2002 年教學設計獎勵計劃

概率

參選編號：**C014**

學科名稱：代數

適合程度：高二

目錄

簡介

一、 內容說明

本課件的主要內容是闡釋概率的基本概念，使學生理解它和日常生活的關係。計畫六課時完成，主要分成以下六章。

1.隨機事件與概率
2.等可能性事件的概率
3.互斥事件有一個發生的概率
4.相互獨立事件同時發生的概率
5.獨立重複試驗
6.應用舉例

本課件以 Powerpoint 寫成，教師可自行添加例題或說明以改善本課件的不足，對於較爲複雜的計算，老師應利用板書向學生解釋說明。

二、 教學活動

第一堂課採用以下的”五環節”教學：創設問題情境、探索研究、師生互動、反饋矯正和小結。其餘課節採用：引入課題、進行新課、堂上練習和小結。實質上是講練結合，使學生先有清楚的概念，然後利用堂上練習使他們主動積極地鞏固即堂所學的知識，熟練運算後，再靈活應用到日常生活中。

三、 試教評估

由於概率統計思想已滲入到日常生活中，特別是有關博奕中輸贏機會的大小，學生多對它感興趣。第一課堂的數學活動：拋擲硬幣使老師有”亂”的感覺；到利用電腦模擬遊戲時有些學生表現出興奮，不過概率較難的部分通常需要他們已學過的知識------排列和組合；開始時很多同學不能用計算的方法解題，通過本單元的學習後已加強了他們的數學基礎，使他們能溫故知新。

四、 省思與建議

學生對遊戲多感興趣，現有的高中數學課程雖多不容易設計成遊戲形式，但利用互聯網上的資源，可提供部分動畫，漫畫或數學實驗等均能引起學生對數學的學習興趣，通過老師對學生的鼓勵，進行師生共同開發多媒體教學課件，雙方定能獲益良多。

五、 參考資料

1. <<全日制中學數學教學大綱(高中部分)(修訂本)，中華人民共和國國家教育委員會人民教育出版社，1998 年版
2. 高級中學試驗課本：數學 V，人民教育出版社，1993 年版

3. 代數第五冊，文風圖書公司印行
4. 新一代數學 6，朗文香港教育出版社，2001 年
5. 數學通報 2001 年第七期
6. http://www.google.com
7. http://www.pep.com.cn
8. http://www.k12.com.cn

概率教案

一、　教學目的

1. 使學生初步了解隨機事件的發生存在著規律性，從而了解隨機事件的概率的意義，並對學生進行偶然性和必然性對立統一觀點的教育。
2. 使學生了解等可能性事件的概率的意義，能夠運用排列組合公式計算一些等可能性事件的概率。
3. 使學生了解互斥事件和相互獨立事件的意義，能夠運用互斥事件的概率加法公式與相互獨立事件的概率乘法公式計算事件的概率。
4. 使學生學會計算事件在 n 次獨立重複試驗中恰好發生 k 次的概率。

二、　教學重點與難點

1.重點:　是研究概率及其計算。具體地說，主要是計算等可能性事件的概率，並通過互斥以及獨立事件有關的概率公式推算事件的概率。

2.難點:　(1)是掌握互斥事件、對立事件、獨立事件的區別與聯系；(2)是如何根據題意，弄清各相關事件之間的關係，恰當選擇概率計算公式；(3)是善於將比較複雜的問題進行分解，並靈活的選擇正向思考或逆向思考的方法解決問題。

三、　教學過程

1.　<u>隨機事件與概率</u> (第一課節 45 分鐘)

(1.1)創設問題情境 (5 分鐘)

師：在日常生活中，有些事情發生的機會有大也有小，我們有時非常關心某些事情發生機會的可能性。

例一、我今年能不能考上澳門大學呢？

例二、今屆世界杯 32 支球隊中，那一隊會勝出？

例三、六合彩中頭獎的機會有多大？

例四、假設 9 支球隊參加亞洲地區 2004 年奧運會足球預選賽，把 9 支球隊任意地分爲 3 組，試求中、韓兩隊恰好分在同一組的概率。

(學生興趣盎然，互相討論)

師：對於例一，我們很難計算出它發生的機會，因爲需要更多的資料，例如準備功夫，心理狀態等等…

對於例二，我們亦很難知道結果，因爲我們還要看球員的狀態等…

但在例三和例四，所有可能結果都可以用計算方法預先計出來，這是本單元的教學內容。

(1.2) 探索研究 (5 分鐘)

師：現在再看以下的例子。

例五、陽從東方升起。

例六、向上拋擲一個一元硬幣，落下。

例七、一個大氣壓下，攝氏 30 度的水結冰。

例八、在常溫下，銅熔化。

師:在上面的各個例子中,那些是必然發生的呢? 又那些是必然不發生的呢?

