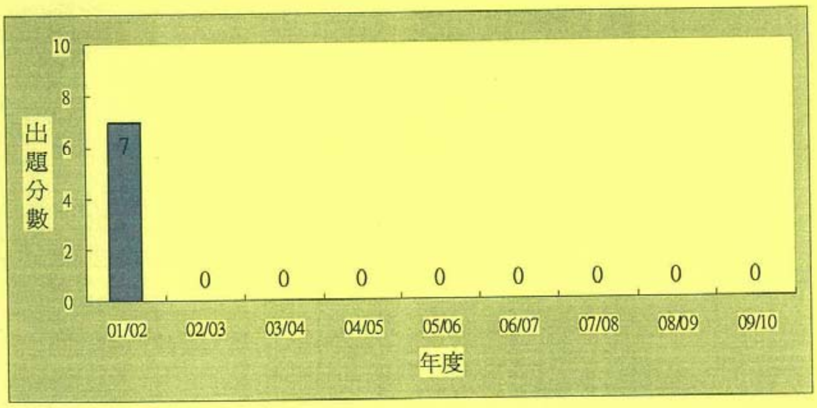


11 向量

考試大綱

純量與 R^2 中的向量；向量加法及純量乘法。
位置向量。
笛卡兒分量。
純量積。

命題趨勢



2001/2002

(1)在三角形OAB中，D是OB的中點。試以向量$\overrightarrow{OA}$及$\overrightarrow{OB}$表$\overrightarrow{AD}$。

(2)若$\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+5\vec{j}$，$\overrightarrow{OB}=6\vec{i}+3\vec{j}$，求$\angle AOB$。

(7分)

解：

(1) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$。

(2) $\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\dfrac{(2\vec{i}+5\vec{j})\cdot(6\vec{i}+3\vec{j})}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{45}}=\dfrac{12+15}{3\sqrt{145}}=\dfrac{9}{\sqrt{145}}$

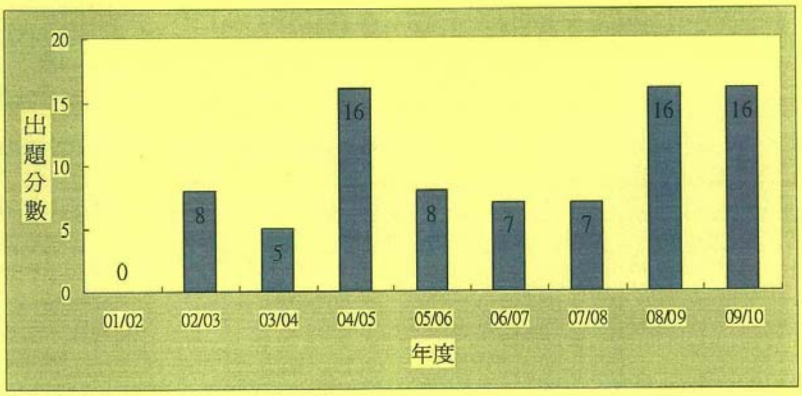
$\therefore\angle AOB=46.26^{0}$。

12 複數

考試大綱

虛數。
複數的運算。
二次多項式的複根。
複數的極式。
有理指數的棣美佛定理。
n 次根。

命題趨勢



2002/2003

試用極式 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 表示複數 $z = 1+\cos\alpha + i\sin\alpha$ ，其中 $0 \le \alpha \le \pi$ 。 (8 分)

解：

$$
\begin{aligned}
z &= 1+\cos\alpha + i\sin\alpha \\
&= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\
&= 2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2})
\end{aligned}
$$

2003/2004

(a)利用棣美佛定理，證明

$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha$

推導

$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$ 。 (5 分)

解：

(a) $\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha$

$$
\begin{aligned}
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 \\
&= \cos^5\alpha + 5\cos^4\alpha\cdot i\sin\alpha + 10\cos^3\alpha\cdot i^2\sin^2\alpha + 10\cos^2\alpha\cdot i^3\sin^3\alpha \\
&\quad + 5\cos\alpha\cdot i^4\sin^4\alpha + i^5\sin^5\alpha \\
&= (\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha) + \\
&\quad i(5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha)
\end{aligned}
$$

比較上式兩邊的實數部份：

$$
\begin{aligned}
\cos 5\alpha &= \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha \\
&= \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha(1-\cos^2\alpha) + 5\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)^2 \\
&= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha
\end{aligned}
$$

2004/2005

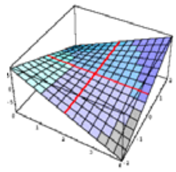
設 $i = \sqrt{-1}$ 及 $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ 。

(a)證明多項式 $z^5 - 1$ 的所有複數根為 α^j ， $j = 0$，1，2，3，4。 (3 分)

(b)(1)證明 $\alpha^3 = \overline{\alpha^2}$ 及 $\alpha^4 = \overline{\alpha}$ 。 (4 分)

(2)利用(a)及(b)(1)，證明

$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{5} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{5} + 1)$ 。 (5 分)



(c)利用(b)(2)中的恒等式，求 $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}$ 的值。 (4 分)

解：

(a)由 $z^5-1=0$ 得 $z^5=1=\cos 0+i\sin 0$

$$\therefore z=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}=(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})^k=\alpha^k, k=0,1,2,3,4$$

(b)(1) $\because \alpha^5=1$ 及 $\alpha\cdot\overline{\alpha}=1$

$\therefore \alpha^4\cdot\alpha\overline{\alpha}=\overline{\alpha}$ ，即 $\alpha^4=\overline{\alpha}$

$\therefore \alpha^3\cdot\alpha\overline{\alpha}=\overline{\alpha}^2$ ，即 $\alpha^3=\overline{\alpha}^2=\overline{\alpha^2}$

(2) $z^4+z^3+z^2+z+1$

$$=\frac{z^5-1}{z-1}$$
$$=(z-\alpha^1)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)$$
$$=[(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})][(z-\alpha^2)(z-\overline{\alpha^2})]$$
$$=[z^2-(\alpha+\overline{\alpha})z+\alpha\overline{\alpha}][z^2-(\alpha^2+\overline{\alpha^2})z+\alpha^2\overline{\alpha^2}]$$
$$=(z^2-2z\cos\frac{2\pi}{5}+1)(z^2-2z\cos\frac{4\pi}{5}+1)$$

(c)由(b)(2)： $z^4+z^3+z^2+z+1=(z^2-2z\cos\frac{2\pi}{5}+1)(z^2-2z\cos\frac{4\pi}{5}+1)$

比較上式兩邊 z^2 項的係數：

得 $1=2+4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}$

$$\therefore \cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{4}$$

2005/2006

設複數 $z=x+iy$ 滿足 $\big||z+2|-|z-2|\big|=2$ 。

(1)把上述方程化爲直角坐標方程。 (6 分)
(2)在複平面上繪出滿足方程的圖形。 (2 分)

解：

(1) $z=x+iy$ 代入 $\left||z+2|-|z-2|\right|=2$ 得：$\left||(x+2)+yi|-|(x-2)+yi|\right|=2$

根據複數的模的定義：$\left|\sqrt{(x+2)^2+y^2}-\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right|=2$

即 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}-\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\pm 2$

移項，得 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\pm 2+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

兩邊平方，得 $(x+2)^2+y^2=4\pm 4\sqrt{(x-2)^2+y^2}+(x-2)^2+y^2$

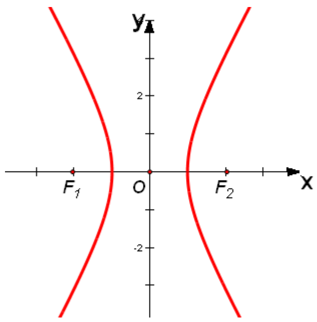
即 $2x-1=\pm\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

兩邊平方，得 $(2x-1)^2=(x-2)^2+y^2$

即 $3x^2-y^2=3$

$\therefore$所求直角坐標方程爲 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

(2)如圖所示，圖形爲中心在座標原點，焦點在 x 軸上的雙曲線。



2006/2007

(1)以極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表 $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$，其中 $i=\sqrt{-1}$。 (3 分)

(2)若 $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2006}=a+ib$，其中 a 和 b 爲實數，求 a 和 b 的值。 (4 分)

解：

$$(1)\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$(2)\,(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^{2006}=(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})^{2006}=\cos\frac{4012\pi}{3}+i\sin\frac{4012\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$\therefore a=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ ； $b=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

$\boxed{\text{2007/2008}}$

(1)以極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表 $\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$ 。 (4 分)

(2)求 $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{2007}$ 的輻角 α ，其中 $-\pi<\alpha\leq\pi$ 。 (3 分)

解：

$$(1)\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)}{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)}=\frac{2[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]}{\sqrt{2}[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}]}=\sqrt{2}[\cos(-\frac{7\pi}{12})+i\sin(-\frac{7\pi}{12})]$$

$$(2)\,(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{2007}=\left\{\sqrt{2}[\cos(-\frac{7\pi}{12})+i\sin(-\frac{7\pi}{12})]\right\}^{2007}$$

$$=2^{\frac{2007}{2}}[\cos(-\frac{14049\pi}{12})+i\sin(-\frac{14049\pi}{12})]$$

$$=2^{\frac{2007}{2}}[\cos(-\frac{9\pi}{12})+i\sin(-\frac{9\pi}{12})]$$

$\because -\pi<\alpha\leq\pi$

$\therefore$所求輻角 $\alpha=-\frac{9\pi}{12}=-\frac{3\pi}{4}$ 。

2008/2009

設 i 爲純虛的複數，使得 $i^2=-1$。

(a)求複數 z 使得 $z^2=-7-24i$。 (5 分)

(b)設 $\omega=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7}$，其中 k 是不能被 7 整除的整數。

(1)證明 $\omega^7=1$。由此，證明 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^6=0$。 (4 分)

(2)用(1)的結果，證明 $(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2=5$。 (3 分)

(3)用(2)的結果，求 $(\cos\dfrac{2k\pi}{7})^2+(\cos\dfrac{4k\pi}{7})^2+(\cos\dfrac{6k\pi}{7})^2$。 (4 分)

解：

(a)設 $z=a+bi(a,b\in R)$，則 $(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=-7-24i$

$$\therefore\begin{cases}a^2-b^2=-7\\2ab=-24\end{cases}\text{，解得}\begin{cases}a=3\\b=-4\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-3\\b=4\end{cases}$$

(b)(1) $\omega^7=(\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7})^7=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1$

由 $\omega^7=1$，得 $\omega^7-1=0$

即 $(\omega-1)(\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)=0$

$\because \omega\neq 1$

$\therefore 1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^6=0$

(2) $(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2$

$=\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}+\omega^4+\dfrac{1}{\omega^4}+\omega^6+\dfrac{1}{\omega^6}+6$

$=\omega^2+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^6+\omega+6$

$=-1+6$

$=5$

(3) $\omega+\omega^{-1}=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7}+\cos(-\dfrac{2k\pi}{7})+i\sin(-\dfrac{2k\pi}{7})=2\cos\dfrac{2k\pi}{7}$

同理，$\omega^2+\omega^{-2}=2\cos\dfrac{4k\pi}{7}$ 及 $\omega^3+\omega^{-3}=2\cos\dfrac{6k\pi}{7}$

代入 $(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2=5$ 得：

$(2\cos\dfrac{2k\pi}{7})^2+(2\cos\dfrac{4k\pi}{7})^2+(2\cos\dfrac{6k\pi}{7})^2=5$

$\therefore (\cos\dfrac{2k\pi}{7})^2+(\cos\dfrac{4k\pi}{7})^2+(\cos\dfrac{6k\pi}{7})^2=\dfrac{5}{4}$

2009/2010

設 $i=\sqrt{-1}$ 爲純虛的複數，使得 $i^2=-1$。

(a)設 $0\le\theta\le 2\pi$ 及 $\theta\ne\pi$。證明 $\dfrac{\cos\theta-1+i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}=i\tan\dfrac{\theta}{2}$。 (4 分)

(b)給出方程 $(\dfrac{1+z}{1-z})^n=-1$，其中 n 爲正整數。

(1)證明當 n 爲偶數時，方程的解爲 $i\tan\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$。 (5 分)

(2)當 n 爲奇數時，方程的解爲何？[提示：方程只有 $n-1$ 個解。] (2 分)

(c)用(b)(1)的結果，或用其他方法，解方程

$(1+z)^8-(1-z^2)^4+(1-z)^8=0$。

[提示：$(1+z)^8-(1-z^2)^4+(1-z)^8=\dfrac{(1+z)^{12}+(1-z)^{12}}{(1+z)^4+(1-z)^4}$。] (5 分)

解：

(a)
$$\frac{\cos\theta-1+i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{-2\sin^2\frac{\theta}{2}+i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}(-\sin\frac{\theta}{2}+icos\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}(-\sin\frac{\theta}{2}+icos\frac{\theta}{2})i}{\cos\frac{\theta}{2}(i\cos\frac{\theta}{2}+i^2\sin\frac{\theta}{2})}$$

$$=\frac{i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=i\tan\frac{\theta}{2}$$

(b)(1) $\because (\frac{1+z}{1-z})^n = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$

$\therefore \frac{1+z}{1-z} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}, k = 0,1,2,\cdots,(n-1)$

解得 $z = \dfrac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} - 1 + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}{1+\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}$

利用(a)的結果，得 $z = i\tan\dfrac{\frac{(2k+1)\pi}{n}}{2} = i\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k = 0,1,2,\cdots,(n-1)$

(2)當 n 爲奇數時， $z = i\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k = 0,1,2,\cdots,(n-1)$ 但 $k \neq \frac{n-1}{2}$

(c) $(1+z)^8 - (1-z^2)^4 + (1-z)^8 = \dfrac{[(1+z)^4 + (1-z)^4][(1+z)^8 - (1+z)^4(1-z)^4 + (1-z)^8]}{(1+z)^4 + (1-z)^4}$

$= \dfrac{(1+z)^{12} + (1-z)^{12}}{(1+z)^4 + (1-z)^4}$

當 $(1+z)^4 + (1-z)^4 \neq 0$ 時，原方程可寫成

$(1+z)^{12} + (1-z)^{12} = 0$

即 $(\frac{1+z}{1-z})^{12} = -1$

利用(b)(1)的結果，得 $z = i\tan\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 12} = i\tan\frac{(2k+1)\pi}{24}, k = 0,1,2,\cdots,11$

但當 $k = 1,4,7,10$ 時， $(1+z)^4 + (1-z)^4 = 0$

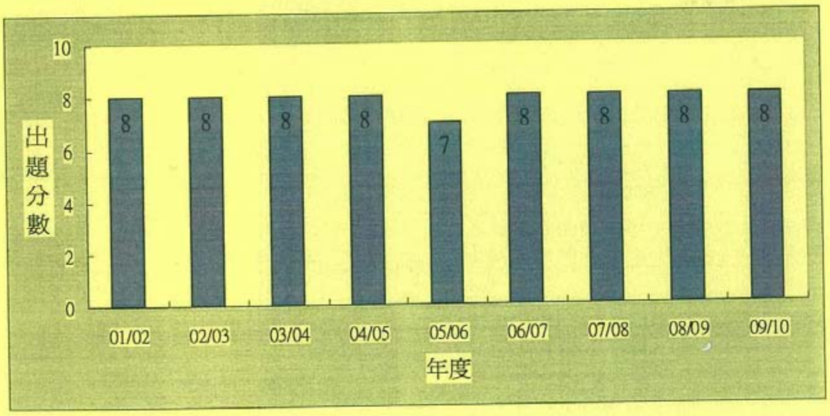
$\therefore$原方程的解爲 $z = i\tan\frac{k\pi}{24}, k = 1,5,7,11,13,17,19,23$

13 概率

考試大綱

排列與組合。
簡易概率問題。

命題趨勢



2001/2002

從英文字 MATHEMATICS 中隨機抽出三個英文字母，問： (8 分)

1.有多少種不同的組合可被抽出？

2.抽出的三個字母可組成英文字 THE 的概率是多少？

解：

1.三個英文字母都不相同的有 C_8^3 種；

三個英文字母中，其中兩個相同，另外一個不同的有 $C_3^1 \cdot C_7^1$ 種；

所以，共有 $C_8^3 + C_3^1 \cdot C_7^1 = 77$ 種不同的組合可被抽出。

2. $\dfrac{C_2^1 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1}{C_{11}^3} = \dfrac{2}{165}$ 。

教學備忘

如果一次试验中可能出现的结果有 n 个，而且所有结果出现的可能性都相等，那么每一个基本事件的概率都是 $\frac{1}{n}$，如果事件 A 包含的结果有 m 个，那么 A 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$

2002/2003

袋 A 內有紅球 5 個，白球 4 個，袋 B 內有紅球 6 個，白球 3 個。 (8 分)

1.若從袋 A 中隨機抽出三個球，抽出的紅球比抽出的白球多的概率是多少？

2.若從袋 A 中隨機抽出一個球放在袋 B 中，然後從袋 B 中隨機抽出一個球，問從袋 B 中抽出的是紅球的概率是多少？

解：

1. $\dfrac{C_5^3 + C_5^2 \cdot C_4^1}{C_9^3} = \dfrac{25}{42}$ 。

2. $\dfrac{C_5^1 \cdot C_7^1 + C_4^1 \cdot C_6^1}{C_9^1 \cdot C_{10}^1} = \dfrac{59}{90}$ 。

典型例題

解题步骤 \ 例题		在 20 件产品中，有 15 件一级品，5 件二级品，从中任取 3 件，其中至少有 1 件为二级品的概率是多少?
解法一	(1)剖析事件	记从 20 件产品中任取 3 件，其中恰有 1 件二级品为事件 A_1，恰有 2 件二级品为事件 A_2，3 件全是二级品为事件 A_3，这样事件 A_1, A_2, A_3 彼此互斥，且 $P(A_1)=\frac{C_5^1 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{105}{228}$，$P(A_2)=\frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{30}{228}$，$P(A_3)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{2}{228}$
	(2)求和计算	由互斥事件的概率加法公式，3 件产品中至少有 1 件为二级品的概率是 $P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{137}{228}$
解法二	(1)剖析事件	记从 20 件产品中任取 3 件，3 件全是一级品为事件 A. 由于“任取 3 件，至少有 1 件为二级品”是事件 A 的对立事件 $\bar{A}$
	(2)求差计算	根据对立事件的概率加法公式，得到 $P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}=\frac{137}{228}$

2003/2004

從 1，2，3，・・・・，10 中隨機抽出兩個不同的數，求抽出的兩個數之和可被 4 整除的概率。
[提示：根據數位被 4 除時的餘數，把數字分成四組] (8 分)

解：

在「4」、「8」中取兩個數有 C_2^2 種；

在「1」、「5」、「9」中取一個數，又在「3」、「7」中取一個數的有 $C_3^1 \cdot C_2^1$ 種；

在「2」、「6」、「10」中取兩個數有 C_3^2 種。

所以，抽出的兩個數之和可被 4 整除的概率 $=\dfrac{C_2^2+C_3^1\cdot C_2^1+C_3^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{9}$。

2004/2005

一公司有職員六人。每天，各人需要使用電腦的概率為 0.5。假設各人對電腦的需要是獨立的，且在任何兩天的需要也是獨立的。
(a)求在同一天內以下事件的概率：
1.剛好有三人需要使用電腦； (2 分)
2.最少有三人需要使用電腦。 (2 分)
(b)若公司只有五台電腦。求最大的 n 使得公司在連續 n 天內都有足夠電腦以供使用的概率大於 0.9。 (4 分)

解：

公式小結

如果 n 个事件相互独立，那么这 n 个事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积；如果在一次试验中某事件发生的概率为 P，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=C_n^kP^n(1-P)^n$

(a) 1. $C_6^3\cdot(0.5)^3\cdot(1-0.5)^3=0.3125$。

2. $1-[C_6^0(0.5)^6+C_6^1(0.5)(0.5)^5+C_6^2(0.5)^2(0.5)^4]=0.65625$。

(b)最多 5 人使用電腦的概率為 $1-(\frac{1}{2})^6=\frac{63}{64}$；

由題意，有：$(\frac{63}{64})^n>0.9$，解得 $n<6.69$，所求最大的 $n=6$。

2005/2006

平面上有 9 點，其中恰有 4 點共線，此外並無 3 點共線。
1.若隨機從中選出 3 點，問這 3 點不能共線的概率是多少？ (3 分)
2.若把每兩點都連一直線，問共有多少條不同的直線？ (4 分)

解：

1. $1-\dfrac{C_4^3}{C_9^3}=\dfrac{20}{21}$ 。

2.在 4 點共線外的其餘 5 點中，選兩點的有 C_5^2 種；

在 4 點共線外的其餘 5 點中選一點，又在共線的 4 點中選一點的有 $C_5^1 \cdot C_4^1$ 種；

在共線的 4 點中任選兩點都只連成 1 直線；

所以，共有 $C_5^2+C_5^1 \cdot C_4^1+1=31$ 條不同的直線。

2006/2007

甲和乙兩人進行乒乓球單打比賽，每賽一局，甲勝出的概率爲 0.6，而乙勝出的概率爲 0.4。若比賽可採用三局兩勝制或五局三勝制，問哪種賽制對甲更有利？試解釋你的選擇。 (8 分)

解：

「三局兩勝制」下甲勝出的情況：
第一局甲勝、第二局甲勝的概率爲 (0.6)(0.6) ；
第一局甲勝、第二局乙勝、第三局甲勝的概率爲 (0.6)(0.4)(0.6) ；
第一局乙勝、第二局甲勝、第三局甲勝的概率爲 (0.4)(0.6)(0.6) 。
所以，「三局兩勝制」下甲勝出的概率爲：
(0.6)(0.6) ＋ (0.6)(0.4)(0.6) ＋ (0.4)(0.6)(0.6) ＝ 0.648 。

教學備忘

如果事件 A,B 是互斥事件，那么事件 $A+B$ 发生的概率等于事件 A,B 分别发生的概率的和，即 $P(A+B)=P(A)+P(B)$. 一般地，如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 彼此互斥，则 $P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$

教學備忘

两个相互独立事件同时发生的概率等于每个事件发生的概率的积，即 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

「五局三勝制」下甲勝出的情況：

甲勝乙「3：0」的概率為$(0.6)^3$；

甲勝乙「3：1」的概率為$C_3^2(0.6)^3(0.4)$；

甲勝乙「3：2」的概率為$C_4^2(0.6)^3(0.4)^2$。

所以，「五局三勝制」下甲勝出的概率為：

$(0.6)^3+C_3^2(0.6)^3(0.4)+C_4^2(0.6)^3(0.4)^2=0.68256$。

因為$0.68256>0.648$，所以「五局三勝制」的賽制對甲更有利。

2007/2008

有袋三個，分別記為 X、Y 及 Z。袋 X 內有紅球 1 個、黑球 2 個及白球 3 個。袋 Y 內有黑球 4 個。袋 Z 內有白球 5 個。現從袋 X 中隨機抽出 1 個球放在袋 Y 內，然後從袋 Y 中隨機抽出 1 個球放在袋 Z 內，再從袋 Z 中隨機抽出 1 個球放回袋 X 內。在以上的步驟後，問：

(a)在袋 X、Y 及 Z 內找到紅球的概率分別是多少？ (4 分)

(b)在袋 Z 內所有的球都是白色的概率是多少？ (4 分)

解：

(a)在袋 X 內找到紅球的概率為$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{151}{180}$；

在袋 Y 內找到紅球的概率為$\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{15}$；

在袋 Z 內找到紅球的概率為$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{36}$。

(b)非白球從 X 至 Y、再從 Z 至 X 的概率為$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}$；