生：例五和例六是必然發生的，而例七和例八是必然不發生的。

師：像例五、例六、例七和例八這類事件是在一定條件下必然發生或必然不發生(即它有一個確切的結果)我們稱之爲什麼呢?

生：在一定條件下必然發生的事件叫**必然事件**。在一定條件下必然不發生的事件叫**不可能事件**。

師：現在再看以下的例子

例九、相同的條件下，拋擲一個質地均勻的硬幣、它的結果可能是正面向上，也可能是反面向上。

例十、次品率爲 0.1%的產品，任取一個可能是正品，也可能是次品。

師：例九和例十可以看作在相同條件下一系列的試驗或觀察，而每次試驗或觀察的可能結果不止一個，在每次試驗或觀察之前無法預知確切結果，(即這些現象的結果事先不能完全確定)，這一類型的事件我們稱之爲什麼呢?

生：**不確定性事件**或**偶然事件**，也稱爲**隨機事件**。

師：隨機事件在一次試驗中是否發生雖然不能事先確定，但是在大量重複試驗的情況下，它的發生呈現出一定的規律性。現在就讓我們來玩一個數學遊戲來看看吧！

(學生再次興奮起來)

(1.3) 師生互動　(20 分鐘)----數學遊戲

師：每一位學生拋擲一個硬幣 5 次，並將結果記錄在下面的表上。

學生(按學號)	1	2	3	…	40
正面向上的頻數					

再把上表的資料總結成下列的累積頻數表，

拋擲次數值(n)	5	10	15	20	…	200
正面向上的累積頻數(m)						
正面向上的相對頻數($\frac{m}{n}$)						

看結果是否接近 0.5?

10 分鐘後，老師請同學收集好各記錄表並計算結果，寫在累積頻數表上。

拋擲次數值(n)	5	10	15	20	…	200
正面向上的累積頻數(m)	2	6	7	11		108

正面向上的相對頻數($\frac{m}{n}$)	0.4	0.6	0.47	0.55		0.54

師：由上表看來，拋擲一個硬幣，正面向上的相對頻數接近 0.5。

師：爲了節省時間，我們改用電腦模擬另一個遊戲。桌上放著 6 張撲克牌，全部正面朝下，其中有兩張且只有兩張是 A，其他 4 張是 K、J、9、2。但大家都不知道 A 的位置，現請一名學生隨便取兩張並把它們翻開，另一名學生觀察並記錄下面那一種情況發生的可能性更大。

(a)兩張牌中至少有一張是 A。

(b)兩張牌中沒有一張是 A。

共翻開牌次數 n				
兩張牌中至少有一張是 A 的次數 m_1				
頻數 $\frac{m_1}{n}$				
兩張牌中沒有一張是 A 的次數 m_2				
頻數 $\frac{m_2}{n}$				

結果如下:

共翻開牌次數 n	100	1000	7000	10000
兩張牌中至少有一張是 A 的次數 m_1	64	598	4181	5995
頻數 $\frac{m_1}{n}$	0.64	0.598	0.5973	0.5995
兩張牌中沒有一張是 A 的次數 m_2	36	402	2819	4005
頻數 $\frac{m_2}{n}$	0.36	0.402	0.4027	0.4005

師：我們看到，當試驗的次數愈多時，兩張牌中至少有一張是 A 的頻數接近於常數 0.6，在它附近擺動。兩張牌中沒有一張是 A 的頻數接近於常數 0.4，在它附近擺動。

一般地，**在大量重複進行同一試驗時，事件 A 發生的頻率 $\frac{m}{n}$ 總是接近於某個常數，在它附近擺動**，這時就把這個常數叫做**事件 A 的概率**，記作 **P(A)**
[P 是英文 Probability(概率)的第一個字母，概率亦稱機率，或然率]

師:從上面的例子中,抽出兩張牌中至少有一張是 A 的概率是 0.6 是什麼意思呢?

生：就是說，從 6 張撲克牌，其中有兩張且只有兩張是 A，抽出兩張牌中至少有一張是 A 的可能性是 60%；

師：那麼抽出兩張牌中沒有一張是 A 的概率是 0.4 又是什麼意思呢?