白球從 X 至 Y；非白球從 Y 至 Z、再從 Z 至 X 的概率為$\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}$；

白球從 X 至 Y、從 Y 至 Z、再從 Z 至 X 的概率為$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}$。

所以，在袋 Z 內所有的球都是白色的概率是：

$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$。

2008/2009

一袋中有球 10 個，其中有 8 個球標有數字 1，另 2 個球標有數字 5。
(a)若隨機同時抽出兩個球，則其數字之和可為 2、6 或 10。問此三種情況的概率分別是多少？ (3 分)
(b)若隨機抽球 8 次，每次抽出 1 個球，記下球的數字後放回袋中，然後再繼續抽球。問 8 個記下的數字之和不小於 30 的機率是多少？ (5 分)

解：

(a)抽出兩個球其數字之和為 2 的概率 $\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}=\dfrac{28}{45}$；

抽出兩個球其數字之和為 6 的概率 $\dfrac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\dfrac{16}{45}$；

抽出兩個球其數字之和為 10 的概率 $\dfrac{C_2^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{45}$。

(b)在抽球 8 次中，6 次球標有「5」、2 次球標有「1」的概率為 $C_8^6(\frac{1}{5})^6(\frac{4}{5})^2$；

在抽球 8 次中，7 次球標有「5」、1 次球標有「1」的概率為 $C_8^7(\frac{1}{5})^7(\frac{4}{5})$；

在抽球 8 次中球標有「5」的概率為 $(\frac{1}{5})^8$。

所以，8 個記下的數字之和不小於 30 的機率是：

$$C_8^6(\frac{1}{5})^6(\frac{4}{5})^2+C_8^7(\frac{1}{5})^7(\frac{4}{5})+(\frac{1}{5})^8=\frac{481}{390625}\text{。}$$

2009/2010

一袋中有球 10 個，分別標有數字 1 至 10。若隨機同時抽出 4 個球，問：
(a)在抽出的球中最少有兩個球的數字不小於 5 的概率是多少？ (4 分)
(b)在抽出的球中任意兩個球的數字之和都不是 9 的概率是多少？ (4 分)

解：

(a)$1-\dfrac{C_4^4+C_4^3\cdot C_6^1}{C_{10}^4}=\dfrac{37}{42}$。

(b)標有「1」至「10」號的球，如下分成 6 組：

「1，8」、「2，7」、「3，6」、「4，5」、「9」和「10」。

抽出 4 個球中，只有兩個球的數字之和為 9 的概率是：

$$\frac{C_4^1 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1 C_2^1 + C_4^1 \cdot C_3^1 C_2^1 \cdot C_2^1 + C_4^1 \cdot C_1^1 C_1^1}{C_{10}^4} = \frac{10}{21} \text{；}$$

抽出 4 個球中，其中兩個球的數字和爲 9，另外兩個球數字和也爲 9 的概率是：

$$\frac{C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{1}{35} \text{；}$$

所以，在抽出的球中任意兩個球的數字之和都不是 9 的概率是：

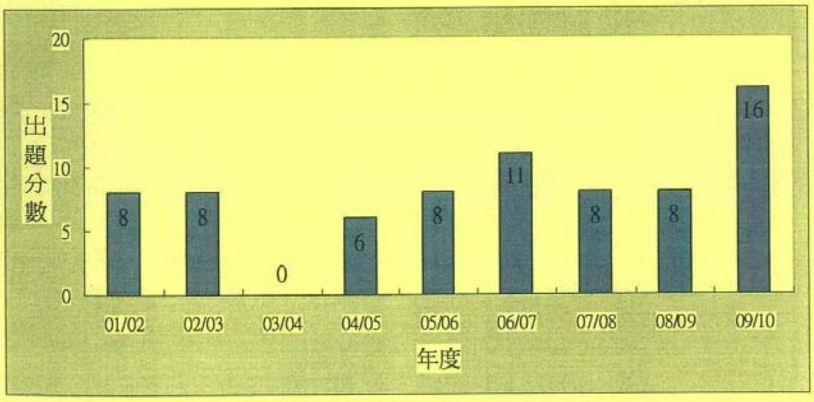
$$1 - \frac{10}{21} - \frac{1}{35} = \frac{52}{105} \text{。}$$

14 數列與級數

考試大綱

等差級數及等比級數。
n項和。
等比級數無限項之和。

命題趨勢



2001/2002

給出等比數列$a_1=2$，$a_2=4$，‧‧‧‧，$a_n=2^n$，‧‧‧‧，現於數列中加入括弧，使得第r個括弧內有r項如下：

(a_1)，(a_2, a_3)，(a_4, a_5, a_6)，(a_7, a_8, a_9, a_{10})，‧‧‧

求第n個括弧內所有項之和。 (8 分)

解：

(2^1)，$(2^2, 2^3)$，$(2^4, 2^5, 2^6)$，‧‧‧

第n個括弧內的最後一項爲$2^{1+2+3+\cdots+n}=2^{\frac{n(1+n)}{2}}$；

第n個括弧內的n個數構成一等比數列，令首項爲$2^{\frac{n(1+n)}{2}}$，則公比爲$\frac{1}{2}$；

所以，第n個括弧內所有項之和爲：

$$\frac{2^{\frac{n(1+n)}{2}}\cdot(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=2^{\frac{n^2+n+2}{2}}\cdot(1-\frac{1}{2^n})=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}\cdot(2^n-1)$$ 。

公式小結

	定　义	前 n 项和公式		
形式	$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 如: $S_n=1+2+4+\cdots+2^{n-1}$	$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \frac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}$ 如: $S_n=\frac{1+2^{n-1}\cdot2}{1-2}=2^n-1$	$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}$ 如: $S_n=\frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$	$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \frac{a_1}{q-1}q^n-\frac{a_1}{q-1} & (q\neq1)\end{cases}$ 如: $S_n=\frac{1}{2-1}\cdot2^n-\frac{1}{2-1}=2^n-1$

2002/2003

在一等差數列a_1，a_2，‧‧‧中，$a_1=3$，$a_6=2a_3$。

(1)求此數列的公差。

(2)求最小的n使得$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq1000$。 (8 分)

解：

(1)由$a_6=2a_3$，得$a_1+5d=2(a_1+2d)$；

將$a_1=3$代入上式，解得公差 d＝3。

(2)由$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq1000$，得$na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d\geq1000$；

將 $a_1=3$，d=3 代入上式，即 $3n+\frac{3}{2}n(n-1)\geq 1000$；

化簡，得 $3n^2+3n-2000\geq 0$

$\therefore n\leq\frac{-3-\sqrt{3^2-4(3)(-2000)}}{2(3)}$ (不合)或 $n\leq\frac{-3+\sqrt{3^2-4(3)(-2000)}}{2(3)}\approx 25.3$

所求最小的 $n=26$。

公式小結

	定　　义	前 n 项和公式		
表示形式	$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 如 $a_n=2n-1$ 时, $S_n=1+3+\cdots+(2n-1)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 如 $a_n=2n-1$ 时 $S_n=\frac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$	$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 如 $a_n=2n-1$ 时, $S_n=n\cdot 1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n^2$	$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$ 如 $a_n=2n-1$ 时, $S_n=\frac{2}{2}n^2+(1-\frac{2}{2})n=n^2$

2004/2005

有等差數列 a_1，a_2，a_3，・・・・，其公差非零及首項 $a_1=2$。若 a_1，a_3，a_{11} 爲一等比數列中的連續三項，求此等比數列的公比。 (6 分)

解：

由題意，得 $a_3^{\,2}=a_1a_{11}$；

記公差爲 d，則 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+10d)$

將 $a_1=2$ 代入上式，即 $(2+2d)^2=2(2+10d)$

化簡，得 $d(d-3)=0$

$\therefore d=0$ (不合)或 $d=3$。

所以，等比數列的公比 $=\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1+2d}{a_1}=\frac{2+2(3)}{2}=4$。

2005/2006

設 $\{a_k\}$ 爲一等差數列。已知 $a_1+a_2+a_3=33$，$a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=153$ 及 $a_1+a_2+\cdot\cdot\cdot+a_n=403$，其中 n 是某個正整數。

(1)求數 n 。 (4 分)

(2)求數列的首項 a_1 及公差 d 。 (4 分)

解：

(1)由題意，得 $a_1+a_2+a_3+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=33+153=186$

$\because a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}$

$\therefore 3(a_1+a_n)=186$

即 $a_1+a_n=62$

又 $a_1+a_2+\cdots+a_n=403$

$\therefore \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=403$

將 $a_1+a_n=62$ 代入上式，解得 $n=13$ 。

(2) $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=33 \\ a_1+a_{13}=62 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1+3d=33 \\ 2a_1+12d=62 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=7 \\ d=4 \end{cases}$ 。

教學備忘

定义	如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母 d 表示			
	等式表示	通项公式	通项性质	等差中项
表示形式	$a_n-a_{n-1}=d$ ($n\in\mathbf{N}^*$, $n>1$, d 为常数) 如: $a_n-a_{n-1}=-3(n\in\mathbf{N}^*, n>1)$	$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 如: $a_n=3+(n-1)\cdot(-3)=-3n+6$	$m+n=p+q\Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$ $(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$ 如:$1+19=8+12=2\cdot 10\Rightarrow a_1+a_{19}=a_8+a_{12}=2a_{10}$	如果 a,A,b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项($A=\dfrac{a+b}{2}$) 如:若 $a=-2,b=6$，则等差中项 $A=2$

2006/2007

(2)用(1)的結果，求 $1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)$ 。 (3 分)

解：

$$(2)1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)[(2n+1)+3]$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

2006/2007

設數列$\{a_k\}$的前n項和爲S_n。

(1)若$\{a_k\}$爲等差數列，其公差$d=1$且$S_{100}=250$，求前 100 項中所有奇數項之和：$S_{odd}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$。 (3 分)

(2)已知對所有正整數n，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，證明數列$\{a_k\}$是等差數列。 (5 分)

解：

(1)由$S_{100}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{99}+a_{100}=250$

得$(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100})=250$

即$(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})+(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})+50d=250$

$\therefore 2S_{odd}+50\cdot 1=250$，解得$S_{odd}=100$。

(2)當$k\geq 2$時，

$$\begin{aligned}\because a_k-a_{k-1}&=(S_k-S_{k-1})-(S_{k-1}-S_{k-2})\\&=S_k-2S_{k-1}+S_{k-2}\\&=\frac{k}{2}(a_1+a_k)-2(\frac{k-1}{2})(a_1+a_{k-1})+\frac{k-2}{2}(a_1+a_{k-2})\\&=(\frac{k}{2}a_1+\frac{k}{2}a_k)+(-ka_1-ka_{k-1}+a_1+a_{k-1})+(\frac{k}{2}a_1-a_1+\frac{k}{2}a_{k-2}-a_{k-2})\\&=\frac{k}{2}a_k-(k-1)a_{k-1}+\frac{k-2}{2}a_{k-2}\end{aligned}$$

$\therefore (k-2)a_{k-1}=\dfrac{k-2}{2}a_k+\dfrac{k-2}{2}a_{k-2}$

即$2a_{k-1}=a_k+a_{k-2}$；

所以，數列$\{a_k\}$是等差數列。

典型例题

解题步骤 \ 例题	设无穷等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,求所有的无穷等差数列$\{a_n\}$,使得对于一切正整数k都有$S_{k^2}=(S_k)^2$成立
(1)设出S_n的形式	$\because \{a_n\}$是等差数列,$\therefore$设$S_n=an^2+bn$
(2)转化$S_{k^2}=(S_k)^2$	$\therefore$由$S_{k^2}=(S_k)^2$对一切正整数k成立,得$ak^2+b=a^2k^2+2kab+b^2$对一切正整数k成立
(3)求出a、b的值	$\therefore\begin{cases}a=a^2\\2ab=0\\b=b^2\end{cases}$,即$\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$
(4)由S_n求出a_n	$\therefore S_n=0$或$S_n=n$或$S_n=n^2$,由$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$,得$a_n=0$或$a_n=1$或$a_n=2n-1$

2007/2008

設$\{a_k\}$爲等差數列，其公差$d \neq 0$。已知a_1，a_3和a_7爲一等比數列中的連續三項，且$a_1 + a_3 + a_7 = 70$。

(a)求此等差數列的首項a_1及公差d。 (5 分)

(b)求最小的n使得$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 2007$。 (3 分)

解：

(a)$\begin{cases} a_3^2 = a_1 a_7 \\ a_1 + a_3 + a_7 = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+2d)^2 = a_1(a_1+6d) \\ 3a_1 + 8d = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2d \\ 3a_1 + 8d = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 10 \\ d = 5 \end{cases}$。

(b)由$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 2007$

得$n \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) \cdot 5 \geq 2007$

化簡，即：$5n^2 + 15n - 4014 \geq 0$

$\therefore n \leq \frac{-15 - \sqrt{15^2 - 4(5)(-4014)}}{2(5)}$(不合)或$n \geq \frac{-15 + \sqrt{15^2 - 4(5)(-4014)}}{2(5)} \approx 26.8$

所求最小的$n = 27$。

2008/2009

設$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$爲兩數列，其中$a_1 = \frac{5}{6}$，且對$n \geq 1$，$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + (\frac{1}{2})^{n+1}$及$b_n = a_{n+1} - \frac{1}{2} a_n$。

(a)證明$b_n = (\frac{1}{2})^{n+1} - \frac{1}{6} a_n$。 (1 分)

(b)證明$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$是等比數列，並給出其通項運算式。 (4 分)

(c)設$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的前n項和爲S_n，求極限$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$的值。 (3 分)

解：

(a)$b_n = \frac{1}{3} a_n + (\frac{1}{2})^{n+1} - \frac{1}{2} a_n = (\frac{1}{2})^{n+1} - \frac{1}{6} a_n$。

(b) $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{(\frac{1}{2})^{n+2}-\frac{1}{6}a_{n+1}}{(\frac{1}{2})^{n+1}-\frac{1}{6}a_n}=\dfrac{(\frac{1}{2})^{n+2}-\frac{1}{6}[\frac{1}{3}a_n+(\frac{1}{2})^{n+1}]}{(\frac{1}{2})^{n+1}-\frac{1}{6}a_n}=\dfrac{\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n+1}-\frac{1}{18}a_n}{(\frac{1}{2})^{n+1}-\frac{1}{6}a_n}=\dfrac{1}{3}$；

又 $b_1=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{6}a_1=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{6}(\frac{5}{6})=\frac{1}{9}$；

所以，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$是以首項爲$\frac{1}{9}$，公比爲$\frac{1}{3}$的等比數列；$b_n=\frac{1}{9}(\frac{1}{3})^{n-1}=(\frac{1}{3})^{n+1}$。

教學備忘

定义	如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 q 表示($q\neq 0$)			
	等式表示	通项公式	通项性质	等比中项
表示形式	$a_n/a_{n-1}=q$ ($n\in\mathbf{N}^*, n>1, q$ 为常数) 如: $a_n/a_{n-1}=-3$ ($n\in\mathbf{N}^*, n>1$)	$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ ($n\in\mathbf{N}^*$) 如: $a_n=3\cdot(-3)^{n-1}$	$m+n=p+q$ $\Rightarrow a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ ($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$) 如: $1+19=8+12$ $=2\cdot 10$ $\Rightarrow a_1\cdot a_{19}=a_8\cdot a_{12}=a_{10}^2$	如果 a,G,b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项($G^2=ab$, $G=\pm\sqrt{ab}$)，如 $a=2,b=8$，则等比中项 $G=\pm 4$

(c)利用(a)及(b)的結論，得：

$a_n=6(\frac{1}{2})^{n+1}-6b_n=6(\frac{1}{2})^{n+1}-6(\frac{1}{3})^{n+1}=3(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{3})^n$；

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots$$

$$=3\left[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots\right]-2\left[\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+\cdots\right]$$

$$=3\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=2$$

2009/2010

(a)設 n 爲正整數，$S_n = x + 2x^2 + \cdots + nx^n$，其中 $x \neq 1$。考慮 $S_n - xS_n$。

證明 $S_n = \dfrac{x(1-x^n)}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^{n+1}}{1-x}$。 (4 分)

(b)設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一等比數列，其公比 $r > 1$，且 $a_1 + a_2 + a_3 = 21$ 及 $a_1 a_2 a_3 =$

216。

(1)求此等比數列的通項 a_n。 (5 分)

(2)用(a)的結果，求 $a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}$，$n = 1, 2, \cdots$。 (7 分)

解：

(a) $\because S_n = x + 2x^2 + \cdots + nx^n$

$xS_n = x^2 + 2x^3 + \cdots + nx^{n+1}$

$\therefore S_n - xS_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - nx^{n+1}$

即 $(1-x)S_n = \dfrac{x(1-x^n)}{1-x} - nx^{x+1}$

$\because x \neq 1$，$\therefore S_n = \dfrac{x(1-x^n)}{(1-x)^2} - \dfrac{nx^{n+1}}{1-x}$，證明成立。

教學備忘

数列的求和方法	(1)公式法;(2)倒序相加法;(3)错位相减法;(4)分组求和法;(5)裂项相消法等等

(b)(1) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 21 \\ a_1 a_2 a_3 = 216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_2}{r} + a_2 + a_2 r = 21 \\ \dfrac{a_2}{r} \cdot a_2 \cdot a_2 r = 216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 6 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$；

$\therefore a_n = 3\ 2^{n-1}$。

(2) $a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} = (3 \cdot 2^0)^{3 \cdot 2^0} \cdot (3 \cdot 2^1)^{3 \cdot 2^1} \cdot (3 \cdot 2^2)^{3 \cdot 2^2} \cdots (3 \cdot 2^{n-1})^{3 \cdot 2^{n-1}}$

$= 3^{3(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})} \cdot 2^{3[1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1)2^{n-1}]}$

$= 3^{3 \cdot \frac{1-2^n}{1-2}} \cdot 2^{3 \cdot \left[\frac{2(1-2^{n-1})}{(1-2)^2} - \frac{(n-1)2^n}{1-2}\right]}$

$= 3^{3(2^n - 1)} \cdot 2^{3[2 - 2^n + n \cdot 2^n - 2^n]}$

$= 3^{3(2^n - 1)} \cdot 2^{3[(n-2)2^n + 2]}$


澳门大学招生入学试
数学科试题
2001 / 2002 学 年 入 学 试 试 题
2002 / 2003 学 年 入 学 试 试 题
2003 / 2004 学 年 入 学 试 试 题
2004 / 2005 学 年 入 学 试 试 题
2005 / 2006 学 年 入 学 试 试 题
2006 / 2007 学 年 入 学 试 试 题
2007 / 2008 学 年 入 学 试 试 题
2008 / 2009 学 年 入 学 试 试 题
2009 / 2010 学 年 入 学 试 试 题

2001/2002 學年 入學試試題

<u>第一部份：七題全部作答。</u>

1.若 x^3-6x^2+ax+b 能被 x^2-4x+3 整除，求 a 和 b。 (6 分)

2.(a)化簡 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ 。 (4 分)

(b)設 $a>0$ ，當 a 在不同的範圍時，繪出 $y=a^x$ 的圖像。 (4 分)

3.(a)證明 $2x^2-3x+6>0$。 (3 分)

(b)問 $y=\log_{10}(x^2-9)$ 中 x 應在哪範圍內 y 才有意義？ (4 分)

4.(a)設 $\tan\alpha=\frac{-1}{2}$ ，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 。

(b)化簡 $\sin(2\arctan x)$ 。

(8 分)

5.(1)在三角形 OAB 中， D 是 OB 的中點。試以向量 $\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{OB}$ 表 $\overrightarrow{AD}$ 。

(2)若 $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+5\vec{j}$ ， $\overrightarrow{OB}=6\vec{i}+3\vec{j}$ ，求 $\angle AOB$ 。

(7 分)

6.從英文字 MATHEMATICS 中隨機抽出三個英文字母，問： (8 分)

(1)有多少種不同的組合可被抽出？

(2)抽出的三個字母可組成英文字 THE 的概率是多少？

7.給出等比數列 $a_1=2$，$a_2=4$，．．．．，$a_n=2^n$ ，．．．．，現於數列中加入括弧，使得第 r 個括弧內有 r 項如下：

(a_1)，$(a_2$ ， $a_3)$，$(a_4$ ， a_5 ， $a_6)$，$(a_7$ ， a_8 ， a_9 ， $a_{10})$，．．．

求第 n 個括弧內所有項之和。 (8 分)

第二部份：任擇三題作答，每題十六分。

8.(a)設 $0 \le \alpha < 2\pi$ ，若以 x 爲未知量的方程

$3x^2+(4\sin\alpha)x-2\cos\alpha=0$

有重根，求 α 。 (8 分)

(b)利用 $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$ ，證明

$(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x)\sin x=\cos 5x\sin 4x$ 。

由此證明

$\cos\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{8\pi}{5}+\cos\dfrac{12\pi}{5}+\cos\dfrac{16\pi}{5}=-1$ 。 (8 分)

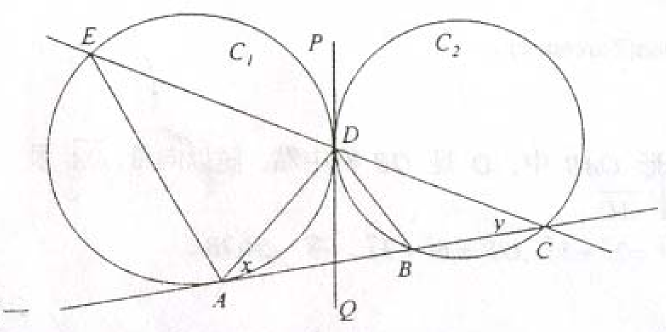
9.在圖一中，PQ 是圓 C_1 及 C_2 於 D 的公切線，切圓 C_1 於 A 的切線與圓 C_2 交於 B 和 C。直線 CD 與圓 C_1 的另一交點爲 E。設∠DAB＝x 及∠DCB＝y。

(1)證明∠ADB＝x＋y。

(2)證明△EDA 與△ADB 相似。

(3)若 EA＝ED，求 x 與 y 的關係。

(16 分)



圖一

10.給定橢圓(E)： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 及(E)外的一點 P(h，k)。

(1)若 y＝mx＋c 是由 P 至(E)的切線，證明 $a^2m^2+b^2=c^2$ 。 (4 分)

(2)由此證明 $(h^2-a^2)m^2-2hkm+k^2-b^2=0$。 (4 分)

(3)若由 P 至(E)的兩切線互相垂直，證明 $h^2+k^2=a^2+b^2$ 。 (4 分)

(4)描述 P 的軌跡。 (4 分)

11.給出曲線 C： $y=x^2+ax+12$

(1)當 $x=4$ ，曲線的切線的斜率是 2，求 a 。(4 分)

(2)寫出(1)中切線的方程。(3 分)

(3)求在第一象限中由 x 軸， y 軸，曲線 C 及(2)中的切線所包圍的區域的面積。(9 分)

12.(a)計算行列式：$\begin{vmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 101 & 201 & 301 \\ 201 & 302 & 403 \end{vmatrix}$。 (6 分)

(b)1)求以下方程組的通解：$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$。

2)利用 b.1.中之通解，求m ，n之值使得以下方程組有解：

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=4 \\ x+my-z=n \end{cases}$$ 。

(10 分)

2002/2003 學年 入學試試題

第一部份：七題全部作答。

1.求函數 $f(x)=\ln(x^2-5)+\arcsin(2x-5)$ 的定義域。 (6 分)

2.設 $0<a<1$，解不等式 $\log_a(\frac{3}{2})^{-x^2}+\log_a(\frac{4}{9})^{2x}<\log_a(\frac{32}{243})$。 (6 分)

3.(1)設 $t=\tan x$，以 t 表 $\sin 2x$。

(2)求 $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=1+\sin 2x$ 的通解。

(8 分)

4.利用數學歸納法，證明

$(1^3+2^3+\cdot\cdot\cdot+n^3)+3(1^5+2^5+\cdot\cdot\cdot+n^5)=\frac{1}{2}[n(n+1)]^3$，

其中 n＝1，2，3・・・ (8 分)

5.試用極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表示複數 $z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$，其中 $0\le\alpha\le\pi$。

(8 分)

6.袋 A 內有紅球 5 個，白球 4 個，袋 B 內有紅球 6 個，白球 3 個。 (8 分)

(1)若從袋 A 中隨機抽出三個球，抽出的紅球比抽出的白球多的概率是多少？

(2)若從袋 A 中隨機抽出一個球放在袋 B 中，然後從袋 B 中隨機抽出一個球，問從袋 B 中抽出的是紅球的概率是多少？

7.在一等差數列 a_1，a_2，・・・中，$a_1=3$，$a_6=2a_3$。

(1)求此數列的公差。

(2)求最小的 n 使得 $a_1+a_2+\cdot\cdot\cdot+a_n\ge 1000$。

(8 分)

第二部份：任擇三題作答，每題十六分。

8.給出二次方程 $x^2+2px-q^3=0$，其中 p 和 q 爲實數及 $q>0$。設 α 和 β 是此方程的兩個根。

(1)以 p 和 q 表 $\alpha+\beta$ 和 $\alpha\beta$。

(2)證明 $\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$ 是方程 $x^3+3qx+2p=0$ 的一個根。

(3)求方程 $x^3+3x^2+6x+10=0$ 的一個根。[提示：設 $x=y-1$]

(16 分)

9.在圖一，APB 是以 O 爲圓心的半圓，半徑爲 1，PQ 是半圓上點 P 的切線，且∠PQB 是一直角。QB 與半圓交於 R。設∠ABP＝x。

(1)證明∠PBQ＝x。

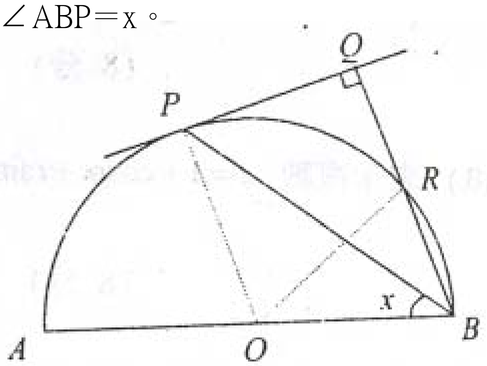
(2)證明 $QR=2\sin^2 x$。

若 QR＝RB，

(3)證明 $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，及

(4)求梯形 PQRO 的面積。

(16 分)



圖一

10.(a)設 P(2，3)爲一定點，過點 P 且斜率爲 m 的直線與 x 軸的正向及 y 軸的正向分別交於點 A 及點 B，設 O 爲原點。

1)求 $|OA|+|OB|$，答案以 m 表示及給出 m 的範圍。 (6 分)

2)求 $|OA|+|OB|$ 的最小值。 (4 分)

(b)求：$\int_0^4 |x^2-3x+2|dx$。 (6 分)

11.給出 C：$x^2+y^2+x-6y+k=0$ 及直線 L：$x+2y-3=0$，設 C 與 L 相交於不同的兩點 $A(x_1，y_1)$及 $B(x_2，y_2)$。

(1)求一個以 y_1 和 y_2 爲根的二次方程。 (4 分)

(2)求 k 的範圍。 (3 分)

(3)證明 $y_1+y_2=4$ 及 $y_1y_2=\dfrac{12+k}{5}$。 (3 分)

(4)以 k 表 x_1x_2。 (3 分)

(5)設 O 為原點，若∠AOB 是一直角，求 k。 (3 分)

12.(a) $A=\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\ 9 & 5 & 0\\ 7 & 0 & 3\end{vmatrix}$，在設有計算出 A 的值的情況下，證明 19 可整除 A。

(提示：已知 19 可整除 323，950 及 703。) (6 分)

(b)給出以 x，y 和 z 為未知量的方程組：$\begin{cases} x+y+z=1 \\ kx+y+kz=2 \\ k^2x+y+z=1 \end{cases}$

1)求 k 的值得使方程組有唯一解。
2)設 $k=-1$，求此方程組的通解。
(10 分)

2003/2004 學年 入學試試題

第一部份：七題全部作答。

1.(a)化簡 $\dfrac{\log_2 a^3 b - \log_2 a^2 b}{\log_4 \sqrt{a}}$ 。 (4 分)

(b)解 $2^{2x} - 3(2^x) - 4 = 0$ 。 (4 分)

2.(a)因式分解 $x^4 - y^4 - 4x^2 + 4y^2$ 。 (4 分)

(b)繪出方程 $x^4 - y^4 - 4x^2 + 4y^2 = 0$ 的圖。 (4 分)

3.若 $\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ ，且 $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{5}{9}$ ，求 $\sin 2\alpha$ 。 (6 分)

4.(a)求 $f(x) = \sec(2\arcsin\dfrac{1}{x})$ 的定義域。 (4 分)

(b)化簡 $\sec(2\arcsin\dfrac{1}{x})$ 。 (4 分)

5.(a)證明對於所有實數 c，二次方程

$(c^2+1)x^2+c^2x-(2c^2+1)=0$

都有兩個不同的實根。 (4 分)

(b)求(a)中二次方程的兩個根之積的最大值。 (4 分)

6.利用數學歸納法，證明

$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)=2^n(1)(3)(5)\cdots(2n-1)$，其中 n＝1，2，3・・・ (6 分)

7.從 1，2，3，・・・・，10 中隨機抽出兩個不同的數，求抽出的兩個數之和可被 4 整除的概率。

[提示：根據數位被 4 除時的餘數，把數字分成四組] (8 分)

第二部份：任擇三題作答，每題十六分。

8.(a)求在$(1-\frac{3}{2}x-x^2)^5$的展開式中x^4的係數。 (5 分)

(b)設 n 爲正整數及對於$0\le r\le n$，C_n^r爲在$(1+x)^n$的展開式中x^r的係數。

1)證明在$[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}$的展開式中，對於$0\le k\le n$，x^k的係數爲 $(k+1)C_n^k$。 (5 分)

2)考慮在$[1+(n+1)x](1+x)^{n-1}(1+x)^n$的展開式中$x^n$的係數，證明 $(C_n^0)^2+2(C_n^1)^2+\cdots\cdots+(n+1)(C_n^n)^2=(n+2)C_{2n-1}^n$。 (6 分)

9.在圖 1，△ABD 及△BCE 是等邊三角形，AE 和 CD 交於 F。

(a)證明 A，D，B 及 F 共圓。

[提示：先證明△ABE 和△DBC 是全等三角形。] (3 分)

(b)設 AB＝1，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$及$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$。從 D 及 F 到直線 AC 的垂線分別與直線 AC 交於 X 及 Y。設$\angle ACD=\alpha$。

1)以α表∠EAC。

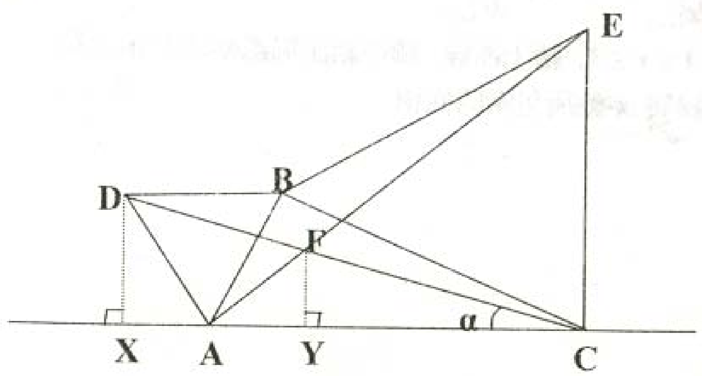
[提示：利用(a)，求∠AFD 。] (3 分)

2)證明$\frac{FY}{\tan\alpha}+\frac{FY}{\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)}=2$。 (3 分)

3)考慮△CDX，證明$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{5}$。 (3 分)

4)求 FY，且答案以根式表示。 (4 分)

圖 I



10.給出拋物線 $y^2=4x$。

(a)設 $y=mx+c$ 是拋物線的切線，證明 $c=\dfrac{1}{m}$。 (4 分)

(b)拋物線的兩條切線交於點 P(h，k)，證明兩條切線的斜率滿足
$hm^2-km+1=0$。 (1 分)

(c)若(b)中的兩條切線有夾角 α，證明 $\tan^2\alpha=\dfrac{k^2-4h}{(h+1)^2}$。 (8 分)

(d)設 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，問 P 的軌跡是哪種曲線？ (3 分)

11.給出曲線 $y=x(x-a)(x-b)$，其中 a 和 b 是正數。

(a)設 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=a}=-1$ 及 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=b}=2$，求 a 和 b。 (4 分)

(b)對 $-1\le x\le 3$，繪出曲線，圖中給出局部極值點和拐點。 (7 分)

(c)求曲線與 x 軸所包圍的面積。 (5 分)

12.(a)利用棣美佛定理，證明

$$\cos 5\alpha=\cos^5\alpha-10\cos^3\alpha\sin^2\alpha+5\cos\alpha\sin^4\alpha$$

推導

$$\cos 5\alpha=16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha$$ 。 (5 分)

(b)利用(a)，證明方程 $16x^4-20x^2+5=0$ 的根爲 $\cos\dfrac{\pi}{10}$，$\cos\dfrac{3\pi}{10}$，$\cos\dfrac{7\pi}{10}$ 及 $\cos\dfrac{9\pi}{10}$。 (6 分)

(c)由此，求 $\cos\dfrac{7\pi}{10}$，且答案以根式表示。 (5 分)

2004/2005 學年 入學試試題

<u>第一部份：七題全部作答。</u>

1.(a)設 a＝$\log_{10} 2$ 及 b＝$\log_{10} 3$。以 a 及 b 表 $\log_{10} 5\sqrt{6}$。 (3 分)

(b)解方程 $\log_5(1-4\cdot 5^x)=2x+1$。 (5 分)

2.設 a 爲正數及 $f(x)=\dfrac{e^x}{a}+\dfrac{a}{e^x}$ 爲偶函數 (即 $f(-x)=f(x)$)。

(a)求數 a。 (4 分)

(b)證明 $f(x)$ 在{ x ： $x>0$ }上是增函數。 (4 分)

3.設 $0<\theta<\pi$ 及 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$。

(a)證明 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{7}{5}$。 (5 分)

(b)求 $\tan\theta$。 (3 分)

4.有等差數列 a_1，a_2，a_3，・・・・，其公差非零及首項 a_1＝2。若 a_1，a_3，a_{11} 爲一等比數列中的連續三項，求此等比數列的公比。 (6 分)

5.(a)證明對任意正數 x 及 y，有 $x+y\geq 2\sqrt{xy}$。 (2 分)

(b)若正數 x 及 y 滿足 $xy=x+y+3$，證明 $xy\geq 9$。 (4 分)

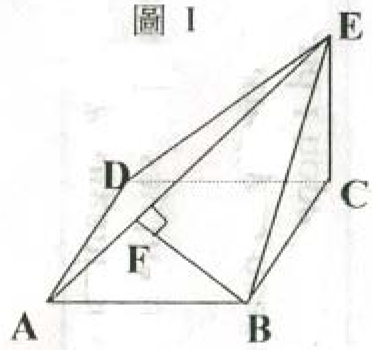
6.在圖 1，E－ABCD 是一四棱錐，其底 ABCD 是一正方形，AB＝1，EC 垂直於底面 ABCD，且 EC＝1。設 F 是 AE 上一點且 BF 垂直於 AE。

(1)求△ABE 的面積。 (3 分)

(2)求 BF。 (2 分)

(3)求二面角 D—AE—B。 (3 分)

圖 1



7.一公司有職員六人。每天，各人需要使用電腦的概率爲 0.5。假設各人對電腦的需要是獨立的，且在任何兩天的需要也是獨立的。

(a)求在同一天內以下事件的概率：

1)剛好有三人需要使用電腦； (2 分)

2)最少有三人需要使用電腦。 (2 分)

(b)若公司只有五台電腦。求最大的 n 使得公司在連續 n 天內都有足夠電腦以供使用的概率大於 0.9。 (4 分)

第二部份：任擇三題作答，每題十六分。

8.在圖 2 中，AC 是一直線。直線 DE 分別與半圓 ADB 及 BEC 相切於點 D 及 E。

直線 AD 及 CE 交於 F。設∠DAB＝x 及∠ECB＝y。

(a)1)證明∠DBE＝π－x－y。 (2 分)

2)證明 BDFE 是一長方形。 (4 分)

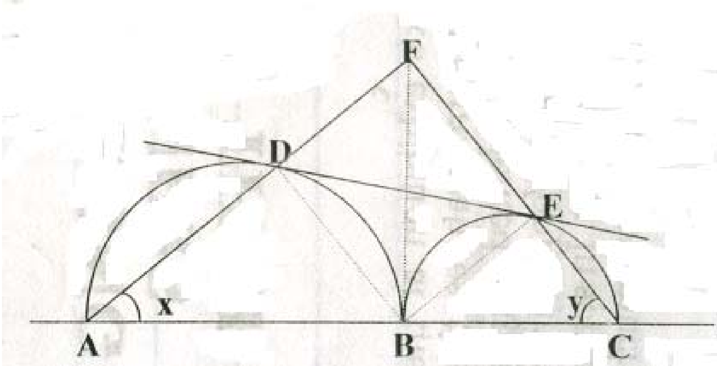
3)證明 FB⊥AC。 (3 分)

(b)設 AB＝2 及 BC＝1。

1)證明△CEB，△CFA 及△BEF 是三個相似三角形。 (3 分)

2)求 CE。 (4 分)

圖 II



9.直線 L 過點 P(－2，0)且有斜率 m (m >0)。假設直線 L 與拋物線 $y^2=8x$ 交於兩不同的點 A(x_1，y_1)及 B(x_2，y_2)。

(a)證明 x_1 及 x_2 是方程 $m^2x^2+4(m^2-2)x+4m^2=0$ 的根。 (2 分)

(b)證明 $(x_1-x_2)^2=\dfrac{64(1-m^2)}{m^4}$ 。 (4 分)

(c)證明 $|AB|^2=\dfrac{64(1-m^4)}{m^4}$ 。 (5 分)

(d)設 m＝ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ，若點 Q(h，k)爲一動點使得△ABQ 的面積爲 $\sqrt{192}$ ，求

點 Q(h，k)的座標所滿足的方程。 (5 分)

10.(a)已知函數 $f(x)=x^3-9x^2+24x$。

1)求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$。 (2 分)

2)求 $f(x)$ 的局部極大點，局部極小點和拐點。 (4 分)

3)繪出 $f(x)$ 的圖像。 (2 分)

4)從 $f(x)$ 的圖像，求實數 a 的範圍使得方程 $x^3-9x^2+24x-a=0$ 只有一實根。 (2 分)

(b)求由直線 $y=1$ 及曲線 $y=x^2$ 和 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 於第一象限內所包圍的區域的面積。 (6 分)

11.設 $i=\sqrt{-1}$ 及 $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$。

(a)證明多項式 z^5-1 的所有複數根爲 α^j， $j=0$，1，2，3，4。 (3 分)

(b)1)證明 $\alpha^3=\overline{\alpha^2}$ 及 $\alpha^4=\overline{\alpha}$。 (4 分)

2)利用(a)及(b)1)，證明

$$z^4+z^3+z^2+z+1=(z^2-2z\cos\frac{2\pi}{5}+1)(z^2-2z\cos\frac{4\pi}{5}+1)$$ 。 (5 分)

(c)利用(b)2)中的恒等式，求 $\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{4\pi}{5}$ 的值。 (4 分)

12.(a)因式分解行列式：$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$。 (6 分)

(b)求以下方程組的通解：$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y-4z=0 \end{cases}$。 (5 分)

(c)利用(b)的通解，解：$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y-4z=0 \\ 2x^2+y^2+z^2=18 \end{cases}$。 (5 分)

2005/2006 學年 入學試試題

<u>第一部份：七題全部作答。</u>

1.設 a 及 b 爲正數，且 $a+b=1$。

(1)證明 $ab\le\frac{1}{4}$。 (2 分)

(2)求 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$ 的最小値。 (5 分)

2.已知 l_1 ：$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$ 和 l_2 ：$(\cos 3\theta)x+(-2\sin\theta)y=-1$ 在直角坐標平面上爲平行直線，其中 $0\le\theta<\pi$ ，求 θ 值。 (7 分)

3.平面上有 9 點，其中恰有 4 點共線，此外並無 3 點共線。

(1)若隨機從中選出 3 點，問這 3 點不能共線的概率是多少？ (3 分)

(2)若把每兩點都連一直線，問共有多少條不同的直線？ (4 分)

4.用數學歸納法，證明對於 n＝1，2，3・・・以下等式成立：

$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)$ (7 分)

5.設 $\{a_k\}$ 爲一等差數列。已知 $a_1+a_2+a_3=33$，$a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=153$ 及 $a_1+a_2+\cdot\cdot\cdot+a_n=403$，其中 n 是某個正整數。

(1)求數 n。 (4 分)

(2)求數列的首項 a_1 及公差 d 。 (4 分)

6.設複數 $z=x+iy$ 滿足 $\left||z+2|-|z-2|\right|=2$ 。

(1)把上述方程化爲直角坐標方程。 (6 分)

(2)在複平面上繪出滿足方程的圖形。 (2 分)

7.已知關於 x 的方程 $[\log_{10}(ax)][\log_{10}(ax^2)]=4$ 有解，且所有解都大於 1。

求 a 的取值範圍。

[提示：設 $u=\log x$ ，把上述方程改寫成以 u 爲未知量的二次方程。] (8 分)

第二部份：任擇三題作答，每題十六分。

8.(a)1)求方程$\cos 4\theta = 0$的通解。 (2 分)

2)以$\cos\theta$表$\cos 4\theta$。 (4 分)

3)用 1)及 2)，求$\cos\dfrac{3\pi}{8}$，答案以方根表示。 (4 分)

(b)1)證明$\arctan x + \arctan y = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，其中$xy \neq 1$。 (2 分)

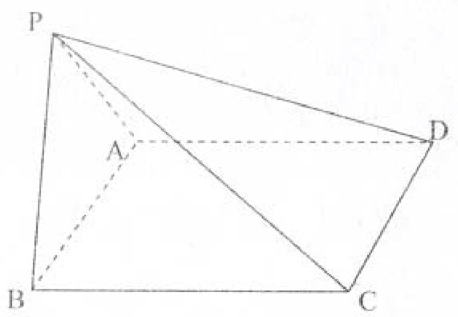
2)用(b)1)的結果，證明：若$\arctan x + \arctan y + \arctan z = 0$，則 $x + y + z = xyz$。(4 分)

9.如圖，四棱錐 P－ABCD 的底面 ABCD 是矩形，且 AB＝2，BC＝$\sqrt{2}$。側面 PAB 是等邊三角形，且側面 PAB 與底面 ABCD 垂直。

(1)證明側面 PBC 與側面 PAB 垂直。 (4 分)

(2)求側棱 PC 與底面 ABCD 所成角的大小。 (6 分)

(3)設平面 PAB 與平面 PCD 所成的二面角是α，求$\sin\alpha$。 (6 分)



10.(a)曲線 C：$y = x^3 + 1$在點$(-1$，0)的切線與曲線 C 有另一交點。

求：由曲線 C 與上述切線所包圍的區域的面積。 (10 分)

(b)設$f(x)$為多項式，其次數$n \geq 2$。證明$(x-a)^2$可整除$f(x)$，當且僅當 $f(a)$＝0 及$f'(a)$＝0。 (6 分)

11.(a)設l_1：$y = 3x + c$為一直線，且橢圓$\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$上有兩個不同點 P($x_1$，$y_1$)及 Q($x_2$，$y_2$)關於$l_1$對稱。設$l_2$：$y = mx + d$為通過 P 及 Q 的直線。

1)求m值。 (2 分)

2)以d分別表 $x_1 + x_2$及 $y_1 + y_2$，並求d的取值範圍。 (6 分)

3)考慮 P 及 Q 的中點，求c的取值範圍。 (3 分)

(b)設點 A(h ，k)爲橢圓 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上一點。證明橢圓 E 在點 A 的切線爲 L：$\dfrac{hx}{a^2}+\dfrac{ky}{b^2}=1$。

[提示：利用$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=0$當且僅當$x=h$及$y=k$ ，證明橢圓 E 與直線 L 只有一交點。] (5 分)

12.(a)因式分解行列式：$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & (b+c)^2 \\ 1 & b^2 & (a+c)^2 \\ 1 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$。 (7 分)

(b)1)求以下方程組的通解：$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-y-2z=8 \end{cases}$。 (4 分)

2)利用(b)1)的通解，說明對任意實數k ，方程組：

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x-y-2z=8 \\ \log_{10} x+\log_{10} y+\log_{10} z=k \end{cases}$$

都有唯一解。

(提示：考慮適當的函數的圖像。) (5 分)

2006/2007 學年 入學試試題

第一部份：七題全部作答。

1.若 $f(x)=x^3+ax^2+x+b$ 被 x^2+x-2 除時，其餘式為 $7x-3$。求 a 和 b 的值。(6 分)

2.已知函數 $f(x)=\log_a \dfrac{2+x}{2-x}$，其中 $a>1$。

(1)求 $f(x)$ 的定義域，並判別 $f(x)$ 的奇偶性。 (4 分)

(2)解不等式 $f(x)\ge \log_a 3x$。 (4 分)

3.(1)用數學歸納法，證明對於 n＝1，2，3・・・以下等式成立：

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$ (5 分)

(2)用(1)的結果，求 $1\times 2+2\times 3+\cdots+n(n+1)$。 (3 分)

4.(1)以極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表 $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$，其中 $i=\sqrt{-1}$。 (3 分)

(2)若 $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2006}=a+ib$，其中 a 和 b 為實數，求 a 和 b 的值。 (4 分)

5.甲和乙兩人進行乒乓球單打比賽，每賽一局，甲勝出的概率為 0.6，而乙勝出的概率為 0.4。若比賽可採用三局兩勝制或五局三勝制，問哪種賽制對甲更有利？試解釋你的選擇。 (8 分)

6.設數列{ a_k }的前 n 項和為 S_n。

(1)若{ a_k }為等差數列，其公差 d ＝1 且 S_{100} ＝250，求前 100 項中所有奇數項之和：$S_{odd}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$。 (3 分)

(2)已知對所有正整數 n，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，證明數列{ a_k }是等差數列。 (5 分)

7.已知在 $(1+2x-10x^2)(1+x)^{10}$ 的展開式中，x^k 的係數為 0，求 k 的值。 (7 分)

第二部份：任擇三題作答，每題十六分。

8.(a)已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha$。

求 $\sin\alpha$ 及 $\tan\alpha$ 的值。 (6 分)

(b)已知 $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}<\gamma<\pi$。

1)試比較 $\sin\gamma$ 與 $\sin(\beta+\gamma)$ 的大小。 (2 分)

2)設 $\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{2}$ 及 $\sin(\beta+\gamma)=\dfrac{5}{13}$，求 $\cos\gamma$ 的值。(求解過程中不得使用計算器)

[提示： $\cos\gamma=\cos[(\beta+\gamma)-\beta]$] (8 分)