生：就是說，從 6 張撲克牌，其中有兩張且只有兩張是 A，抽出兩張牌中沒有一

張是 A 的可能性是 40%。

師：由於任何事件 A 發生的次數 m 不會是負數，也不可能大於試驗次數 n，事件 A 的概率滿足 $0 \le P(A) \le 1$

很明顯，必然事件的概率是 1，不可能事件的概率是 0。

(1.4) 堂上練習---反饋矯正 (10 分鐘)

1. 指出下列事件是必然事件，不可能事件，還是隨機事件。
   (a) 一個袋子裡有 5 個紅球，3 個白球，現從中取出一個球，得到紅球;
   (b) 如果 a，b 都是實數，那麼 2a+3b=3b+2a;
   (c) 從某校高中二班女生任意抽取一名學生測體重，該生體重超過 400 千克。
2. 某種慈善抽獎劵的中獎概率是 0.01，買 100 張這種獎劵，一定會中獎嗎?
3. “明天會下雨的概率是 0.6” 這句說話如何理解?
4. “心臟移植手術成功率是 0.99” 是什麼意思?

參考答案: 1. (a)是隨機事件，(b)是必然事件，(c)是不可能事件
2. 不一定中，因為概率只表示事件發生機會的大小；中獎概率是 0.01 表示中獎的機會很小，所以 100 張這樣的獎劵並不一定保證能中獎。
3. 應理解為: 在 100 次類似於明天的天氣條件下，例如: 氣溫，溫度，氣壓等，根據以往的記錄，大約有 60 次左右會下雨。
4. 在 100 次相同的手術條件下，這種手術有 99 次成功。

(1.5) 小結 (5 分鐘)

i. 在這課裡，我們初步介紹了事件的概率的概念。
ii. 隨機事件在現實生活中是廣泛存在的。在一次試驗中，事件是否發生雖然帶有偶然性，但在大量重複試驗下，它的發生呈現出一定規律性，即事件發生的頻率總是接近於某個常數，在它附近擺動，這個常數就叫做這一事件的概率。

2. <u>等可能性事件的概率</u> (第二課節 45 分鐘)

(2.1) 引入課題 (5 分鐘)

師：在上一節課，我們已經學過，隨機事件的概率，一般可以通過大量重複試驗求得它們的近似值。但對於某些隨機事件，也可以不通過重複試驗，而只通過對一次試驗中可能出現的結果的分析來計算它們的概率。例如，擲一個均勻的硬幣時，我們知道正面向上和反面向上的機會均等；同樣，擲一粒均勻的骰子時，擲得 1、2、3、4、5、6 點的機會也相等。我們稱這些有相同機會出現的結果為**等可能結果**。由於擲一個硬幣有 2 個等可能結果，所以硬幣

正面向上的概率等於$\frac{1}{2}$；同理，擲一粒骰子有 6 個等可能結果，所以擲得一點(或二點或…六點)的概率是$\frac{1}{6}$。這和大量重複試驗的結果也是一致的。

一般地，如果一次試驗中共有 n 種等可能出現的結果，其中事件 A 包含的結果有 m 種，那麼事件 A 的概率 P(A)是$\frac{m}{n}$

即 $P(A)=\dfrac{\text{事件A中含基本事件總數(m)}}{\text{試驗中基本事件的總數(n)}}=\dfrac{\text{符合事件A的結果的數目(m)}}{\text{所有等可能結果的總數(n)}}$，

而試驗中基本事件的總數亦稱爲樣本空間。

(2.2) 進行新課 (25 分鐘)

師：現在先看以下的例子。

例 1. 從一副撲克牌抽取一張，問(a)抽得黑色牌之機會如何?(b)抽得王牌(king)之機會如何?(c)不抽得葵扇 A 之機會如何?

師：一副撲克牌有多少張?

生：52 張

師：那麼這題的基本事件總數(或空間樣本)是多少?

生：52

師：一副撲克牌有多少張黑色牌?

生：有 26 張

師：記”從一副撲克牌抽取一張，抽得黑色牌”爲事件 A，那麼事件 A 包含的結果有 26 種，因此事件 A 的概率是多少呢?

生：事件 A 的概率 $P(A)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$

師：好!那麼一副撲克牌有多少張王牌(king)呢?

生：有 4 張

師：記”從一副撲克牌抽取一張，抽得王牌(king)”爲事件 B，那麼事件 B 包含的結果有 4 種，因此事件 B 的概率是多少呢?

生：事件 B 的概率 $P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

師：好!那麼一副撲克牌有多少張牌不是葵扇 A 呢?

生：有 52-1=51 張

師：記”從一副撲克牌抽取一張，不抽得葵扇 A”爲事件 C，那麼事件 C 包含的結果有 51 種，因此事件 C 的概率是多少呢?