9.如圖，ABCD－EFGH 爲一正立方體，其邊長爲 1。設點 M 在 BH 上，且 GM⊥BH，點 N 在 CH 上，且 NM⊥BH。

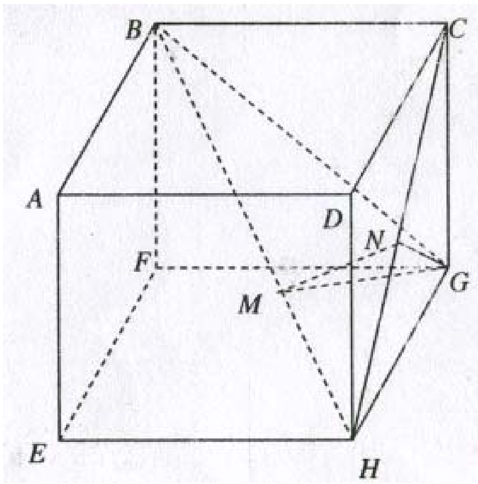
(1)考慮△BGH 的面積，求 MG 的長。 (3 分)

(2)求 MH 的長。 (2 分)

(3)證明△BCH 與△NMH 相似，並求 MN 及 NH 的長。 (5 分)

(4)求 NG 的長。 (3 分)

(5)求二面角 C—BH—G。 (3 分)



10.(a)設 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$。

1)證明 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$。 (3 分)

2)繪出曲線 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$，圖中給出局部極大值，局部極小值和拐點。 (7 分)

(b)設 $0\le a\le 1$，問當 a 爲何值時 $\int_0^1|x-a|dx$ 的值爲最小？ (6 分)

11.已知雙曲線$x^2-\frac{y^2}{3}=1$與直線$y=m(x-2)$交於兩點 P(x_1，y_1)及 Q(x_2，y_2)，且 P 及 Q 分別在雙曲線的左、右分支上。

(1)證明 x_1及 x_2滿足方程$(m^2-3)x^2-4m^2x+(4m^2+3)=0$。 (3 分)

(2)以m表 x_1+x_2及 x_1x_2。 (2 分)

(3)求m的取值範圍。 (3 分)

(4)設 O 爲原點。若$\angle POQ$爲直角，證明$8x_1^2x_2^2-9(x_1^2+x_2^2)+9=0$，並由此求$m$的值。 (8 分)

12.(a)因式分解行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^2 & q^2 & r^2 \end{vmatrix}$。 (6 分)

(b)已知以x，y，z爲未知量的方程組：

$$(E)\begin{cases} x+y+z=1 \\ px+qy+rz=s \\ p^2x+q^2y+r^2z=s^2 \end{cases}$$

1)證明方程組(E)有唯一解當且僅當p，q，r的值互不相同。 (2 分)

2)設$p=q\neq r$。求s的值得使方程組(E)有解，並對每一求等得的s值解方程組(E)。 (8 分)

[提示：設$w=x+y$]

2007/2008 學年 入學試試題

第一部份：七題全部作答。

1.解不等式 $\log_2(12-2^x)\geq 5-x$ 。 (6 分)

2.設 $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ 。

(a)求 $f(x)$ 的定義域及值域。 (4 分)

(b)求 $f(x)$ 的反函數 $f^{-1}(x)$ 。 (4 分)

3.(a)證明 $\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})\cos(2x-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1+\sin 4x}{2}$ 。 (4 分)

(b)求 $\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})\cos(2x-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ 的通解。 (3 分)

4.設 $k>0$ 及 $f(k)=x^3-3kx+2k\sqrt{k}$ 。

(a)1)因式分解 $f(x)$ 。[提示： $f(\sqrt{k})=0$ 。]

2)推算出：對任意正數 x ， $f(x)\geq 0$ 。 (5 分)

(b)證明對任意正數 a 、 b 及 c ，

$$2(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab})\leq 3(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc})$$

[提示：設 $k=\sqrt[3]{ab}$ 及用(a)2]的結果。] (3 分)

5.(1)以極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表 $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$ 。 (4 分)

(2)求 $(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{2007}$ 的輻角 α ，其中 $-\pi<\alpha\leq\pi$ 。 (3 分)

6.有袋三個，分別記爲 X、Y 及 Z。袋 X 內有紅球 1 個、黑球 2 個及白球 3 個。袋 Y 內有黑球 4 個。袋 Z 內有白球 5 個。現從袋 X 中隨機抽出 1 個球放在袋 Y 內，然後從袋 Y 中隨機抽出 1 個球放在袋 Z 內，再從袋 Z 中隨機抽出 1 個球放回袋 X 內。在以上的步驟後，問：

(a)在袋 X、Y 及 Z 內找到紅球的概率分別是多少？ (4 分)

(b)在袋 Z 內所有的球都是白色的概率是多少？ (4 分)

7.設{ a_k }為等差數列，其公差 $d \neq 0$ 。已知 a_1 ， a_3 和 a_7 為一等比數列中的連續三項，且 $a_1 + a_3 + a_7 = 70$。

(a)求此等差數列的首項 a_1 及公差 d 。 (5 分)

(b)求最小的 n 使得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq 2007$。 (3 分)

<u>第二部份：任擇三題作答，每題十六分。</u>

8.(a)用數學歸納法，證明對任意正整數 n，

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ (5 分)

(b)證明對任意整數 n ，

$$n^3 < \sqrt{n^3(n+1)^3} < \frac{n^3+(n+1)^3}{2}$$ (4 分)

(c)用(a)及(b)的結果，證明對任意正整數 n ，

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} < \sqrt{1^3 \cdot 2^3} + \sqrt{2^3 \cdot 3^3} + \cdots + \sqrt{n^3(n+1)^3} < \frac{[(n+1)^2-1][(n+1)^2+2]}{4}$$ (7 分)

9.已知橢圓 $ax^2 + by^2 = 1$ (其中 $a > 0$， $b > 0$)與直線 $x + y = 1$ 交於兩個不同點 $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$，且 $|PQ| = 2\sqrt{2}$ 。

(a)證明 x_1 及 x_2 滿足方程 $(a+b)x^2 - 2bx + (b-1) = 0$ 。 (2 分)

(b)證明 $a + b > ab$ 。 (2 分)

(c)以 a 及 b 表 $x_1 + x_2$ 及 x_1x_2 。 (2 分)

(d)證明 $a^2 + b^2 + 3ab - a - b = 0$ 。 (5 分)

(e)設 O 為原點及 C 為 P 和 Q 的中點。若 OC 的斜率為 2，求 a 及 b 的值。 (5 分)

10.(a)設 $y = x^5 - 5x^3$ 。

1)求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。 (2 分)

2)繪出曲線 $y = x^5 - 5x^3$ 。圖中給出局部極大值，局部極小值和拐點。 (8 分)

(b)求由曲線 $y = x^5 - 5x^3$ 及直線 $y = 6x$ 所包圍的面積。 (6 分)

11.如圖，正方形 ABCD 和正方形 ABEF 的邊長均為 1，且正方形 ABCD 垂直於

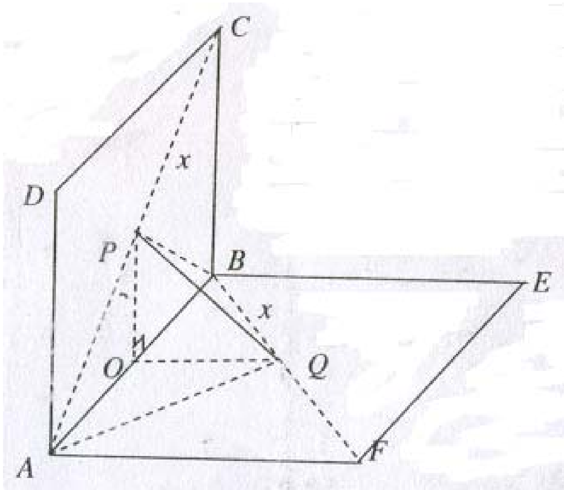
正方形 ABEF。設點 P 和點 Q 分別爲線段 AC 和 BF 上的動點，且 CP＝BQ＝x，$0<x<\sqrt{2}$。

(a)設 O 爲點 P 在 AB 上的垂足。

1)證明∠POQ 是一直角。 (2 分)

2)求 PQ 的長(答案以 x 表示)。 (7 分)

(b)設 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 P 和 Q 分別爲 AC 和 BF 的中點。求面 APQ 與面 BPQ 所成的二面角。【提示：設 R 爲 PQ 的中點，連 AR 和 BR。】 (7 分)



12.(a)因式分解行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ p^3 & q^3 & r^3 \end{vmatrix}$。 (6 分)

(b)設 $a>0$，已知以 x，y 和 z 爲未知量的方程組：

$$(E)\begin{cases} x+y+z=ax \\ x+y+z=ay \\ x+y+z=az \end{cases}$$

有非平凡解(即(x ，y ，z) $\neq$ (0，0，0))。

1)求 a 的值。 (4 分)

2)解方程組(E)。 (6 分)

2008/2009 學年 入學試試題

第一部份：七題全部作答。

1.若 x^3+ax^2+x+b 能被 x^2-x-2 整除，求 a 和 b。 (5 分)

2.(a)設有恆等式 $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x = A\sin(2x+\theta)$，其中 $A>0$ 及 $0\le\theta<2\pi$ 爲常數。求 A 及 θ。 (2 分)

(b)設 $f(x)=\ln(\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x)$。

1)求函數 $f(x)$ 的定義域及值域。 (4 分)

2)求 x 使得 $f(x)=0$。 (2 分)

3.(a)設 $u=\log_x 2$，其中 $x>0$ 及 $x\ne 1$。以 u 表 $\log_{2x}x+\log_{4x}x$。 (2 分)

(b)求實數 x 的範圍，使得 $\log_{2x}x+\log_{4x}x>0$。 (6 分)

4.(a)用數學歸納法，證明對任意正整數 n，

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ (5 分)

(b)求最小的 n 使得 $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\ge\frac{6}{25}$。 (3 分)

5.一袋中有球 10 個，其中有 8 個球標有數字 1，另 2 個球標有數字 5。

(a)若隨機同時抽出兩個球，則其數字之和可爲 2、6 或 10。問此三種情況的概率分別是多少？ (3 分)

(b)若隨機抽球 8 次，每次抽出 1 個球，記下球的數字後放回袋中，然後再繼續抽球。問 8 個記下的數字之和不小於 30 的機率是多少？ (5 分)

6.設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲兩數列，其中 $a_1=\frac{5}{6}$，且對 $n\ge1$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+(\frac{1}{2})^{n+1}$

及 $b_n=a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$。

(a)證明 $b_n=(\frac{1}{2})^{n+1}-\frac{1}{6}a_n$。 (1 分)

(b)證明 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是等比數列，並給出其通項運算式。 (4 分)

(c)設$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的前n項和爲S_n，求極限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$的值。 (3 分)

7.在$(1+px+\frac{x^2}{p})(1-x)^4$的展開式中，$x$ 、 x^2及x^3的係數按序爲一等差數列的連續三項。求p的值。 (7 分)

第二部份：任擇三題作答，每題十六分。

8.已知拋物線 C： $y=x^2$與直線 L： $y=mx+c$ 。設 C 與 L 交於點 M(x_1 ， x_1^2)及 N(x_2 ， x_2^2)。

(a)證明 $x_1+x_2=m$ 及 $x_1x_2=-c$ 。 (3 分)

(b)由(a)，或用其他方法，推導出拋物線 C 在點 M 的切線的斜率爲$2x_1$ 。 (1 分)

(c)設 M 和 N 爲不同的兩點。

1)若$c=2$ ，且 C 在點 M 的切線和 C 在點 N 的切線相交於點 Q。求交點 Q 的軌跡。 (6 分)

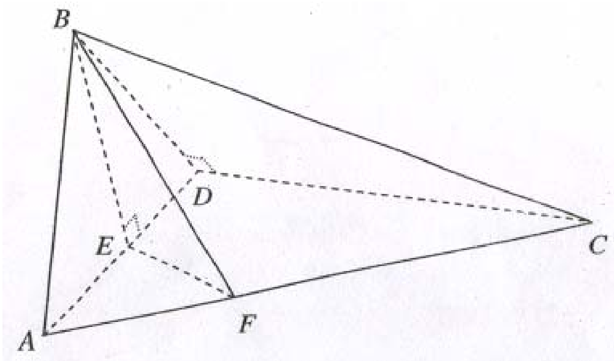
2)設 O 爲原點。以 x_1及 x_2表 cos∠MON。若∠MON 爲銳角，求c的取值範圍。(6 分)

9.如圖，B－ACD 是三棱錐，AC＝BC＝1、∠BDC＝$\frac{\pi}{2}$ 、∠BCD＝∠ACD＝$\frac{\pi}{6}$ 及∠ADB＝$\frac{\pi}{3}$ 。設 E 爲點 B 到 AD 的垂足、點 F 爲 AC 上的一點及∠BFE＝α 。

(a)證明△ADC 及△BDC 是全等三角形。由此，求∠ADC 及 AB 的長。 (5 分)

(b)證明 BE⊥△ADC。 (3 分)

(c)以α表 BF 的長。 (2 分)



(d)證明 cos∠BAC＝$\frac{1}{4}$ 。由此證明

$AF^2-\frac{1}{4}AF+\frac{1}{4}-\frac{3}{16\sin^2\alpha}=0$。

(4 分)

(e)若$\alpha=\frac{\pi}{4}$，求 AF 的長。

(2 分)

10.(a)一高爲h cm、半徑爲r cm 的正圓錐，其體積爲2π cm^3。設該圓錐的側面積爲A cm^2。

1)證明$A^2=\pi^2(r^4+\dfrac{36}{r^2})$。 (4 分)

2)求A^2的最小值。由此，求A的最小值。 (6 分)

(b)計算$\int_{-1}^{2}\left||x|-x^2\right|dx$。 (6 分)

11.設i爲純虛的複數，使得$i^2=-1$。

(a)求複數z使得$z^2=-7-24i$。 (5 分)

(b)設$\omega=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7}$，其中$k$是不能被 7 整除的整數。

1)證明$\omega^7=1$。由此，證明$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^6=0$。 (4 分)

2)用 1)的結果，證明$(\omega+\omega^{-1})^2+(\omega^2+\omega^{-2})^2+(\omega^3+\omega^{-3})^2=5$。 (3 分)

3)用 2)的結果，求$(\cos\dfrac{2k\pi}{7})^2+(\cos\dfrac{4k\pi}{7})^2+(\cos\dfrac{6k\pi}{7})^2$。 (4 分)

12.(a)因式分解行列式：$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$。 (7 分)

(b)1)求下列方程組的通解：

$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$。 (4 分)

2)利用 1)的通解，或用其他方法，解下列方程組：

$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ xy+xz+yz=14 \end{cases}$。 (5 分)

2009/2010 學年 入學試試題

第一部份：七題全部作答。

1.解方程 $3\log_{10} x - \sqrt{3\log_{10} x - 2} - 4 = 0$ 。 (6 分)

2.設 α 和 β 爲方程 $x^2 + 3kx + (2k^2 + k - 2) = 0$ 的根，其中 k 爲常數。

(a)證明 α 和 β 爲不相同的實數。 (2 分)

(b)以 k 表 $(\alpha - 2)(\beta - 2)$。 (3 分)

(c)設 $\beta < 2 < \alpha$ ，求 k 的取值範圍。 (3 分)

3.(a)設 $\tan\theta > 1$。若 $\tan\theta + \cot\theta = 4$ ，求 $\cos\theta$ 。 (4 分)

(b)證明恒等式 $\dfrac{\tan(A+B) - \tan A}{1 + \tan B \tan(A+B)} = \dfrac{\sin B \cos B}{\cos^2 A}$ 。 (4 分)

4.(a)設 $x > 0$ 。證明 $2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x+1} > 0$ 。 (3 分)

(b)用數學歸納法及(a)的結果，證明對任意正整數 n ，

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$$ (4 分)

5.設下列方程組(E)有非零解：

(E) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \\ 5x + 3y + pz = 0 \end{cases}$ ，其中 p 爲常數。

(a)求 p 的值。 (3 分)

(b)求(E)的通解。 (5 分)

6.設 n 爲正整數。若在 $(1+x)^n$ 的展開式中，x^4 、x^5 及 x^6 的係數按序爲一等差數列中的連續三項，求 n 的值。 (7 分)

7.一袋中有球 10 個，分別標有數字 1 至 10。若隨機同時抽出 4 個球，問：

(a)在抽出的球中最少有兩個球的數字不小於 5 的概率是多少？ (4 分)

(b)在抽出的球中任意兩個球的數字之和都不是 9 的概率是多少？ (4 分)

<u>*第二部份：任擇三題作答，每題十六分。*</u>

8.已知拋物線 P： $y=4x^2$ 。設 A(a ， $4a^2$)爲 P 上一點，其中 $a\neq 0$ 。

(a)若直線 $y=mx+c$ 與拋物線 P 相切，證明 $m^2+16c=0$ 。由此，或用其他方法，推導出拋物線 P 在點 A 的切線的斜率爲 $8a$ 。 (5 分)

(b)設拋物線 P 在點 A 的切線及法線分別與 y-軸相交於點 H 和點 K。證明 HK 的中點爲點 F(0， $\frac{1}{16}$)。 (5 分)

(c)設 C 是以點 F 爲圓心並通過點 A 的圓。證明拋物線 P 在點 A 的切線與圓 C 在點 A 的切線的夾角爲 $\tan^{-1}|8a|$ 。 (6 分)

9.(a)如圖 1，兩平面 α 與 β 相交於直線 l ，點 A 和點 B 分別在平面 α 及平面 β 之上，點 P 和點 Q 分別爲點 A 及點 B 到直線 l 的垂足。設點 X 在平面 β 之上，使得 PX // QB 及 XB＝PQ。

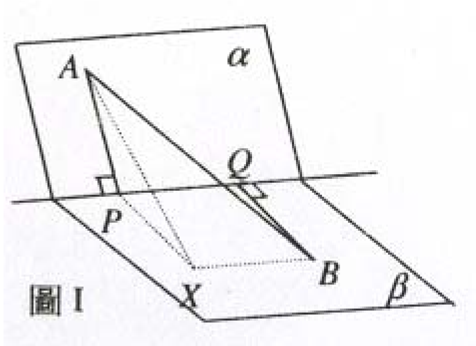
1)證明 PQBX 爲一矩形。 (2 分)

2)證明∠AXB＝ $\frac{\pi}{2}$ 。 (3 分)

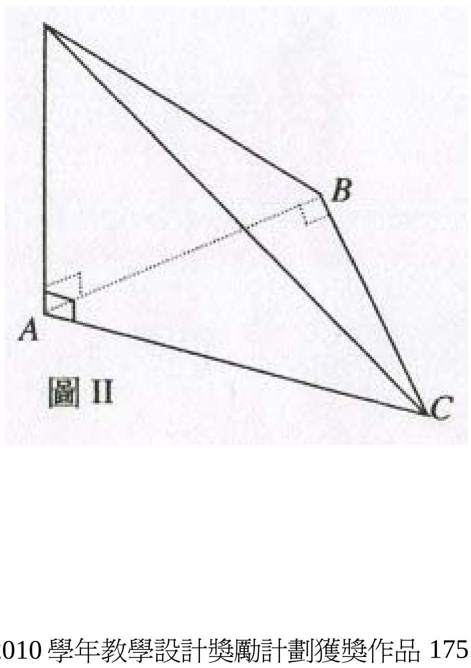
3)設 θ 爲平面 α 與平面 β 所夾的二面角。證明

$$\cos\theta=\frac{AP^2+BQ^2+PQ^2-AB^2}{2AP\cdot BQ}$$ 。

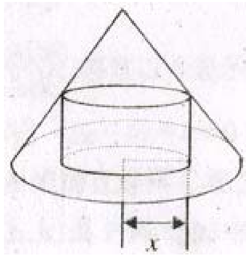
(3 分)



(b)如圖 2，D－ABC 是三棱錐，BC＝1、∠DAC＝∠DAB＝∠ABC＝ $\frac{\pi}{2}$ 、∠ACD＝ $\frac{\pi}{6}$ 及∠BCD＝ $\frac{\pi}{4}$ 。用(a)3)的結果，或用其他方法，求二面角 A－DC－B。 (8 分)



10.(a)如圖，正圓錐的高及底半徑均爲 1 ，圓錐內接有半徑爲 x 的正圓柱。設 $V(x)$ 爲該圓柱的體積。



1)證明 $V(x)=\pi(x^2-x^3)$ ， $0\le x\le 1$ 。 (2 分)

2)求 $\dfrac{dV}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2V}{dx^2}$ 。 (2 分)

3)繪出 $V(x)$ 的圖像，並在圖中把局部極大點，局部極小點和拐點標出來。 (6 分)

(b)設 $0<a<1$。求由曲線 $y=\pi(x^2-x^3)$ 及 $y=\pi ax^2$ 所包圍的面積。 (6 分)

11.設 $i=\sqrt{-1}$ 爲純虛的複數，使得 $i^2=-1$ 。

(a)設 $0\le\theta\le\pi$ 及 $\theta\ne\pi$ 。證明 $\dfrac{\cos\theta-1+i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}=i\tan\dfrac{\theta}{2}$ 。 (4 分)

(b)給出方程 $(\dfrac{1+z}{1-z})^n=-1$ ，其中 n 爲正整數。

1)證明當 n 爲偶數時，方程的解爲 $i\tan\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ ， $k=0$，1，2，．．．．，$n-1$ 。 (5 分)

2)當 n 爲奇數時，方程的解爲何？ [提示：方程只有 $n-1$ 個解。] (2 分)

(c)用(b)1)的結果，或用其他方法，解方程

$(1+z)^8-(1-z^2)^4+(1-z)^8=0$

[提示： $(1+z)^8-(1-z^2)^4+(1-z)^8=\dfrac{(1+z)^{12}+(1-z)^{12}}{(1+z)^4+(1-z)^4}$ 。] (5 分)

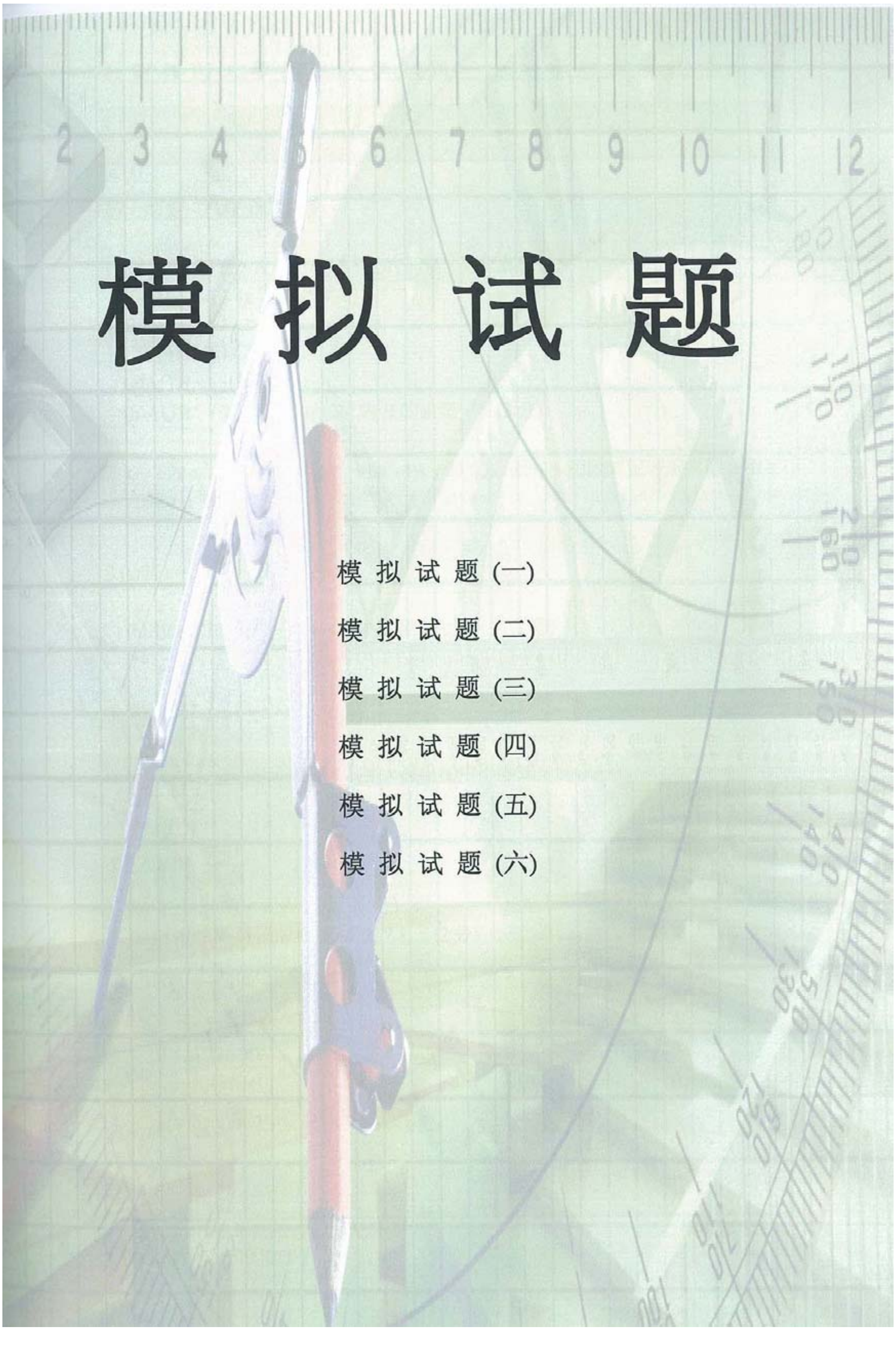
12.(a)設 n 爲正整數， $S_n=x+2x^2+\cdot\cdot\cdot+nx^n$ ，其中 $x\ne 1$。考慮 S_n-xS_n 。

證明 $S_n=\dfrac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^{n+1}}{1-x}$ 。 (4 分)

(b)設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一等比數列，其公比 $r>1$ ，且 $a_1+a_2+a_3=21$ 及 $a_1a_2a_3=216$。

1)求此等比數列的通項 a_n 。 (5 分)

2)用(a)的結果，求 $a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdot\cdot\cdot a_n^{a_n}$ ， $n=1$，2，．．．． 。 (7 分)



模拟试题

模擬試題(一)

第一部份：八題全部作答

1. R^2 爲 xy 平面，A 和 B 爲 R^2 上的子集，定義如下：
   $A=\{(x，y)：4x^2+9y^2\le 36\}$
   $B=\{(x，y)：y>x\}$
   用圖形標示以下各集：
   (a)$A\cap B$。 (3 分)
   (b)$A\cup B^c$，其中 B^c 爲在 R^2 內 B 的餘集。 (3 分)

2. $x-2$ 爲 x^3+ax^2+b 和 ax^3+bx^2+x+38 的公因式，用因式定理求常數 a 和 b 之值。 (6 分)

3.(a)若 $t=\tan\frac{x}{2}$，用 t 表 $\sin x$。 (4 分)
   (b)用(a)的結果表 $\frac{\sin x}{1+\sin x}$，並將答案化簡。 (2 分)

4.(a)解 $\left|\frac{3x-5}{4}-1\right|\le\frac{3}{8}$。 (3 分)
   (b)求 $\left|4x^2-50\right|$ 的最大值，其中 x 滿足(a)中不等式。 (3 分)

5.已知 $Z=\frac{7+i}{4-3i}$
   (a)用 a＋bi 的形式表 Z。 (2 分)
   (b)用 $r[\cos\theta+i\sin\theta]$的形式表 Z。 (2 分)
   (c)求$(\frac{7+i}{4-3i})^n$ 的模和輻角，其中 n 是正整數。 (2 分)

6.(a)將 $\frac{\log_{27}(3+x)^3}{\log_3(3+x)}$ 化至最簡。 (3 分)
   (b)解方程 $3^{\log_{27}(3+x)^3}-5^{\log_{25}(3-x)^2}=x^2$。 (3 分)

7.已知 f(x)＝$\begin{cases} 1-x^3(x\ge 0) \\ \cos x(x\le 0) \end{cases}$

(a)作 f 的圖形。 (4 分)
(b)求 f 的定義域和值域。 (3 分)
(c)求曲線 y＝f(x)和 x 軸的交點，和 y 軸的交點。 (3 分)

8.直線通過點 C(1，2)與曲線 y＝x^2 相交於 A，B 兩點，且 C 為線段 AB 中點，求該直線之斜率。 (6 分)

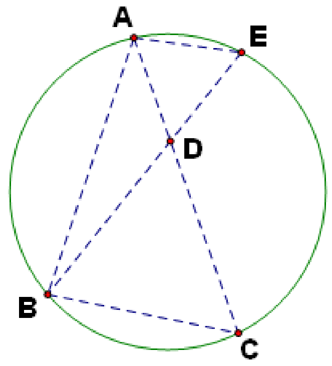
<u>第二部份：任擇四題作答，每題十二分</u>

1.已知 f(x)＝x^3－9x
(a)求使得 f(x)＞0 的 x 的範圍。 (3 分)
(b)作 f 的圖形。 (3 分)
(c)求由 y＝f(x)和 x 軸所圍成的區域的面積。 (6 分)

2.(a)求下列三平面的交點。 (6 分)
x－y＋z－1＝0
x－y＋2z＝0
2x－y＋3z－2＝0
(b)一直線通過(a)中的交點且垂直於平面 2x－y－3z＋12＝0，求該直線方程。 (6 分)

3.已知 y＝f(x)＝$\dfrac{1-x}{1+x}$
(a)求曲線 y＝f(x)在點(x，y)上的切線斜率。 (3 分)
(b)上述切線中有些平行於直線 x＋2y＝0，求所有這些切點的 x 座標。 (4 分)
(c)上述切線中有些斜率大於－1，求所有這些切點的 x 取值範圍。 (5 分)

4.如圖



AB＝AC＝2，∠CAB＝30^0，BE 爲三角形 ABC 的外接圓的直徑且 D 爲 BE 和 AC 的交點。

(a)證明：∠ADB＝135^0。 (4 分)

(b)用正弦定律證明 AD：DC＝1：$\sqrt{3}$。(提示：$\sin 15^0=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$) (8 分)

5.(a)解 $2e^{2y}-e^{y}-1=0$ (4 分)

(b)求 $f(x)=2e^{x}-e^{-x}$ 的反函數 (8 分)

6.在一比賽中 A，B 兩人輪流投擲一不偏骰子，先擲出 3 者爲勝，若 A 先擲

(a)求 A 在第一擲中勝出的或然率。 (2 分)

(b)求 B 在第一擲中勝出的或然率。 (2 分)

(c)求 A 在第二擲中勝出的或然率。 (2 分)

(d)求終於由 A 勝出的或然率。(即：無論擲幾多次，直到 A 勝出的或然率) (6 分)

模 擬 試 題 (二)

第一部份：八題全部作答

1.(a)解方程 $x^2=4+\sqrt{12}$ ，並將答案表成 $a+\sqrt{b}$ 的形式，其中 a、b 爲正整數。

(4 分)

(b)設 $2x=\log_7(4+\sqrt{12})$，求 7^x 的值。 (2 分)

2.已知方程 $(1-k)x^2+4x-(2+4x)=0$ 有實根，確定 k 的值。 (6 分)

3.(a)設 $t=\tan\frac{x}{2}$ ，導出用 t 表 $\cos x$ 的公式。 (3 分)

(b)用(a)的結果求 $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\right)^2$ 的最大值和最小值。 (3 分)

4.若 2x 是 x－3 和 x＋1 爲一幾何級數中的相鄰項
(a)求 x 的值。 (4 分)
(b)對(a)中所得的每個 x 值，求其公比。 (2 分)

5.求通過兩直線 $3x+4y-5=0$ 和 $2x-3y-9=0$ 的交點且平行於直線 $4x-2y+5=0$ 的直線方程。 (6 分)

6.設 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 爲向量且 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直於 $\vec{a}$

(a)證明 $\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$ ，其中 $\left|\vec{a}\right|$ 表 $\vec{a}$ 的長度。 (3 分)

(b)若 $\left|\vec{b}\right|=10$ 和 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=8$，求 $\left|\vec{a}\right|$ 的值。 (3 分)

7.圓內接四邊形 ABCD 的對角線 AC 和 BD 交於 E，已知 AE＝10，BE＝6，CE＝9，$\angle AEB=120^0$
(a)計算 AB。 (4 分)
(b)計算 CD。 (4 分)

8.設 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+kx^3-\frac{9}{2}x^2-36x+5$

(a)若曲線 $y=f(x)$在 $x=3$ 處有水準切線，求 k 的值。 (4 分)

(b)對(a)中所得的 k 值，求 $y=f(x)$的所有水準切線的切點的 x 座標。 (4 分)

<u>第二部份：任擇四題作答，每題十二分</u>

1.設 $y=f(x)$爲滿足三個條件的函數

(1)$f(0)=0$，$f(1)=11$

(2)$f(x)$的一階導數爲一個二次多項式

(3)當 $x=2$ 和 $x=-2$ 時，$f(x)$達到極值

(a)試確定 $f(x)$。 (6 分)

(b)求在第一象限中，曲線 $y=f(x)$和 x 軸所圍成的區域的面積。 (6 分)

2.(a)設 $t=\cos x$，導出用 t 表示 $\cos 4x$ 的公式。 (5 分)

(b)用(a)的結果解方程 $8\cos^4 x-8\cos^2 x+1=0$，其中 x 的取值範圍在 0 和$\frac{\pi}{2}$之間。 (2 分)

(c)用(b)的結果求 $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$和 $\cos^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{3\pi}{8}$之值。 (3 分)

(d)用(c)的結果求 $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}$之值。 (2 分)

3.(a)一直線通過圓 C 的圓心且交 C 於$(1+\sqrt{2}，\sqrt{2})$和$(1-\sqrt{2}，-\sqrt{2})$兩點，求該圓的方程。 (4 分)

(b)拋物線通過點(4，3)且其頂點切 x 軸於點(1，0)，求該拋物線的方程。 (5 分)

(c)直線通過(a)中的圓和(b)中的拋物線的交點，求該直線方程。 (3 分)

4.(a)求在$(5x^3+\frac{2}{x})^{4n}$的展開式中不含 x 的項，其中 n 爲自然數，用 n 表示答案。 (4 分)

(b)將$\dfrac{2x-1}{(x+1)(3x+2)}$表示成部份分式。 (3 分)

(c)將$\dfrac{2x-1}{(x+1)(3x+2)}$依 x 的升冪序展開成一個冪級數，寫出直到含 x^3的前幾項，並指出 x 在什麼區域內取值使上述的展開式成立。[提示：可以利用(b)之結果] (5 分)

5.有十個立方體，除顏色外，外表完全相同，已知有三個立方體爲紅色，兩個白色，兩個藍色，兩個綠色和一個黃色。

(a)將所有立方體排成一行，問共有多少種不同排法？ (4 分)

(b)將所有立方體排成一行，若規定紅色的立方體必須靠在一起，問共有多少種不同排法？ (4 分)

(c)將所有立方體排成一行，若規定紅色的立方體必須互相分隔，問共有多少種不同排法？ (4 分)

6.(a)設 n 爲正整數，求 $1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{4n}$之和，其中 $i=\sqrt{-1}$。 (2 分)

(b)設 $S=1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+(4n+1)i^{4n}$，求$(1-i)S$ 之值。用(a)的結果將答案表示爲 $a+bi$ 的形式，其中 a、b 爲實數。 (3 分)

(c)用(b)的結果求 S 之值，並將答案化簡。 (2 分)

(d)用數學歸納法證明：$1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+(4n+1)i^{4n}=(2n+1)-2ni$。 (5 分)

模擬試題(三)

第一部份：九題全部作答

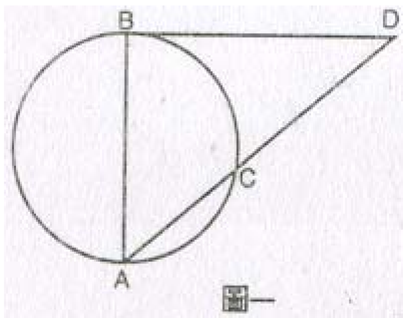
1.(a)解 $2^{2x+1}-2^x-6=0$ 。 (3 分)
(b)解 $\log_3 x = 4\log_x 3$ 。 (3 分)

2.設 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+4$ 可被 $x+2$ 整除，且當 $f(x)$ 被 $x-1$ 除時，余項爲 9，求 a 和 b 的值。 (6 分)

3.(a)將 $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$ 分成部份分式之和。 (3 分)
(b)計算 $\displaystyle\sum_{n=2}^{100}\frac{2}{(n+1)(n-1)}$ 。 (3 分)

4.(a)解 $|x-3|\geq 2$ 。 (2 分)
(b)解 $\dfrac{(x+3)(x-2)}{x}\geq 0$ 。 (4 分)

5.在圖一中，DB 是圓於點 B 的切線，
AB 是一直徑，AD 與圓交於點 C。
(a)證明△ABC 與△BDC 相似。 (3 分)
(b)若 AC＝3 及 BC＝4，求 CD。 (3 分)



6.(a)利用數學歸納法，證明：

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{，} n=1,2,3,\cdots \text{(4 分)}$$

(b)由此，或用其他方法，找出全部使 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ 可被 4 整除的正整數 n 。 (2 分)

7.已知以 x ， y ， z 爲未知量的線性方程組： $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ y+z=2 \\ kx+3y+2z=4 \end{cases}$ ，求所有實數 k 使

方程組。
(1)有唯一解；
(2)無解；
(3)有無窮多解。
(6 分)

8.(a)求等比級數之和：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$。 (2 分)
(b)對於上述等比級數
1.求首 n 項之和 $\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ 的公式。
2.若首 n 項之和大於 0.999，求 n 的最小值。
(4 分)

9.已知 w＝$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$。
(a)用 a＋bi 的形式表示 w，其中 a 和 b 是實數。 (2 分)
(b)用極座標形式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表示 w。 (2 分)
(c)解 $z^3=\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$。(可將答案以極座標形式表示) (2 分)

<u>第二部份：任選四題作答，每題十二分</u>

1. (a)若 $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=A\sin(2x+\lambda)$，求 A 和 λ，其中 $A>0$ 及 $-\pi\le\lambda\le\pi$。

由此作函數 $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$，$0\le x\le 2\pi$ 的圖形。 (5 分)

(b)1.證明 $\tan\theta+\tan 2\theta=\frac{\sin 3\theta}{\cos\theta\cos 2\theta}$。
2.由此，或用其他方法，求 $\tan\theta+\tan 2\theta=\tan 3\theta$ 的通解。
(7 分)

2.(a)圓 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 通過點 $(2,1)$，$(3,0)$ 及 $(0,1)$。求該圓的圓心和半徑。 (5 分)

(b)求所有 m 的值使直線 $y-1=m(x-2)$ 與橢圓 $x^2+\dfrac{y^2}{5}=1$ 相交。 (7 分)

3.已知直線 L 的方程：x＝2＋t，y＝3－t，z＝－2＋t，－∞＜t＜∞。

(a)求包含 L 及通過原點之平面的方程。 (4 分)

(b)求通過原點及與 L 垂直相交之直線的方程。 (4 分)

(c)求直線 L 與(b)中之直線的交點。 (4 分)

4.已知 f(x)＝ $\dfrac{6(x-5)}{(x-6)^2}$ ，x≠6。

(a)求 f˝(x)和 f˝˝(x)。 (3 分)

(b)求函數 y＝f(x)的局部極大值，局部極小值和拐點。 (3 分)

(c)作 y＝f(x)，0≤x＜6 的圖形。 (3 分)

(d)作 y＝$|f(x)|$ ，0≤x＜6 的圖形。 (3 分)

5.(a)求由曲線 $y=12-x^2$ 與直線 $y=x$ 所包圍的面積。 (5 分)

(b)1.計算：$\int_0^1 (1+x)^n\,dx$ 。

2.由此，或用其他方法，證明：$\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k+1}C_n^k=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ 。

(7 分)

6.一袋內共有皮球十個，其中三個是紅色，三個是白色，四個是藍色，現從袋
中
逐一抽取皮球，且所抽出的皮球不再放回。

(a)若抽取兩個皮球，兩個皮球都是藍色的概率是多少？ (2 分)

(b)若抽取三個皮球，三種顏色的皮球都出現的概率是多少？ (5 分)

(c)若逐一抽出皮球，直至一藍色皮球被抽出，求

1.沒有紅色皮球被抽出的概率；

2.最少有一紅色皮球被抽出的概率。

(5 分)

模擬試題(四)

第一部份：九題全部作答

1.(a)解 $\log_6(x-3)+\log_6(x-2)=1$。

(b)解 $3^{x^2-1}=5^{x+1}$。

(6 分)

2.若 $f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ 被 x^2-x-2 除時，其餘式爲 $2x+1$。求 a 和 b 的值。
(5 分)

3.設 $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$，$x\neq 2$。 (5 分)

(a)求 $f(x+3)$ 和 $f(f(x))$。

(b)求 $f(x)$ 的反函數 $f^{-1}(x)$。

4.(a)試繪出{ (x,y)： $2x+3y\leq 6$， $x\geq 0$， $y\leq 0$ }的區域圖形。

(b)解不等式 $\left|x^2-2\right|<x$。

(6 分)

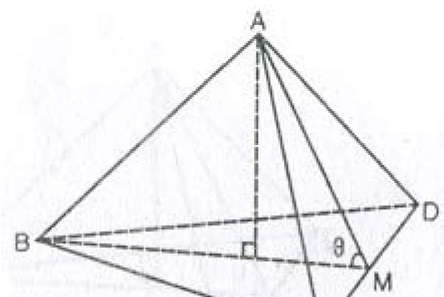
5.在圖一中，ABCD 是正三棱錐，它的每邊長度是 2 cm，M 是 CD 的中點，而∠BMA＝θ。

(a)利用余弦定律，證明 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$。

(b)求此正三棱錐的高度。

(c)求此正三棱錐的體積。

(6 分)



圖一

6. (a)設 $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=A\sin(2x+\lambda)$，其中 $A>0$ 及 $0\leq\lambda\leq 2\pi$。求 A 和 λ。

(b)由此，求 $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{2}$ 的通解。

(6 分)

7.(a)利用數學歸納法，證明：$1+(1+x)+\cdots+(1+x)^n=\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{x}$ ，$n=1,2,3,\cdots$

(b)由此，或用其他方法，證明當$n\geq 3$時$C_3^3+C_3^4+C_3^5+\cdots+C_3^n=C_4^{n+1}$。

(6 分)

8.給出直線 L：3x＋4y＝45 和圓 C：$x^2+y^2-8x-4y+16=0$。 (6 分)
(a)寫出通過圓 C 的圓心並垂直於直線 L 的直線的方程。
(b)求在(a)得出的直線與直線 L 的交點。
(c)由此求出直線 L 與圓 C 之間的最短距離。

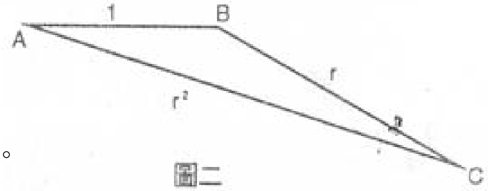
9.考慮以x，y，z爲未知量的線性方程組：$\begin{cases}x+5y-3z=0\\ 2x+y=0\\ kx+y+z=0\end{cases}$。 (6 分)

(a)當k爲何值時此方程組有非零解？
(b)根據在(a)得出的k值解上述方程組。

第二部份：任擇四題作答，每題十二分

1.給出二次函數 $f(x)=x^2+3x+3$。
(a)若$-2\leq x\leq 2$，求 $f(x)$的極大和極小值。 (3 分)
(b)設α和β是方程 $f(x)=0$的兩個根。 (9 分)
1.求$\alpha+\beta$和$\alpha\beta$的值。
2.求$\alpha^2+\beta^2$的值。
3.若一二次方程的根爲$\dfrac{1-\alpha}{2+\beta}$和$\dfrac{1-\beta}{2+\alpha}$，求此方程。

2.圖二中，△ABC 的邊長分別爲 1，r，r^2，
其中 r＞1。設∠B－∠C＝$\dfrac{\pi}{2}$。 (12 分)



圖二

(1)利用正弦定律，證明 $\sin^2 A=\sin B\sin C$。
(2)利用(1)和條件∠B－∠C＝$\dfrac{\pi}{2}$，證明 $\sin^2 A=\dfrac{1}{2}\cos A$。
(3)證明：$\cos A=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4}$。

(4)對∠A 利用余弦定律，證明$(r-\frac{1}{r})^2=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$。

(5)求r的值。

3.(a)設直線 y＝mx＋c 和拋物線 y^2＝4ax 相切，證明 mc＝a。 (4 分)

(b)一動點與兩定點 A(－3，－2)和 B(9，－2)的距離的和為 16。 (8 分)

1.問此動點的軌跡為何種類型的圓錐曲線？

2.求此動點的軌跡。

4.設函數 $f(x)=x^3-3x^2-24x+15$

(a)1.求 f´(x)和 f´´(x)。

2.繪出曲線 $y=f(x)$，圖中給出 $f(x)$ 的局部極大值，局部極小值和拐點。 (6 分)

(b)求由曲線 $y=f(x)$ 與直線 $y=-14x+15$ 所包圍的區域的面積。 (6 分)

5.(a)1.若 $\frac{-7-i}{3+4i}=a+bi$，其中 $i=\sqrt{-1}$，a 和 b 是實數，求 a 和 b。

2.以極座標形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 表示 $\frac{-7-i}{3+4i}$。

3.計算 $(\frac{-7-i}{3+4i})^{10}$。

(6 分)

(b)給出兩複數 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ 和 $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，其中 $r_1\geq 0$ 及 $r_2\geq 0$。

證明：$|z_1+z_2|=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

由此，或用其他方法，證明 $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$。 (6 分)

6.(a)同時擲出三顆勻稱骰子，求 (7 分)

1.沒有一顆出現一點的概率；

2.只有一顆出現一點的概率；

3.只有兩顆出現一點的概率；

4.三顆都出現一點的概率。

(b)若擲出三顆骰子兩次，求 (5 分)

1.在兩擲中出現一點的數目是相同的概率；

2.第一擲出現一點的數目比第二擲出現一點的數目大的概率。

模擬試題(五)

第一部份：九題全部都要作答

1.(a)解 $\log_{10} x + \log_{10}(9-2x) = 1$ 。

(b)解 $\begin{cases} 3^{x+y} = 9 \\ 3^{x-y} = 3 \end{cases}$ 。

(6 分)

2.(a)求當 $f(x) = x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$ 被 $(x-1)$ 除時的余項。

(b)由此，求當 $x^{10} - 8$ 被 $(x-1)^2$ 除時的余項。

[提示： $x^{10} - 1 = (x^9 + x^8 + \cdots + x + 1)(x-1)$]

(5 分)