生甲：事件 C 的概率 $P(C)=\frac{51}{52}$

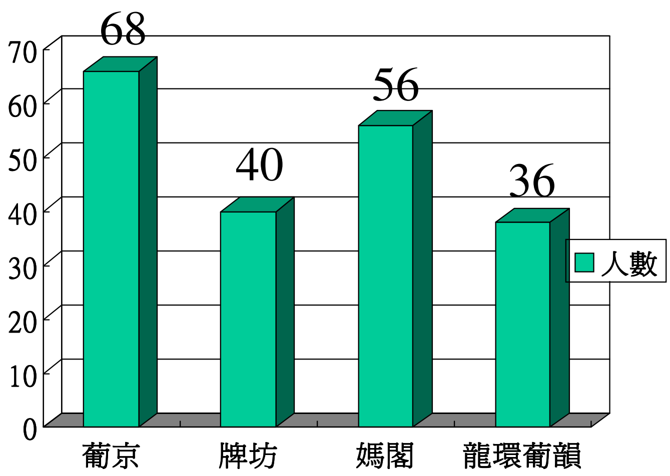
師：還有別的解法嗎?

生乙：記”從一副撲克牌抽取一張，抽得葵扇 A”爲事件 D，那麼事件 D 包含的結

果有 1 種，因此事件 D 的概率是 $\frac{1}{52}$，即抽取葵扇 A 之概率是 $\frac{1}{52}$，所以不抽得葵扇 A 之概率 Q=1- $\frac{1}{52}=\frac{51}{52}$

師：很好! 現在再看以下的例子。

例 2. 圖中棒形圖所示爲某高二班學生在 5 月 1 日至 7 日向來澳遊客調查他們最喜歡的 4 個旅遊景點的統計。現在從該批遊客中任意再抽取 1 名致送紀念品，求下列事件的概率。(a)該名遊客喜歡葡京；(b) 該名遊客喜歡媽閣。



師：從棒形圖，我們得知喜歡葡京的人數是多少呢?

生：是 68 人

師：喜歡這 4 個景點的總人數是多少呢?

生：總人數是 68+40+56+36=200 人

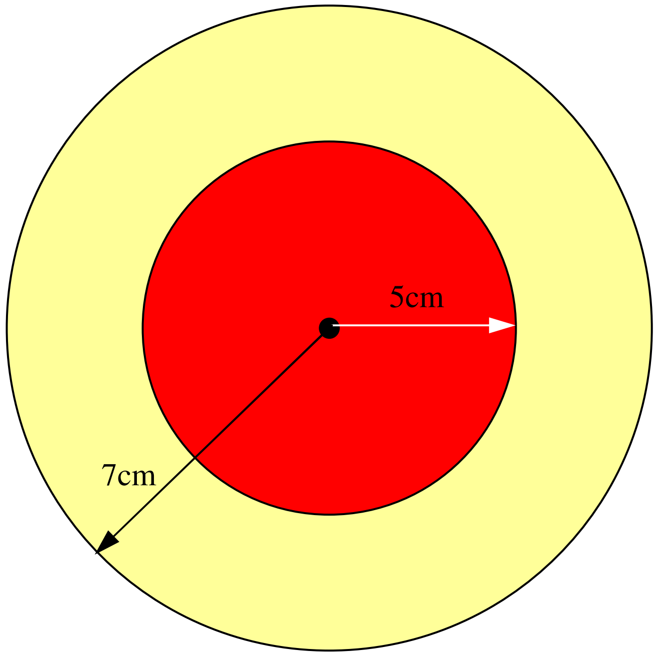
師：設”喜歡葡京”的事件是 A，則 P(A)是多少?

生：P(A)= $\frac{68}{200}=0.34$

師：設”喜歡媽閣”的事件是 B，則 P(B)是多少?

生：從棒形圖，我們得知喜歡媽閣的人數是 56，所以 P(B)= $\frac{56}{200}=0.28$

例 3. 圖中所示為一個由兩個同心圓所組成的『箭靶』，若某人每支箭都射在靶上，求(a)射中紅色部分；(b)射中黃色部分的概率。



師：這題的基本事件總數(或空間樣本)是多少?

生：這題的基本事件總數(或空間樣本)是『箭靶』面積=$\pi \times 7^2 = 49\pi\,(\text{cm}^2)$

師：紅色部分面積是多少?

生：紅色部分面積是$\pi \times 5^2 = 25\pi\ (\text{cm}^2)$

師：射中紅色部分的概率是多少?

生：射中紅色部分的概率是$\dfrac{25\pi}{49\pi} = \dfrac{25}{49}$

師：黃色部分面積是多少?