3.設 $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{\pi}$ 。

(a)求 $f(x)$ 的值域。

(b)求 $f(x)$ 的反函數 $f^{-1}(x)$ 。

(c)寫出 $f^{-1}(x)$ 的值域。

(5 分)

4.(a)解不等式 $\dfrac{|x-2|}{x} \le 3$ 。

(b)繪出在 xy 平面上滿足下列不等式的範圍：

$$\begin{cases} x + y \le 2 \\ 2x - y \le -3 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

(6 分)

5. (a)化簡 $\dfrac{\sin(\pi + x)}{\tan(\pi - x)} - \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\tan(\pi + x)}$ 。

(b)求 $1 - \cos 6x = \sin 3x$ 的通解。

(6 分)

6.設以 x 爲變數的二次方程 $5x^2-(10\cos\alpha)x+(6+7\cos\alpha)=0$ 有等根。

(a)求 $\cos\alpha$ 的值。

(b)對於 $0\le\alpha\le 2\pi$ ，給出 α 的值。(取小數點後四位)

(6 分)

7.考慮以 x 及 y 爲變數的圓錐曲線方程：$\dfrac{x^2}{9-4k}+\dfrac{y^2}{k-1}-2kx+ky-2k=0$ 。

(a)當 $k=0$ 時，繪出方程的圖。

(b)1.當 k 爲何值時上述方程是圓的方程？

2.求在(b)1.中的圓的圓心及半徑。

(6 分)

8.(a)設 $r>0$ 及 $i=\sqrt{-1}$ ，利用數學歸納法，證明：

$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ ， $n=1,2,3,\cdots$

(b)計算 $(-1+i)^{100}$ 。

(7 分)

9.(a)繪出下列極座標方程的圖：

1. $r=3$ ；

2. $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ ， $r\ge 0$ ；

3. $r=2\theta$ ， $0\le\theta\le 2\pi$ 。

(b)將極座標方程 $r=\sin\theta$ 轉化成直角坐標方程。

(5 分)

<u>第二部份：任擇四題作答，每題十二分</u>

1. (a)解 $\tan2\theta-\cot3\theta=0$， $0\le\theta<2\pi$ 。 (4 分)

(b)1.設 $x=\tan\theta$，以 x 表示 $\tan2\theta$ 及 $\cot3\theta$ 。

2.從(a)及(b)1.，證明 $\tan\dfrac{\pi}{10}$ 是 $5x^4-10x^2+1=0$ 的一個根。

3.證明：$\tan\dfrac{\pi}{10}=\sqrt{1-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}}$ 。

(8 分)

2.在圖一中，圓上有點 A 及 E。線段 AC 及 EC 分別與圓交於點 B 及 D。

(a)證明

1.△ACD 及△ECB 是相似的；

2. $AC \cdot BC = EC \cdot DC$ 。

(3 分)

(b)設 AB＝BC＝1，AD 是圓的直徑及 $\angle DAB = x$ 。

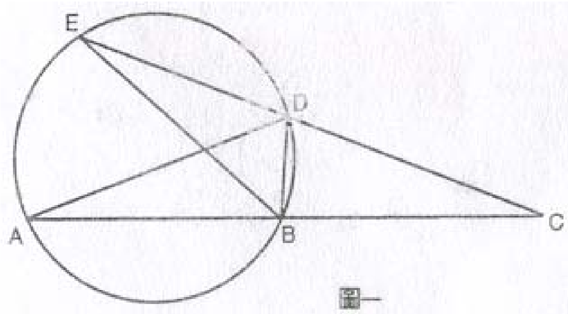
1.證明 $\angle DCA = x$ 。

2.利用(a)2.或其他方法，證明：

ED＝ $2\cos x - \dfrac{1}{\cos x}$

3.當 ED＝ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 時，求 x 。

(9 分)



圖一

3.(a)已知直線 L ： $Ax + By + C = 0$ 及一定點 $P(h,k)$ 。

1.求通過點 P 及與直線 L 垂直的直線的方程。

2.求直線 L 與 1.中的直線的交點。

3.證明點 P 與直線 L 的距離是 $\left|\dfrac{Ah + Bk + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$ 。

(8 分)

(b)通過原點及圓 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ 的圓心的直線與圓交於兩點。利用(a)3.或其他方法，求在這兩交點上圓的切線的方程。 (4 分)

4.(a)設曲線 $y = f(x)$ 通過點(0，4)及 $f'(x) = x^2 + 3x - 10$ 。

1.求 $f(x)$ 。

2.繪出曲線 $y = f(x)$ ，圖中給出 $f(x)$ 的局部極大值，局部極小值和拐點。

(7 分)

(b)設 $S_n(x) = 2x + 4x^3 + 6x^5 + ... + 2nx^{2n-1}$ ，其中 n 是正整數。

1.證明：當 $x \neq \pm 1$ 時， $\int S_n(x)dx = \dfrac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2} + C$ ，其中 C 是一常數。

2.由此，求： $S_n(x)$ 在 $x \neq \pm 1$ 時的公式。

(5 分)

5.(a)因式分解行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$。 (4 分)

(b)考慮以 x ， y ， z 爲未知量的線性方程組：$\begin{cases} x+y+\alpha z=0 \\ x+y+\beta z=0 \\ \alpha x+\beta y+z=0 \end{cases}$ 。

1.問 α 及 β 在甚麼條件下上述方程組有非零解。

2.當方程組有非零解時，解此方程組。

(8 分)

6.一袋內有皮球 12 個，號碼分別爲 1 至 12，其中 1 至 8 號爲紅色，9 至 12 號爲藍色。

(a)若從袋中取出下列的皮球，問有多少種選取方法？

1.三個紅色的皮球及兩個藍色的皮球；

2.五個皮球，其中最少有三個是紅色的。

(5 分)

(b)現袋中隨機逐一抽取皮球，且所抽出的皮球不再放回。

1.問四個藍色的皮球是連續地被抽出的概率是多少？

2.若在兩個紅色的皮球被抽出後便停止抽取皮球，問最多只有兩個藍色的皮球被抽出的概率是多少？

(7 分)

模擬試題(六)

第一部份：九題全部作答

1.解$\begin{cases} 2^{x-y}=4 \\ \log_y x = 2 \end{cases}$。 (5 分)

2.(a)求在$(1+x)^8(1+x^2)^5$的展開式中x^5的係數。
(b)在$(1+x)^n$的展開式中，x^{r+1}的係數是x^r的係數的兩倍，求 n 與 r 的關係。
(6 分)

3.(a)設 $p\neq 3$，若方程$(p-3)x^2-2px+6p=0$的兩個根都是實數，求 p 的範圍。
(b)若上述方程的兩個根都是正實數，求 p 的範圍。
(6 分)

4.(a)繪出{ (x,y)： $x+y\leq 2$ ， $y-2x\leq 5$ ， $x\leq 0$ ， $y\geq 0$ }的區域圖形。
(b)解不等式$\dfrac{|3x-1|}{x}\leq 2$。
(6 分)

5.求 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{2}$ 的通解。 (5 分)

6.(a)已知兩圓$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$和$(x-b)^2+(y-a)^2=c^2$，其中 $a\neq b$。求它們相切時的條件，答案以 a，b 及 c 表示。
(b)設(a)中的兩圓相切，求通過它們的切點並與它們相切的直線的方程。
(6 分)

7.已知一正圓錐，其底的半徑為 1，高為 2。設其頂點為 C，底的圓心為 O。設 A 及 B 是在其底的圓周上的兩點，並且$\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$。求三角形 ABC 的面積。 (6 分)

8.利用數學歸納法，證明對於所有正整數n ，$2^{2n-1}+5^{2n-1}$均可被 7 整除。 (6 分)

9.一袋內有黑球 5 個，白球 4 個。 (6 分)

(a)若從袋中隨機抽出兩個球，問一個球是黑色而另一個球是白色的概率是多少？

(b)設將 x 個紅球加入袋中，然後，若從袋中隨機抽出兩個球，則兩個球都是紅色的概率是 $\frac{1}{7}$ ，求 x。

第二部份：任擇四題作答，每題十二分

1.設 $5\tan x=\tan(x+\theta)$ 。 (12 分)

(1)證明： $\cot\theta=\dfrac{1+5\tan^2 x}{4\tan x}$ 。

(2)證明： $\sin(2x+\theta)=\dfrac{3}{2}\sin\theta$ 。

[提示：證明 $\sin(2x+\theta)=\sin\theta(\sin 2x\cot\theta+\cos 2x)$ 然後用(1)]

(3)利用(2)或其他方法，對於 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ ，解 $5\tan x=\tan(x+\dfrac{\pi}{6})$ 。

(答案取小數點後四位)

2.在圖 1 中，ABC 是一三角形，設∠A＝θ ，∠B＝β 及∠C＝γ 。一以 BC 為直徑的半圓分別與 AB 及 AC 相交於 D 及 E。設 O 為半圓的圓心。

(1)證明∠ODE＝∠OED＝θ 。

(2)證明△ADE 與△ACB 是相似的。

(3)求 $\dfrac{DE}{BC}$ ，答案以 θ 表示。

(4)求 $\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}$ ，答案以 θ 表示。

(12 分)

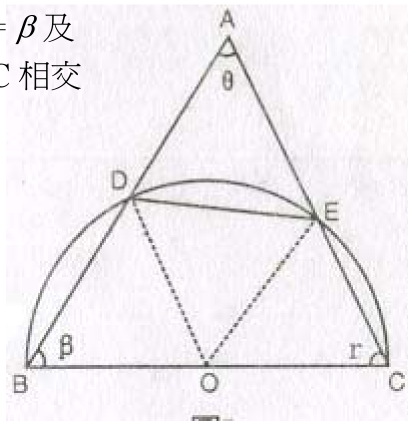


圖1

3.已知一圓 C：$x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 及一定點 A(3，0)。一通過 A 的動直線與 C 相交於 $P(x_1，y_1)$及 $Q(x_2，y_2)$。設 $M(h,k)$為 P 與 Q 的中點。 (12 分)

(1)設動直線為 $y=m(x-3)$。證明 x_1及 x_2適合

$(m^2+1)x^2-(6m^2+4m+2)x+(9m^2+12m+4)=0$。

(2)由此，證明： $h=3+\dfrac{2m-2}{m^2+1}$ 。

(3)利用代換 $m=\dfrac{k}{h-3}$ ，求 (h,k) 所適合的方程。

(4)描述動點 M 的軌跡。

4.(a)一半徑爲 r 的正圓柱，其表面面積(包括上、下兩底)爲 150π。設 V(r)爲圓柱的體積。 (8 分)

1.求 V(r)，答案以 r 表示，並寫出 r 的範圍。

2.問圓柱的體積最大是多少？

(b)計算：$\int_0^4 |x(x-3)|dx$。 (4 分)

5.(a)計算：$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 105 & 106 \\ 107 & 108 & 109 \end{vmatrix}$。 (4 分)

(b)設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中 a,b 及 c 爲常數。當 $f(x)$ 被 $(x-2)$ 除時，餘數爲 -7。當 $f(x)$ 被 (x^2-1) 除時，余項爲 $[(2a+3c)x+(3c-8b)]$。求 a,b 及 c。 (8 分)

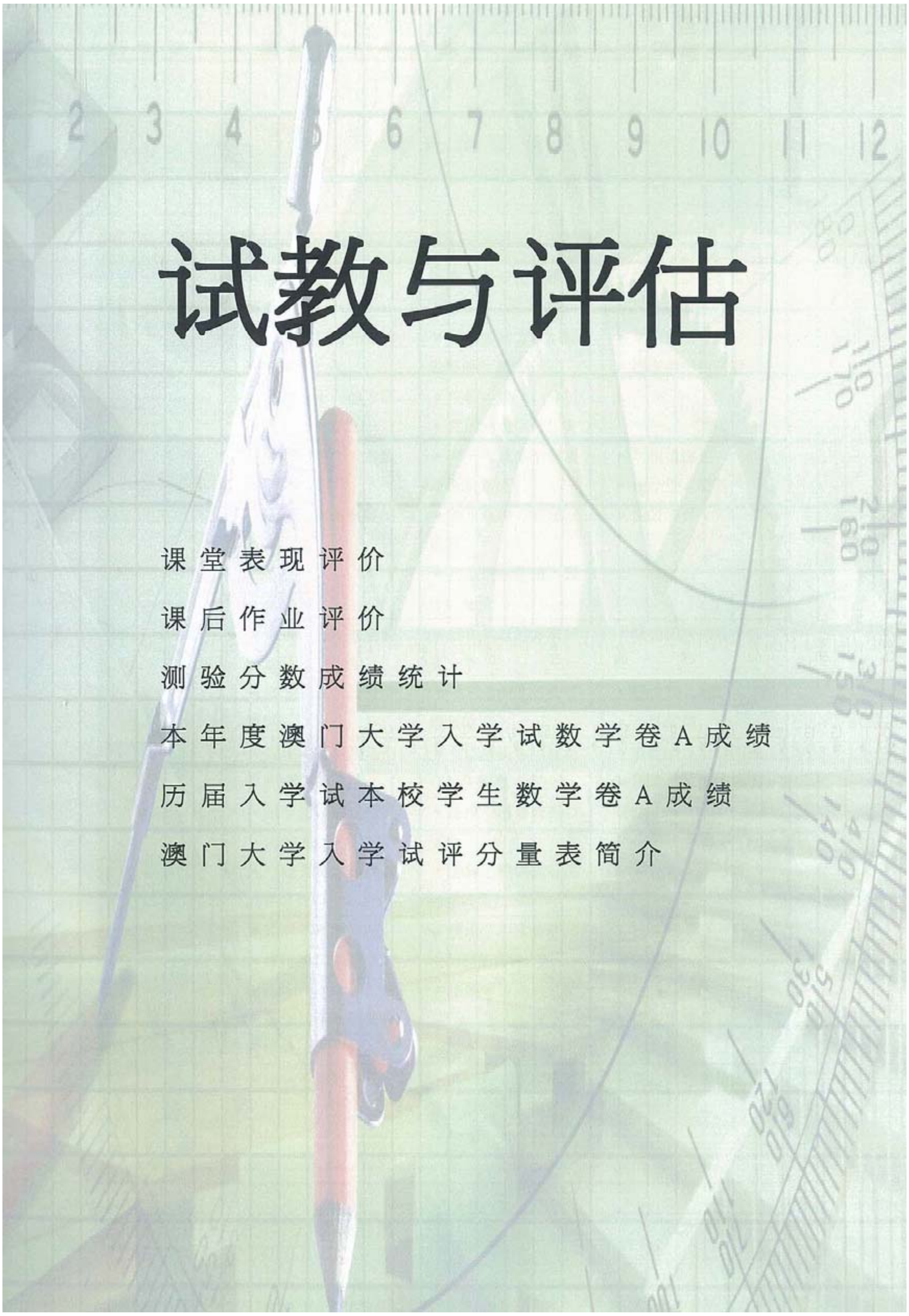
6.(a)設 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ 及 $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 爲兩非零複數，其中 $r_1>0$ 及 $r_2>0$。

證明：$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$。 (4 分)

(b)設 z_1 及 z_2 爲兩非零複數，並且 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$。 (8 分)

1.證明：$\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=-\frac{z_1}{z_2}$。

2.設 O 爲複平面上的原點，P_1 和 P_2 分別爲複平面上代表 z_1 和 z_2 的兩點，求 $\angle P_1OP_2$。


试教与评估
课堂表现评价
课后作业评价
测验分数成绩统计
本年度澳门大学入学试数学卷A成绩
历届入学试本校学生数学卷A成绩
澳门大学入学试评分量表简介

課堂表現評價

分 值	理 解	思 維	交 流
6 **(異常好，超水準的表現)**	• 發現問題中所有重要方面 • 數學知識有充分的準備 • 有與眾不同的方法，思維富有創造性	• 有多個解決問題的方法 • 使用多種方式如圖、表等展示思維 • 實驗、設計、分析 • 完成問題以外任務	• 答案很清楚，有說服力，有思想性 • 做給別人看的 • 圖表畫得很清楚
5 **(非常好，思路清晰)**	• 發現問題中大多數重要的方面 • 數學知識有很好的理解	• 有一個或多個解決問題的方法 • 使用幾種方式展示思維 • 可能進行實驗、設計、分析	• 寫得很清楚 • 做給別人看的 • 圖表清楚
4 **(好，完成任務)**	• 忽視一些不太重要的方面 • 數學知識大部份都理解	• 解決問題的方法只有一個 • 展示思維的方式可能漏掉了	• 做出問題的幾個部份 • 做給別人看的 • 不夠清楚
3 **(還行，努力嘗試，對問題理解得不是很清楚)**	• 發現問題少數幾個重要的方面 • 數學知識部份理解 • 思維混亂 • 可能有概念和觀點上有遺失	• 可能解決也可能沒有解決問題 • 思維不清楚或有局限性 • 選擇了錯誤的解決問題的方法	• 表達觀點上有困難 • 不清楚應該爲別人而做
2 **(未完成任務，表現出對問題的困惑)**	• 幾乎不理解問題 • 對問題的重要方面發現極少 • 數學知識支離破碎的理解	• 使用了不適合的解決問題的方法 • 不能解釋思維過程	• 很混亂 • 不清楚應該爲別人而做 • 圖表不清楚
1 **(可能做過也可能沒有，表現出對問題不理解)**	• 不理解問題	• 幾乎沒有或根本沒有試圖對結果解釋 • 答案很難理解	• 表達的方式讓人很難理解

上表中對每個向度的每一個水準的行爲都進行了刻劃，這些描述的語言爲編者提供了一個評價的參考，當然，在實際應用中應靈活掌握，可以把評價的焦點集中在某一兩個方面，而不是必須對所有的向度都一一加以評價。

以下是編者在本學年內對學生(高三理班共 13 人)在課堂表現的評價：

學生	課堂表現評價(共20次)																			
徐X儀	1	5	4	3	2	3	2	3	5	4	4	2	4	4	4	4	3	1	6	4
謝X煒	1	3	2	4	6	2	5	4	6	4	3	2	6	5	5	5	3	3	5	4
蔡X法	4	3	2	1	6	3	2	3	6	4	2	5	6	5	4	6	4	3	5	5
林X浩	2	6	4	1	5	2	4	3	6	5	5	2	6	6	6	5	3	3	6	5
何X俊	3	3	2	2	6	2	4	3	4	4	3	2	6	4	5	5	3	4	6	5
梁X榮	3	3	3	3	5	3	6	3	6	5	3	4	6	4	5	5	3	3	6	5
黎X健	1	6	3	4	6	2	2	2	5	3	2	1	4	4	5	3	2	3	5	4
林 X	1	5	3	2	6	3	2	4	6	4	3	1	2	5	6	3	4	3	6	5
曾X晴	2	2	3	2	4	2	4	3	6	4	2	4	4	4	5	4	3	4	5	2
劉X榮	4	5	6	4	6	2	6	4	6	5	3	2	4	6	6	5	4	4	6	6
吳X廸	1	2	2	3	4	2	5	4	6	3	4	4	5	5	4	4	4	3	6	5
胡X威	1	2	4	4	6	3	5	3	6	6	5	2	6	5	6	4	3	3	5	5
梁X傑	1	2	3	1	6	3	2	4	5	4	6	2	2	5	5	4	3	3	6	5

注：表格中的數位表示分數(值)。

課後作業評價

向度	分值	內容
理解問題	0	對問題完全理解錯了。
	3	對問題部份理解錯了或解釋錯了。
	6	對問題的理解完全正確。
解題方法	0	沒有制訂或解題方法不恰當。
	3	基於對問題某部份的正確解釋，制定出的方法部份正確。
	6	只要正確地執行該方法，就能導致問題的解決。
獲得答案	0	沒有答案，或是在一個錯誤的解題方法下得出的錯誤答案。
	1	抄寫錯誤，計算錯誤，缺最後答案或在答案不惟一的情況下只回答出部份答案。
	2	答案不正確，不過這一錯誤的答案源於一開始就錯誤，但按照這個錯誤，執行過程中學生的思維是有邏輯性的。
	3	正確地給出所有的答案或列表。

使用時，可以對不同的水準賦予不同的分值。這樣得分爲 3，3，6 和得分爲 6，6，0 的學生在行爲表現上是很不同的，一個學生的表現是答案正確，但

對問題只是部份正確的理解，解題方法也是部份正確，另一個學生則表現出對問題完全地理解，並制訂正確的解題方法，雖然他沒有最終給出答案，但是他們的總分都是 12 分。這目的在於編者在評分時，有意識地加強了對解題過程的重視，淡化對答案的片面追求。總分爲 12 分的兩個學生，在整體印象上，各有可取之處。

上面的評價方法，不同于傳統做法中的計算分步的項目的正確數，不是做對到哪一步就達到哪個分值點，編者會針對學生在解題過程中的行爲表現，判斷什麼樣的行爲是優異的，而什麼樣的行爲是勉強合格的，還要允許學生使用自己預期以外的方法或解法，但也不要被那些確實有點創造性、敍述得天花亂墮卻與數學觀念毫不相關的表現所迷惑。

以下是編者在本學年內對學生(高三理班共 13 人)在課後作業的評價：

學生	課後作業評價(共15次)														
徐X儀	8	14	12	11	0	14	12	11	10	11	13	12	12	10	12
謝X煒	14	15	13	11	11	13	12	10	13	12	14	12	11	10	14
蔡X法	13	15	14	12	11	13	13	11	10	11	14	12	10	13	15
林X浩	8	14	13	11	11	14	13	10	12	11	14	13	13	10	15
何X俊	9	11	13	11	12	14	13	10	12	11	14	12	11	10	15
梁X榮	10	15	13	11	11	14	13	11	14	11	14	13	11	12	15
黎X健	10	11	11	10	11	13	12	10	10	10	13	11	10	8	12
林 X	8	11	11	12	11	14	13	11	10	12	14	12	11	8	10
曾X晴	8	14	12	11	12	13	10	10	12	11	14	12	10	12	12
劉X榮	8	15	13	12	12	14	14	10	14	12	14	13	11	10	12
吳X廸	5	14	12	12	11	14	13	10	13	12	14	11	12	12	13
胡X威	6	11	12	11	11	13	13	11	13	11	14	14	13	10	15
梁X傑	6	8	12	11	11	14	13	11	10	12	13	12	14	10	10

注：表格中的數位表示分數(值)。

測驗分數成績統計

學生	測驗成績(共6次)					
徐X儀	50	72	50	73	49	65
謝X煒	63	74	71	87	70	83
蔡X法	50	79	68	76	74	81
林X浩	63	57	71	80	68	72
何X俊	56	54	74	76	71	90
梁X榮	73	52	61	53	74	69
黎X健	56	57	62	66	60	72
林 X	53	60	64	72	69	71
曾X晴	39	45	67	56	41	61
劉X榮	77	79	98	95	76	96
吳X廸	60	82	77	75	50	71
胡X威	49	31	76	58	72	74
梁X傑	60	49	60	45	66	65
測驗分數成績統計						
最高分	77	82	98	95	76	96
最低分	39	31	50	45	41	61
平均分	57.6	60.8	69.2	70.2	64.6	74.6
中位數	56	57	68	73	69	72
標準差	10.2	15.4	11.4	14.1	11.2	10.2

本年度澳門大學入學試數學卷A成績

2009 / 2010 年度
該年高三理班人數 13 人，報考 11 人，各人數學卷 A 成績如下： 黎 X 健（567）、劉 X 榮（649）、徐 X 儀（562）、何 X 俊（572）、林 X 浩（577）、胡 X 威（548）、梁 X 榮（601）、謝 X 煒（629）、蔡 X 法（553）、吳 X 廸（553）、 梁 X 傑（581）、高三文班林 X 榕（567）