生：黃色部分面積是$49\pi - 25\pi = 24\pi\,(\text{cm}^2)$

師：射中黃色部分的概率是多少?

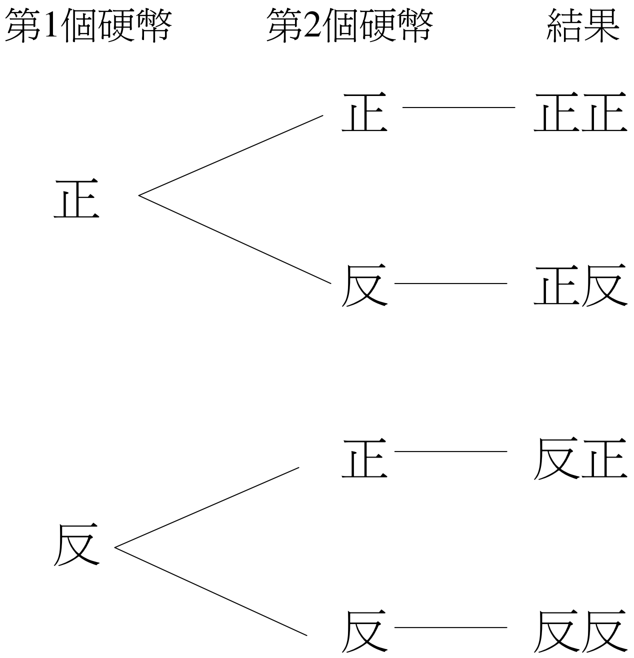
生：射中黃色部分的概率是$\dfrac{24\pi}{49\pi} = \dfrac{24}{49}$

例 4. 先後拋擲兩個均勻的硬幣，計算: (1)兩個都出現正面的概率；(2)一個出現正面、一個出現反面的概率。

師：有同學嘗試解這題的第一個問嗎?

生甲：先後拋擲兩個硬幣，共出現"兩個都是正面"，"兩個都是反面"，"一個正面、一個反面"等 3 種結果，那麼這題的基本事件總數(或空間樣本)是 3，因此，"兩個都出現正面"這一事件的概率是$\dfrac{1}{3}$。

生乙：由下面的樹形圖中得知：先後拋擲兩個硬幣
可能出現的結果



或由乘法原理，先後拋擲兩個硬幣可能出現的結果共有 2×2=4 種，即[正正、正反、反正、反反]，那麼這題的基本事件總數(或空間樣本)應該是 4 而不是 3，且這 4 種結果出現的可能性都相等。記"拋擲兩個硬幣，都出現正面"爲事件 A，則在上面 4 種結果中，事件 A 包含的結果有 1 種，因此事件 A 的概率 $P(A)=\frac{1}{4}$，即兩個都是正面的概率是 $\frac{1}{4}$。

師: 甲同學不對，因爲他所說的三個結果不是等可能的。乙同學答得對，且分析得很好。請全班爲他鼓掌!

師：那麼第二個問呢?

生丙：記"拋擲兩個硬幣，一個出現正面、一個出現反面"爲事件 B，則事件 B 包含的結果有 2 種，因此事件 B 的概率 $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，即一個出現正面，一個出現反面的概率是 $\frac{1}{2}$。

師：好!現在再看以下的例子。

例 5. 在 100 件產品中，有 95 件合格品，5 件次品。從中任取 2 件，計算：

(1) 2 件都是合格品的概率；

(2) 2 件都是次品的概率:

(3) 1 件是合格品，1 件是次品的概率。

師：那麼這題的基本事件總數(或空間樣本)是多少?

生：從 100 件產品中任取 2 件，可能出現的結果共有 C_{100}^2 種，且這些結果出現的可能都相等，所以這題的基本事件總數(或空間樣本)是 C_{100}^2 。

師：在 C_{100}^2 種結果中，取到 2 件合格品的結果有多少種呢?

生：在 C_{100}^2 種結果中，取到 2 件合格品的結果有 C_{95}^2 種。

師：記"任取 2 件，都是合格品"爲事件 A，則事件 A 的概率是多少?

生：事件 A 的概率 P(A)= $\frac{C_{95}^2}{C_{100}^2}=\frac{893}{990}$ ，即 2 件都是合格品的概率爲 $\frac{893}{990}$ 。

師：那麼 2 件都是次品的概率呢?

生：記"任取 2 件，都是次品"爲事件 B。由於在 C_{100}^2 種結果中，取到 2 件次品的結果有 C_5^2 種，所以事件 B 的概率 P(B)= $\frac{C_5^2}{C_{100}^2}=\frac{1}{495}$ ，即 2 件都是次品的概率是 $\frac{1}{495}$ 。

師：那麼 1 件是合格品，1 件是次品的概率呢?