注：本校平均成績 579.9，在全澳 37 所學校(部)排名第 3。

曆屆入學試本校學生數學卷A成績

2003 / 2004 年度
該年高三理班人數 21 人，報考 8 人，各人數學卷 A 成績如下： 羅 X 誠（622）、許 X 謙（697）、鄺 X 俊（681）、呂 X 華（633）、林 X 宏（703）、梁 X 斌（703）、彭 X 傑（628）、容 X 鴻（655）

注：本校平均成績 665.2，在全澳 32 所學校(部)排名第 1。

2004 / 2005 年度
該年高三理班人數 27 人，報考 9 人，各人數學卷 A 成績如下： 張 X 鴻（617）、黎 X 浩（718）、周 X 鴻（739）、劉 X 朗（691）、李 X 豪（733）、林 X 鵬（638）、區 X 文（686）、卓 X（591）、黃 X 威（602）

注：本校平均成績 668.3，在全澳 27 所學校(部)排名第 1。

2005 / 2006 年度
該年高三理班人數 19 人，報考 7 人，各人數學卷 A 成績如下： 李 X 傑（696）、鄭 X 卓（659）、吳 X 仁（670）、傅 X 倫（549）、侯 X（612）、林 X 商（675）、梁 X 宗（649）

注：本校平均成績 644.3，在全澳 33 所學校(部)排名第 2。

2006 / 2007 年度
該年高三理班人數 15 人，報考 4 人，各人數學卷 A 成績如下： 吳 X 濠（705）、林 X 輝（636）、黃 X 禮（751）、劉 X 輝（419）

注：本校平均成績 627.8，在全澳 42 所學校(部)排名第 1。

2007 / 2008 年度
該年高三理班人數 16 人，報考 5 人，各人數學卷 A 成績如下： 廖 X 興（693）、朱 X 榮（652）、謝 X 怡（729）、蔡 X 豪（662）、陳 X 龍（698）

注：本校平均成績 686.8，在全澳 42 所學校(部)排名第 1。

2008 / 2009 年度
該年高三理班人數 20 人，報考 12 人，各人數學卷 A 成績如下： 江 X 文（695）、徐 X 恒（587）、李 X 文（676）、沈 X（572）、陳 X 成（661）、黃 X 添（602）、盧 X 業（695）、盧 X 然（685）、王 X 豪（582）、黃 X 華（572）、李 X 基（715）、陳 X 輝（577）

注：本校平均成績 634.9，在全澳 39 所學校(部)排名第 2。

以上資料資料由澳門大學學務部提供，見【附錄】。

澳門大學入學試評分量表簡介

例如，某生入學試的原始分數，中文爲 69 分，數學爲 86 分，英文爲 90 分，根據這三門學科的原始分數，我們不能說，該生英文最好，數學次之，中

文最差。此時我們還不能瞭解該生三門學科哪一門考得好，哪一門考得差，因爲，可能由於中文的試題過難，全體考生的平均分數爲 60 分，那麼該生中文的 69 分，並不見得差，而英文可能試題太容易，全體考生的平均分數爲 92 分，那麼該生的 90 分，並不見得好。

其實，上面這種比較是不妥當的，因爲原始分數的單位不等距，同一個考生的不同學科的原始分數不可以相比，更不可以相加求和。

爲了使原始分數本身具有意義，使不同學科的分數可以相互比較，就必須將原始分數轉換成導出分數。所謂導出分數就是經過統計整理過的、具有一定參照點和單位的、可以相互比較的分數。

澳門大學招生入學試使用的是線性 CEEB 分數。

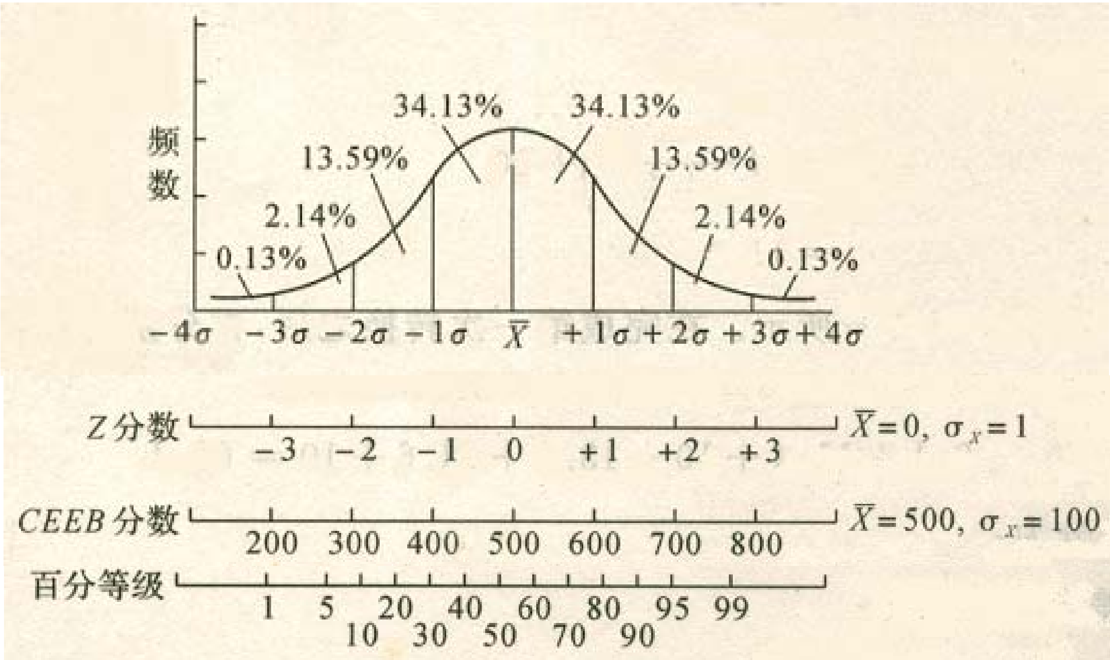
<table>
<tr><th colspan="2">線性 CEEB 分數</th></tr>
<tr><td>意 義</td><td>平均數爲 500、標準差爲 100 的線性標準分數。它的獲得就是在線性 Z 分數上乘以 100，再加上 500。</td></tr>
<tr><td>公 式</td><td>$$\begin{aligned} CEEB &= 100Z + 500 \\ &= 100\left(\frac{X-\overline{X}}{\sigma_X}\right) + 500 \end{aligned}$$其中：$CEEB$ 爲線性 $CEEB$ 分數、X 爲原始分數、$\overline{X}$ 爲所有分數的平均、σ_X 爲所有分數的標準差。</td></tr>
<tr><td colspan="2">例如：某生的原始分數爲 32，全體考生分數的平均爲 27，標準差爲 11.9。
那麼，該生 $CEEB$ 分數 $= 100\left(\frac{32-27}{11.9}\right) + 500 = 542$。</td></tr>
</table>

甲乙兩生某年入學試的原始分數和 CEEB 分數轉換表：(供參考)

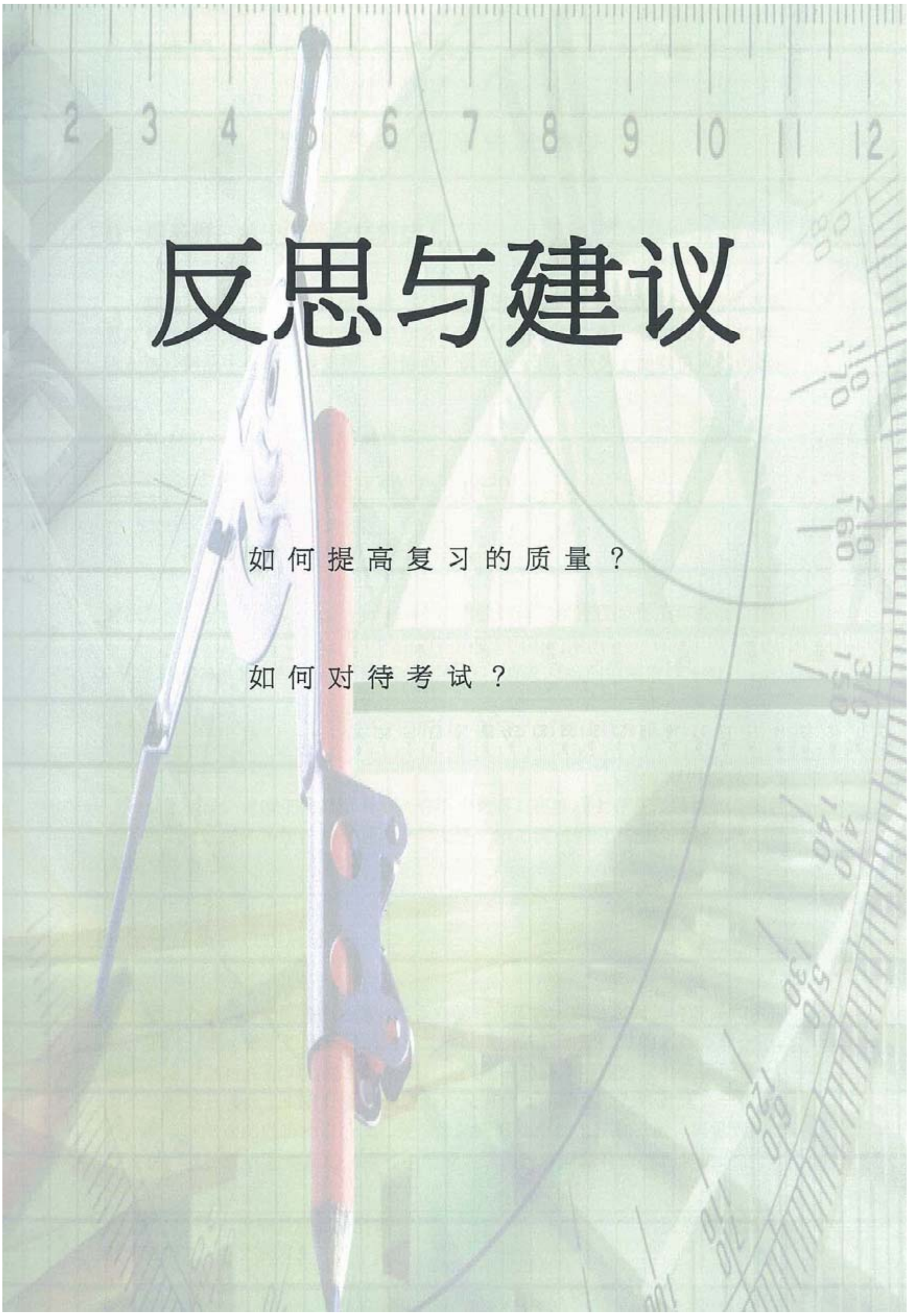
考試科目	標準化樣本		原始分數		CEEB 分數	
	平均分 $\overline{X}$	標準差 σ_X	甲生	乙生	甲生	乙生
中文	51	5	62	50	720	480

數學 英文	76 65	11 9	80 82	90 87	536 689	627 744
總分			224	227	1945	1851

假如，用原始分數比較甲乙兩個考生三門學科的總分時，可能會認爲乙生優於甲生(227＞224)，若比較三門學科 CEEB 分數的總分，卻是甲生優於乙生(1945＞1851)。現將 Z 分數、CEEB 分數等導出分數與正態分佈的對應關係用下圖表示。



雖然 CEEB 分數是一種線性的轉換，它並未改變原始分數的分佈形態，多用於升學考試之中，如美國的大學及研究生入學考試就採用這種分數。這類考試的被試人數是大量的，其原始分數一般接近正態分佈。因此，它一方面爲一個被試幾種不同測驗分數的相互比較以及相加求和提供了條件，另一方面也爲不同被試之間多科總分的比較提供了條件。



如 何 提 高 複 習 的 質 量 ？

1)一題多解，從中選擇最優解法

每做一道題，都要認真想一想，這道題目用了哪些概念和原理？解題的基本思路是什麼？這道題考查的意圖是什麼？除了這種解法以外，還有沒有別的解法？這些解法中哪一種最簡捷、最恰當？例如，下面這道關於函數值域的例題：

求函數 $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$ 的值域。

解法一： $f(x)=\frac{x^2+1}{x}=\frac{(x^2-2x+1)+2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}+2\geq 2$ ，$\therefore f(x)\geq 2$ 。

所以，函數 $f(x)$ 的值域為 $[2,+\infty)$ 。

解法二：設 $y=x+\frac{1}{x}$ ，則 $x^2-yx+1=0$ ，由題知該二次方程必有正實數根。

$\therefore \Delta=y^2-4\geq 0$ ，解得 $y\geq 2$ 。所以，函數 $f(x)$ 的值域為 $[2,+\infty)$ 。

解法三： $f(x)=(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2+2\geq 2$ 。所以，函數 $f(x)$ 的值域為 $[2,+\infty)$ 。

以上例子，使我們清楚地看到：有不少題目，在客觀上存在多種解法，要善於鑽研，通過對各種解法的比較，使學生進一步加深對解題方法的理解，從而提高復習的品質。

2)比較歸類，以少勝多

題目之多，有「題海」之稱，怎麼辦呢？應該看到題目之間是有聯繫和區別的。圍繞一章節做了相當數量的題目之後，應當認真地把做過的題目整理一下。想一想這道題目在知識上屬於哪一類？在解題的思路和解題方法上又屬於哪一類？這些題目彼此之間有什麼相似之處？又有什麼不同之處？經過這麼一番比較，就可以把這些題目加以分類，使學生的眼界從個別上升到一般，再見到同類題目時，就比較容易將其納入頭腦中的分類系統，使問題有效得到解決。

例如，一節不等式解法的復習課，應把等價變換放在突出位置，也就是

說，要求每一次變形所得到的不等式和變形前的不等式是等價的。編者強調等價變換是從過程看，這樣做既好操作，也符合邏輯，還容易看清楚，可以引導學生從邏輯上把解不等式理論認識清楚，其中一元一次不等式、一元二次不等式的解法是最基本的，它是解各類不等式的基礎。而解其他類型的不等式，關鍵在於利用不等式的性質或相關函數的單調性，將其等價變換成一元一次或一元二次不等式(組)再求解。

3)通過反復的、有效的刺激來強化

實驗表明，學習以後，所有人都會出現先快後慢的遺忘過程。遺忘是一種正常的心理現象。可見，問題不在於會不會忘記，而在於怎樣和遺忘現像做鬥爭，使我們所學的知識能夠牢固地保存在大腦中，以便在應用時能隨時取用。

編者建議在系統復習時，要回憶每一個概念是怎麼引出來的，概念是怎樣表述的，概念的內涵和外延是什麼；在復習一些定理公式時，要回憶這些定理是怎麼推導出來的，這些定理適用於什麼範圍，公式反映了哪些數量關係等等。不少學生自認爲復習得挺好，可是一做題，就知道自己的浮淺了，所以在進行系統復習時，適當做點題目，可以加強運用知識解決綜合問題的能力。每做好一道題之後，要注意回味一下，整理出解題的思路、邏輯關係和劃分好題目的類型等，以便舉一反三，提高解題效率。

近年的澳門大學招生入學試數學科試題，題量都比較大，如果知識的掌握不熟練，在考場上就往往不完成答題。因此，激勵學生對自己要提出更高的要求，知識不僅要弄懂，還要會運用；不僅要會運用，還要能熟練、高效率地解決問題。

如 何 對 待 考 試 ？

1)抓住考試的命題特點，提高應考能力

不少考生，見到考題以後才發現自己復習的方向不對頭，才發現有些題型從來沒有見過。造成這種被動局面的原因，就是平時對試題本身缺乏研究，對考試的命題特點缺乏瞭解。

有的學生之所以在考場上發揮不出應有的水準，其原因就在於對考試的命題特點缺乏研究。因此，在總復習時，要緊緊地圍繞「考試大綱」的範圍和要求，把重點放在抓「基礎」上。在這裏特別要對「考試大綱」做到心裏有數，即從考試的內容來決定復習的範圍，見**【考試大綱】**，從命題的各部份內容的比例來決定復習時的力量分配，見**【命題趨勢】**，從命題的題型來決定復習時思考的角度，見**【試題特點】**，從對各部份知識要求掌握的程度來決定復習的深度，見**【教學內容】**，從命題的數量來決定復習的熟練程度，見下表。

考試年度	2005/2006	2006/2007	2007/2008	2008/2009	2009/2010	總計
必答題						
代數	8	13	0	14	21	56
代數不等式	7	4	14	9	3	37
概率	7	8	8	8	8	39
數列與級數	8	11	8	8	0	35
選答題						
平面及立體幾何	16	16	16	20	18	86
線性方程組	16	16	16	16	0	64
解析幾何	16	16	16	16	16	80
基本微積分/曲線的描繪	10	16	16	6	14	62

注：表格中的數位表示出題分數。

按照近五年的考題統計，從上表可見，分數分配不平均，在必答題(全卷占52 分)部份，代數、代數不等式、概率、數列與級數占分比率很高；在選答題(全卷占 48 分)部份，平面及立體幾何、線性方程組、解析幾何、基本微積分、曲線的描繪幾乎是每年必考的內容，若這些章節的分數可掌握 80%，至少就能達到高標準了。

知道了試題的這些特點，在考前復習時，認真地進行全面系統的復習。復習對了路，考場上自然就會發揮得好。

2)注重答卷的策略方法，提高得分效率

每次考試下來，總有一些考生後悔在考場上沒有先做容易的題，結果是難題沒做出來，容易的題也來不及做了。

在考場上也經常見到考生漏看題看錯題的現象，對於重大考試來說，這種差錯可能會造成終身的遺憾。遺憾之處是題目不是不會做，而是自己的粗心大意或其他原因造成的。

有的學生忘記了考場上複卷的時間是有限的，固執地先檢查分數多的題目，結果剛好碰上難題，由於題目複雜，不是檢查不完，就是查出了問題也沒有時間改正，結果白白浪費了時間。

編者建議應考時可按照題號的順序審題，會一道就先做一道，一時不會的題目，先跳過去，繼續往下答，直到把會做的題目做完；然後，按照這個方法，把第一遍沒做出來的題目再過一遍，冷靜思考，小心作答，把其中會做的全做完。如果還有時間，則集中精力去突破最後的難題；如果沒有時間，起碼已經把會做的題目全做完做對了。

試卷答完以後，如果還有時間，就要抓緊時間複卷。檢查時，要先檢查容易的、省時間的、錯誤率高的、自己沒有把握的題目，後檢查難的、費時間的、錯誤率低的、把握大的題目。對於那些查出了問題也沒有時間改正的題目，就不要檢查了，這倒是一種比較現實的態度。

3)做好怯場的心態調整，提高心理素質

下面是 2008 年一考生在參加澳門大學招生入學試後對編者說的一段話：

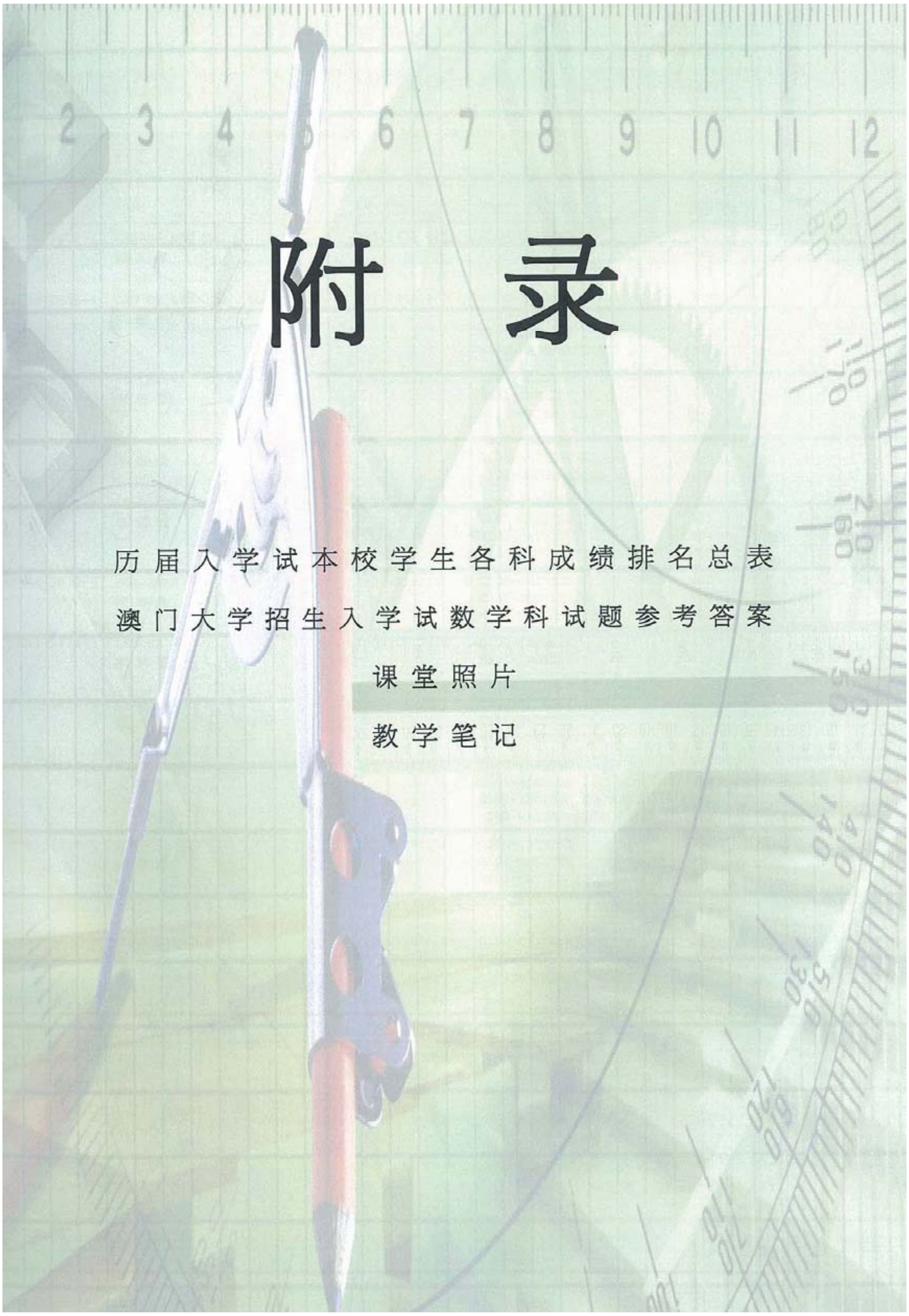
在考數學卷時我先看一遍考題，按習慣先做容易的題。可是，當我剛做兩道題，正開始順利的做第三道題的時候，我突然停下來，著急的先算一算自己會做的題一共能得多少分。當我發現只能得 58 分時，我就緊張起來，一下子臉上像發高燒一樣。這是我很著急，於是命令自己趕快做題，我想，這回算完了！

就以上情況看，編者認爲應該可採取一些積極的措施，調整心態，預防怯場：

首先，要正確認識考試的意義，尤其是在考場上不要去想考試成敗會造成什麼結果，把主要精力放在答題的積極行爲上。其次，遇到意外情況要積極補救。遇到難題不要急燥，而要冷靜、沉著地對待。當面對難題做不出來，心裏可想：「我做不出來，別人大概也做不出來。」「這道題做不出來，努力把別的題做出來。」這樣一想，就會冷靜得多，題目反倒做出來了。

常模為個別被試的考試分數提供了比較的基礎。如果一個考生某科考試成績在常模之上，很少有人認為該生考得差；如果一個考生某科考試成績在常模之下，很少有人認為該生考得好。