生：記"任取 2 件，1 件是合格品、1 件是次品"爲事件 C。由於在 C_{100}^2 種結果中，取到 1 件合格品、1 件次品的結果有 $C_{95}^1\cdot C_5^1$ 種，所以事件 C 的概率 P(C)= $\frac{C_{95}^1\cdot C_5^1}{C_{100}^2}=\frac{19}{198}$ ，即 1 件是合格品、1 件是次品的概率爲 $\frac{19}{198}$ 。

(2.3)堂上練習----反饋矯正 (10 分鐘)

1.小明朋友所住大廈大門密碼是一個 4 位數，但小明只記得密碼的頭兩個數字。

(a) 假如小明任意按剩下的密碼，求他一次嘗試便能進入大廈的概率。

(b) 小明忽然記起第 4 個密碼能被 5 整除，求他憑一次嘗試便能進入大廈的概率。

2. 有 6 個房間可安排 4 位旅客入住，每人可以進住任一房間，且進住各房間是等可能的，求下列各事件的概率：

(a)事件 A：指定的 4 間房中各有一人；

(b)事件 B：恰有 4 間房中各有一人

參考答案:

1. 每一個密碼數位都由 0 至 9 共 10 個數字組成，根據乘法原理，剩下密碼的可能結果 n=10×10=100(個)

(a) 因為正確密碼只有一個，即 m=1，所以小明能進入大廈的概率是 $\frac{1}{100}$

由於第 4 個密碼能被 5 整除，所以它必定是 0 或 5 。

剩下碼密的可能結果 n=10×2 =20(個)，所以小明能進入大廈的概率= $\frac{1}{20}$

由於每人可以進住任一房間，進住房間有 6 種等可能的方法，根據乘法原理，4 個人進住 6 個房間的方法 n= 6^4

(a)指定的 4 個房間中各有一人，所以 m= $p_4^4=24$ (種)

$$P(A)=\frac{24}{6^4}=\frac{1}{54}$$

從 6 間房中選出 4 間有 $C_6^4=15$ 種方法，4 個人每人入住一間房有 $P_4^4=24$ 種方法。所以 P(B)= $\frac{15\times 24}{6^4}=\frac{5}{18}$

(2.4) 小結 (5 分鐘)

對於某些事件，可以直接通過分析來算它們的概率，如果一次試驗中共有 n 種等可能出現的結果，其中事件 A 包含的結果有 m 種，那麼事件 A 的概率 P(A)是 $\frac{m}{n}$

即 $P(A)=\frac{\text{事件A中含基本事件總數(m)}}{\text{試驗中基本事件的總數(n)}}=\frac{\text{符合事件A的結果的數目(m)}}{\text{所有等可能結果的總數(n)}}$ ，

而試驗中基本事件的總數亦稱為樣本空間。

(2.5) 佈置作業---- (略)

3. 互斥事件有一個發生的概率 (第三課節 45 分鐘)

(3.1) 引入課題 (10 分鐘)

師: 在 10 個乒乓球中，有 7 個一等品，2 個二等品，1 個三等品。我們把從中任取一個，取出一等品叫做事件 A，取出二等品叫做事件 B，取出三等品叫做事件 C。我們看到，如果取出乒乓球是一等品，即事件 A 發生，則事件 B 就不發生；如果取出的是二等品，即事件 B 發生，則事件 A 就不發生。也就是說，事件 A，B 不可能同時發生。這種不可能同時發生的兩個事件叫做**互斥事件**。同理，事件 B，C 是互斥事件，事件 A，C 是互斥事件。換句話說，事件 A，B，C 中，任何兩個都是互斥事件。這時我們說事件 A，B，C 彼此互斥。一般地，如果事件 $A_{,}A_2,\cdots,A_n$ 中任何兩個都是互斥事件，那麼就說事件 $A_{,}A_2,\cdots,A_n$ **彼此互斥**。

在上面的問題裡，因為是任取一個，共有 10 種等可能的取法，其中得到一

等品，二等品，三等品的取法分別有 7 種，2 種，1 種，因此，$P(A)=\frac{7}{10}$，

$P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，$P(C)=\frac{1}{10}$

師：現在問：”任取一個乒乓球，取出一等品或二等品” 這一事件的概率多少? 這一事件，我們記作 ”A+B”，因爲不論取出一等品還是二等品，都表示這個事件發生，而得到一等品或二等品的取法共有 7+2 種，所以取出一等品或二等品的概率 $P(A+B)=\frac{7+2}{10}$。由 $\frac{7+2}{10}=\frac{7}{10}+\frac{2}{10}$，我們看到