最後，如果有怯場感，可以立刻去做比較容易的題目，這樣做還調整不了情緒時，可以伏在桌面一會兒，讓心情慢慢平靜下來。考完試以後也不要對答案，以免影響下一科的考試情緒。



2001/2002 學年 入學試試題 參考答案

必答題

1. $a=11$，$b=-6$。

2.(a) $\sqrt[16]{2^{15}}$ (b)略。

3.(a)略 (b) $x<-3$ 或 $x>3$。

4.(a)當 α 爲第二象限時，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$；當 α 爲第四象限時，

$\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$。

(b) $\frac{2x}{1+x^2}$。

5.(1) $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ (2) $\angle AOB=46.26^0$。

6.(1)77 (2) $\frac{2}{165}$。

7. $2^{\frac{n^2-n+2}{2}}\cdot(2^n-1)$。

選答題

8.(a) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$ (b)略。

9.(1)略 (2)略 (3) $3x+2y=180^0$。

10.(1)略 (2)略 (3)略 (4)以圓心在原點，半徑爲 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圓。

11.(1) $a=-6$ (2) $2x-y-4=0$ (3) $\frac{52}{3}$。

12.(a)0 (b)1) $x=t(t\in R)$，$y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$，$z=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}t$ 2) $m=-5$，$n=-1$。

2002/2003 學年 入學試試題 參考答案

必答題

1.$\{ x$ ： $\sqrt{5} < x \le 3$ 且 $x \in R \}$。

2.$-5 < x < 1$ 。

3.(1) $\dfrac{2t}{1+t^2}$ (2) $x = k\pi$ 或 $k\pi - \dfrac{\pi}{4}$ ，$k \in Z$ 。

4.略。

5.$2\cos\dfrac{\alpha}{2}(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2})$ 。

6.(1) $\dfrac{25}{42}$ (2) $\dfrac{59}{90}$ 。

7.(1)公差 d＝3 (2)n＝26。

選答題

8.(1) $\alpha + \beta = -2p$ ；$\alpha\beta = -q^3$ (2)略 (3) $\sqrt[3]{-3+\sqrt{10}} + \sqrt[3]{-3-\sqrt{10}} - 1$ 。

9.(1)略 (2)略 (3)略 (4) $\dfrac{5\sqrt{2}}{9}$ 。

10.(a)1) $|OA| + |OB| = -2m - \dfrac{3}{m} + 5$ 且 $m < 0$ 2)最小值爲 $2\sqrt{6} + 5$ 。

(b) $\dfrac{17}{3}$ 。

11.(1) $5y^2 - 20y + (k+12) = 0$ (2) $k < 8$ (3)略 (4) $x_1x_2 = \dfrac{4k-27}{5}$ (5) $k = 3$ 。

12.(a)略 (b)1) $k \ne 1$ 及 $k \ne -1$ 2) $x = t$ ，$y = \dfrac{3}{2}$ ，$z = -\dfrac{1}{2} - t$ ，$(t \in R)$。

2003/2004 學年 入學試試題 參考答案

必答題
1.(a)4 (b)2。 2.(a) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2-4)$ (b)略。 3. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。 4.(a) $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, 且 $x\neq\pm\sqrt{2}$ (b) $\frac{x^2}{x^2-2}$ 。 5.(a)略 (b)最大值 -1。 6.略。 7. $\frac{2}{9}$ 。

選答題
8.(a) $-\frac{515}{16}$ (b)1)略 2)略。 9.(a)略。 (b)1) ∠EAC＝$60^0-\alpha$ 2)略 3)略 4)FY＝$\frac{2\sqrt{3}}{7}$ 。 10.(a)略 (b)略 (c)略 (d)雙曲線的一個分支。 11.(a) $a=1$ ，$b=2$ 。 (b) $(1-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9})$ 爲極大點，$(1+\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9})$ 爲極小點；拐點爲 $(1,0)$ 。 (c) $\frac{1}{2}$ 。 12.(a)略 (b)略 (c) $-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ 。

2004/2005 學年 入學試試題 參考答案

必答題

1.(a) $1-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ (b) $x=-1$。

2.(a) $a=1$ (b)略。

3.(a)略 (b) $\tan\theta=-\frac{4}{3}$。

4.公比爲 4。

5.(a)略 (b)略。

6.(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (3) 120^0。

7.(a)1) $\frac{5}{16}$ 2) $\frac{21}{32}$ (b)n＝6。

選答題

8.(a)1)略 2)略 3)略。

(b)1)略 2)CE＝ $\frac{\sqrt{3}}{3}$。

9.(a)略 (b)略 (c)略 (d) $h-\sqrt{2}k+2\pm2\sqrt{3}=0$。

10.(a)1) $f'(x)=3x^2-18x+24$； $f''(x)=6x-18$。

2)極大點爲(2，20)，極小點爲(4，16)；拐點爲(3，18)。

3)略。

4) $a<16$ 或 $a>20$。

(b) $\frac{2}{3}$。

11.(a)略 (b)1)略 2)略 (c) $-\frac{1}{4}$。

12.(a) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$。

(b) $x=-2t$， $y=3t$， $z=t(t\in R)$。

(c) $x=-2$， $y=3$， $z=1$ 或 $x=2$， $y=-3$， $z=-1$。

2005/2006 學年 入學試試題 參考答案

必答題

1.(1)略 (2) $\frac{25}{4}$。

2. $\theta=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 。 3.(1) $\frac{20}{21}$ (2)31。 4.略。 5.(1)n＝13 (2) $a_1=7$ ， $d=4$ 。 6.(1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ (2)略。 7. $0<a<\frac{1}{100}$ 。
選答題
8.(a)1) $\theta=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}(k\in Z)$ 2) $8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ 3) $\cos\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ 。 (b)1)略 2)略。 9.(1)略 (2) 45^0 (3) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。 10.(a) $\frac{27}{4}$ (b)略。 11.(a)1) $m=-\frac{1}{3}$ 。 2) $x_1+x_2=\frac{6d}{13}$ ， $y_1+y_2=\frac{24d}{13}$ ； $-\frac{\sqrt{39}}{3}<d<\frac{\sqrt{39}}{3}$ 。 3) $-\frac{\sqrt{39}}{13}<c<\frac{\sqrt{39}}{13}$ 。 (b)略。 12.(a) $2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ 。 (b)1) $x=3+t$ ， $y=1+t$ ， $z=t(t\in R)$ 。 2)略。

2006/2007 學年 入學試試題 參考答案

必答題
1. $a=-3$ ， $b=5$ 。

2.(1)定義域爲 $(-2,2)$ ； $f(x)$ 是奇函數。 (2) $0<x\le\dfrac{2}{3}$ 或 $1\le x<2$ 。

3.(1)略 (2) $\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ 。

4.(1) $\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ (2) $a=-\dfrac{1}{2}$ ， $b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 。

5.甲在三局兩勝制和五局三勝制下勝率分別爲 0.648 和 0.68256，後者對甲有利。

6.(1) $S_{odd}=100$ (2)略。

7. $k=4$ 。

選 答 題

8.(a) $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ ， $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 。

(b)1) $\sin\gamma>\sin(\beta+\gamma)$ 2) $\cos\gamma=-\dfrac{16}{65}$ 。

9.(1) $MG=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (2) $MH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $MN=\dfrac{\sqrt{6}}{6}, NH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $NG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (5) 60^0

10.(a)1)略。

2)極大値爲 $\dfrac{1}{2}$ ，極小値爲 $-\dfrac{1}{2}$ ；拐點爲 $(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4})$ 及 $(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4})$ 。

(b)當 $a=\dfrac{1}{2}$ 時， $\int_0^1|x-a|dx$ 有最小值 $\dfrac{1}{4}$ 。

11.(1)略。

(2) $x_1+x_2=\dfrac{4m^2}{m^2-3}$ ， $x_1x_2=\dfrac{4m^2+3}{m^2-3}$ 。

(3) $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$ 。

(4) $m=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 。

12.(a) $(p-q)(q-r)(r-p)$ 。

(b)1)略 2) $(x,y,z)=(t,1-t,0)$ 或 $(u,-u,1)$, 其中 $t,u\in R$ 。

2007/2008 學年 入學試試題 參考答案

必 答 題

1. $2\le x\le 3$ 。

2.(a)定義域爲 $x \in R$；值域爲$\{ y ： y \in R$ 且 $-1 < y < 1 \}$。

(b)反函數 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$。

3.(a)略 (b) $x = \frac{k\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{16} (k \in Z)$ 。

4.(a)1) $(x-\sqrt{k})^2(x+2\sqrt{k})$ 2)略 (b)略。

5.(1) $\sqrt{2}[\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{7\pi}{12})]$ (2)輻角 $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$ 。

6.(a)袋 X、Y 及 Z 內找到紅球的概率分別是 $\frac{151}{180}$，$\frac{2}{15}$，$\frac{1}{36}$ 。

(b) $\frac{1}{4}$ 。

7.(a) $a_1 = 10$，$d = 5$ (b) $n = 27$ 。

選答題

8.(a)略 (b)略 (c)略。

9.(a)略 (b)略 (c) $x_1 + x_2 = \frac{2b}{a+b}$，$x_1 x_2 = \frac{b-1}{a+b}$ (d)略 (e) $a = \frac{6}{11}$，$b = \frac{3}{11}$ 。

10.(a)1) $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 15x^2$；$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 30x$ 。

2)極大值 $6\sqrt{3}$，極小值 $-6\sqrt{3}$；拐點爲 $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{21\sqrt{3}}{8})$，$(0,0)$ 和 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{21\sqrt{3}}{8})$ 。

(b)54。

11.(a)1)略 2) $PQ = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$ 。

(b) $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$ 。

12.(a) $(p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r)$ 。

(b)1) $a = 3$ 2) $x = y = z = t$，$(t \in R)$。

2008/2009 學年 入學試試題 參考答案

必答題

1.a＝－4，b＝6。

2.(a) $A=2$ ，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 。

(b)1)定義域為{ x ： $x\in R$ 且 $k\pi-\dfrac{\pi}{12}<x<k\pi+\dfrac{5\pi}{12}(k\in Z)$ }；值域為{ y ： $y\in R$ 且 $y\le\ln 2$ }。

2) $x=\dfrac{k\pi}{2}+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12},k\in Z$ 。

3.(a) $\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1+2u}$ (b) $0<x<\dfrac{1}{4}$ 或 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{2}$ 或 $x>1$ 。

4.(a)略 (b)最小的 $n=6$ 。

5.(a) $\dfrac{28}{45}$ ，$\dfrac{16}{45}$ ，$\dfrac{1}{45}$ (b) $\dfrac{481}{390625}$ 。

6.(a)略 (b) $b_n=\dfrac{1}{3^{n+1}}$ (c)2。

7. $p=\dfrac{10\pm\sqrt{190}}{15}$ 。

選 答 題

8.(a)略 (b)略 (c)1)交點 Q 的軌跡 $y=-2$ 2) $c<0$ 或 $c>1$ 。

9.(a)∠ADC＝90^0，AB＝$\dfrac{1}{2}$ (b)略 (c) $BF=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sin\alpha}$ (d)略 (e) $AF=\dfrac{1}{2}$ 。

10.(a)1)略。

2)當 $r=\sqrt[6]{18}$ 時， A^2 有最小值 $3\cdot 18^{\frac{2}{3}}\pi^2$ ；此時 A 有最小值 $\pi\sqrt{3}\cdot 18^{\frac{1}{3}}$ 。

(b) $\dfrac{7}{6}$ 。

11.(a) $3-4i$ 或 $-3+4i$ (b)1)略 2)略 3) $\dfrac{5}{4}$ 。

12.(a) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ 。

(b)1) $x=t(t\in R)$ ， $y=3t-1$ ， $z=5t-1$ 。

2)(x ， y ， z)＝($-\dfrac{13}{23}$ ， $-\dfrac{62}{23}$ ， $-\dfrac{88}{23}$)或(1，2，4)

2009/2010 學年 入學試試題 參考答案

必答題

1.x＝100。

2.(a)略 (b) $2k^2+7k+2$ (c) $\frac{-7-\sqrt{33}}{4}<k<\frac{-7+\sqrt{33}}{4}$ 。

3.(a) $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 或 $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (b)略。

4.(a)略 (b)略。

5.(a) $p=-7$ (b) $z=t$ ， $x=\frac{1}{2}t$ ， $y=\frac{3}{2}t$ ，($t\in R$)。

6. $n=7$ 或 $n=14$ 。

7.(a) $\frac{37}{42}$ (b) $\frac{52}{105}$ 。

選答題

8.(a)略 (b)略 (c)略。

9.(a)1)略 2)略 3)略 (b)二面角 A－DC－B 爲 $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

10.(a)1)略。

2) $\frac{dV}{dx}=px(2-3x)$ ； $\frac{d^2V}{dx^2}=2p(1-3x)$ 。

3) $(\frac{2}{3},\frac{4p}{27})$ 爲極大點， $(0,0)$ 爲極小點；拐點爲 $(\frac{1}{3},\frac{2\pi}{27})$ 。

(b) $\frac{p(1-a)^4}{12}$ 。

11.(a)略。

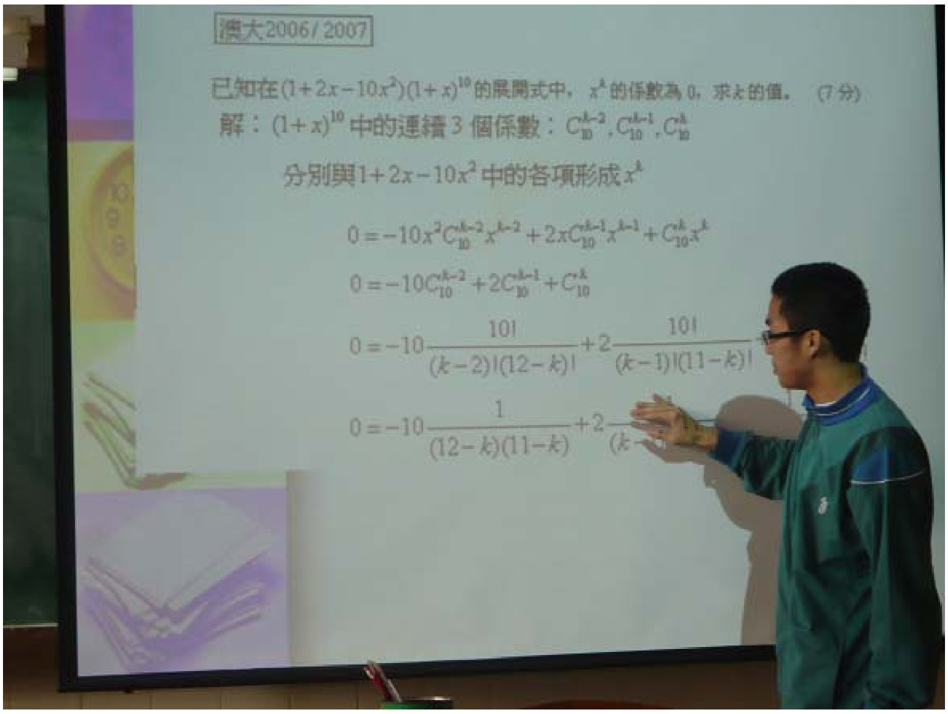
(b)1)略 2) $z=i\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n},k=0,1,2,\cdots,(n-1)$ 但 $k\neq\frac{n-1}{2}$ 。

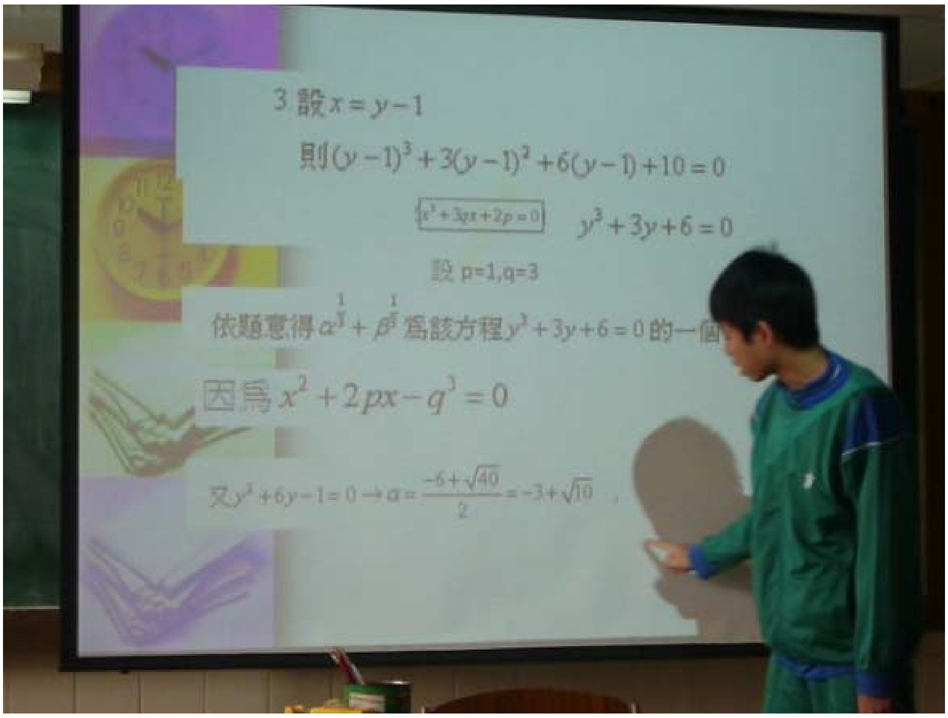
(c) $z=i\tan\frac{k\pi}{24},k=1,5,7,11,13,17,19,23$ 。

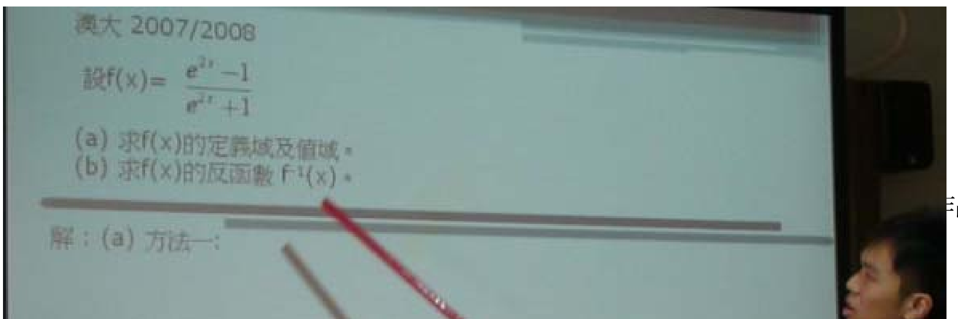
12.(a)略。

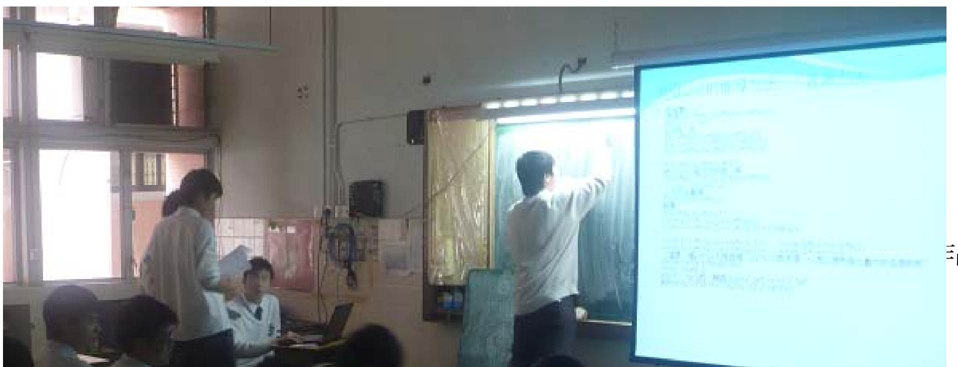
(b)1) $a_n=3\ \ 2^{n-1}$ 2) $3^{3(2^n-1)}\cdot 2^{3[(n-2)2^n+2]}$ 。

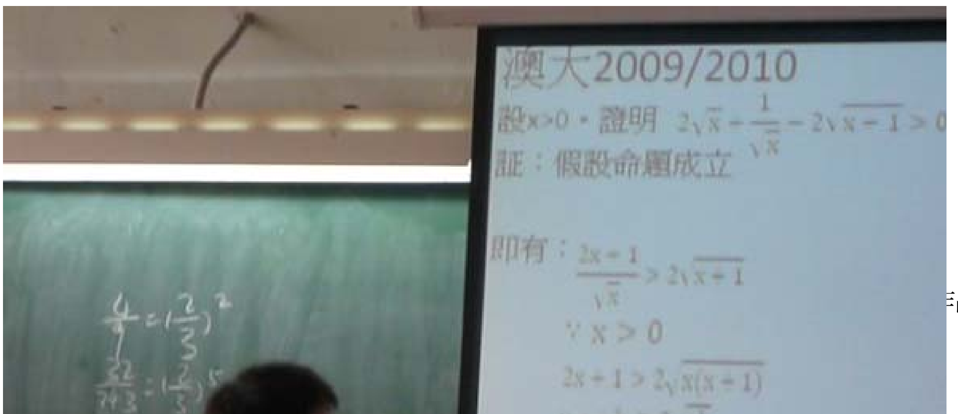
課堂照片


澳大2006/2007
已知在$(1+2x-10x^2)(1+x)^{10}$的展開式中，x^k的係數為0，求k的值。 (7分)
解：$(1+x)^{10}$中的連續3個係數：$C_{10}^{k-2},C_{10}^{k-1},C_{10}^{k}$
分別與$1+2x-10x^2$中的各項形成x^k
$0=-10x^2C_{10}^{k-2}x^{k-2}+2xC_{10}^{k-1}x^{k-1}+C_{10}^{k}x^k$
$0=-10C_{10}^{k-2}+2C_{10}^{k-1}+C_{10}^{k}$
$0=-10\frac{10!}{(k-2)!(12-k)!}+2\frac{10!}{(k-1)!(11-k)!}$
$0=-10\frac{1}{(12-k)(11-k)}+2$


3.設$x=y-1$
則$(y-1)^3+3(y-1)^2+6(y-1)+10=0$
$\boxed{x^3+3qx+2p=0}$ $y^3+3y+6=0$
設 p=1,q=3
依題意得$\alpha^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{1}{3}}$為該方程$y^3+3y+6=0$的一個
因為$x^2+2px-q^3=0$
又$y^2+6y-1=0\rightarrow\alpha=\frac{-6+\sqrt{40}}{2}=-3+\sqrt{10}$


澳大 2007/2008
設f(x)= $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
(a) 求f(x)的定義域及值域。
(b) 求f(x)的反函數 $f^{-1}(x)$。
解：(a) 方法一:




澳大2009/2010
証：假設命題成立
即有：
$\forall x > 0$

參考文獻

1.澳門大學註冊處。2001 年至 2009 年的《入學考試範圍》。

2.澳門聖若瑟教區中學第五校。《2001~2009 年度澳門大學招生入學試數學科試題(卷 A)學生手冊》

3.澳門數學教育研究學會。《澳門數學教育》(第七期)。

4.高級中學課本《數學Ⅰ》。人民教育出版社。

5.香港教育圖書公司。《會考數學新探索》。

6.高考總復習四輪復習法詳解手冊《數學》。延邊大學出版社。

7.王孝玲著。《教育測量》。華東師範大學出版社。

8.蘇一芳、黃鳴嬋著。《文達附加數學》。文達出版社。

9.陳明哲著(1956)。《標準高等代數學》。臺北市：中央出版社。

10.馬雲鵬、張春莉等著。《數學教育評價》。高等教育出版社。