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

由上例可知：

如果事件 A，B 互斥，那　事件 “A+B” 發生(即 A，B 中有一個發生)的概率，等於事件 A，B 分別發生的概率的和。

一般地，如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 彼此互斥，那麼事件” $A_1+A_2+\ldots+A_n$”發生(即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中有一個發生)的概率，等於這 n 個事件分別發生的概率的和，即 $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

(3.2) 進行新課 (25 分鐘)

師：現在先看以下的例子。

例 1 某地區的年降兩量如下表:

降雨量(毫米)	概率
100~150	0.12
150~200	0.25
200~250	0.16
250~300	0.14

計算年降雨量在 100~200 毫米範圍內的概率與在 150~300 毫米範圍內的概率。

師: 記這個地區的年降雨量在 100~150 毫米，150~200 毫米，200~250 毫米，250~300 毫米範圍內分別爲事件 A，B，C，D。那麼這四個事件有什麼關係?

生：它們是彼此互斥的。

師：根據什麼公式去計算呢?

生：根據公式　$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

師：好!請繼續。

生：年降雨量在 100~200 毫米範圍內的概率是

$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.12+0.25=0.37$；

年降雨量在 150~300 毫米範圍內的概率是

$P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)=0.25+0.16+0.14=0.55$

即年降雨量在 100~200 毫米範圍內的概率是 0.37；在 150~300 毫米範圍內的概率是 0.55

師：很好!現在再看下面的例子。

例 2. 在 20 件產品中，有 15 件一級品，5 件二級品。從中任取 3 件，其中至少有 1 件爲二級品的概率是多少？

師：記”從 20 件產品中任取 3 件，其中恰有 1 件二級品”爲事件 A_1，”有 2 件二級品”爲事件 A_2，”3 件全是二級品”爲事件 A_3。那麼事件 A_1，A_2，A_3 的概率分別是多少呢?

生：$P(A_1)=\dfrac{C_5^1\cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}=\dfrac{105}{228}$ ；$P(A_2)=\dfrac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\dfrac{30}{228}$ ；$P(A_3)=\dfrac{C_5^3}{C_{20}^3}=\dfrac{2}{228}$ 。

師：那麼這三個事件有什麼關係?

生：它們是彼此互斥的。

師：好!請繼續。

生：根據題意，事件 A_1，A_2，A_3 彼此互斥。由公式

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

3 件產品中至少有 1 件爲二級品的概率是

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{105}{228}+\frac{30}{228}+\frac{2}{228}=\frac{137}{228}$$

即其中至少有一件爲二級品的概率是 $\dfrac{137}{228}$ 。

師：在例 2 中，從 20 件產品中任取 3 件，或者都是一級品，或者不都是一級品(即其中至少有一件是二級品)，這兩個互斥事件必有一個發生，這種其中必有一個發生的兩個互斥事件叫做**對立事件**。

一個事件 A 的對立事件通常記作 $\bar{A}$ ，根據對立事件的意義，$A+\bar{A}$ 是一個必然事件，它的概率等於 1，又由於 A 與 $\bar{A}$ 互斥，我們得到

$$P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})=1$$

這就是說，兩個對立事件的概率的和等於 1

此外，由上式還可得到 $P(\bar{A})=1-P(A)$

師：請說出例 2 的另一種解法。

生：記”從 20 件產品中任取 3 件，3 件全是一級品”爲事件 A，則

$P(A)=\dfrac{C_{15}^3}{C_{20}^3}=\dfrac{91}{228}$，由於 “任取 3 件，至少有 1 件爲二級品”是事件 A 的對立事件 $\bar{A}$ ，根據公式 $P(\bar{A})=1-P(A)$

$P(\bar{A})=1-P(A)=1-P(A)=1-\frac{91}{228}=\frac{137}{228}$

即其中至少有一件爲二級品的概率是$\frac{137}{228}$ 。

例 3. 從裝有 10 個大小相同的小球(4 個紅球，3 個白球，3 個藍球)的袋中任取 2 個，求取出 2 個同色球的概率。

師：取出 2 個同色球爲事件 A，取出 2 個紅色球爲事件 B，取出 2 個白色球爲事件 C，取出 2 個藍色球爲事件 D，則 A=B+C+D，爲什麼呢?

生：因爲 B，C，D 彼此互斥。

師：那麼 P(B)、P(C)、P(D)各是多少?

生：$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$ ，$P(C)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$ ，$P(D)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$ 。

師：P(A)呢?

生：$P(A)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$

(3.3) 堂上練習----反饋矯正 (5 分鐘)

1. 甲、乙兩人同時向一敵機炮擊，”甲擊中敵機”的概率爲 0.6，”乙擊中敵機”的概率爲 0.5，則敵機被擊中的概率是 0.6+0.5 嗎?

2. 抽查 10 件產品，設 A 爲事件”至少有 2 件次品”，則$\bar{A}$表示什麼呢?

參考答案：1. 不是，因爲甲、乙兩人可以同時擊中敵機，兩者不是互斥事件 2. $\bar{A}$表示 ”至多有 1 件次品”

(3.4) 小結 (5 分鐘)

1. 事件 A、B 不可能同時發生，就稱事件 A、B 是互斥事件。
2. 互斥事件的概率加法公式：如果事件 A、B 互斥，那麼事件 A+B 發生(即 A，B 中有一個發生)的概率，等於事件 A、B 分別發生的概率 P(A)，P(B)的和，即 P(A+B)=P(A)+P(B)

   如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 彼此互斥，那麼事件” $A_1+A_2+\ldots+A_n$”發生(即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中有一個發生)的概率，等於這 n 個事件分別發生的概率的和，即 $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$
3. 對立事件：有兩個事件，其中一個事件發生，另一個事件必不發生；一個事件不發生，另一個件一定發生，稱這樣的兩個事件爲對立事件，記爲事件 A 與事件$\bar{A}$。也就是：$A+\bar{A}$是一個必然事件，對立事

件 A 與 $\bar{A}$ 的概率和等於 1，即 $P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})=1$ 此外，由上式還可得到 $P(\bar{A})=1-P(A)$

4. 兩個互斥事件不一定是對立事件，而兩個對立事件必爲互斥事件。

(3.5) 佈置作業---- (略)

4 <u>相互獨立事件同時發生的概率</u> (第四課節 45 分鐘)

(4.1) 引入課題 (10 分鐘)

例 1. 甲袋裡有 6 個白球，4 個黑球，乙袋裡有 3 個白球，5 個黑球，從這兩個袋裡分別摸出一個球，它們都是白球的概率是多少?

師: 我們把 "從甲袋裡摸出一個球，得到白球"叫做事件 A，把 "從乙袋裡摸出一球，得到白球"叫做事件 B。很明顯，從一個袋裡摸出的是白球還是黑球，對從另一個袋裡摸出白球的概率沒有影響，這就是說，事件 A(或 B)是否發生對事件 B(或 A)發生的概率沒有影響,這樣的兩個事件叫做**相互獨立事件**。

"從兩個袋裡分別摸出一個球，都是白球"是一個事件，它的發生，就是事件 A，B 同時發生，我們將它記作" $A \cdot B$ "。於是，這裡的問題就是要求相互獨立事件 A，B 同時發生的概率 $P(A \cdot B)$。

從甲袋裡摸出一個球，有 10 種等可能的結果；從乙袋裡摸出一個球，有 8 種等可能的結果。於是，從兩個袋裡分別摸出一個球，共有 10×8 種等可能的結果，其中同時摸出白球的結果有 6×3 種。因此從兩個袋裡分別摸出一個球，都是白球的概率 $P(A \cdot B)=\frac{6\times3}{10\times8}=\frac{6}{10}\times\frac{3}{8}$ 。

另一方面，從甲袋裡摸出一個球，得到白球的概率 P(A)爲 $\frac{6}{10}$ ，從乙袋裡摸出一個球，得到白球的概率 P(B)爲 $\frac{3}{8}$ ，於是我們看到

$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$

這就是說，**兩個相互獨立事件同時發生的概率，等於每個事件發生的概率的積**。

一般地，**如果事件 A_1，A_2，…A_n 相互獨立，那麼這 n 個事件同時發生的概率，等於每個事件發生的概率的積，即 $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$**

(4.2) 進行新課 (30 分鐘)

師: 現在先看以下的例子。

例 1. 甲、乙兩人各進行一次射擊，如果兩人擊中目標的概率都是 0.6，計算：

(1) 兩人都擊中目標的概率；

(2) 其中恰有一人擊中目標的概率；

(3) 至少有一人擊中目標的概率。

師：(1) 記 “甲射擊一次，擊中目標”爲事件 A，”乙射擊一次，擊中目標”爲事件 B。因此，兩人各射擊一次，都擊中目標、是什麼事件呢?

生：是事件 $A \cdot B$。

師：又由題意可知，事件 A 與 B 有什麼關係呢?應該用什麼公式呢?

生：它們是相互獨立事件。應用公式 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$。

師：好!請繼續。

生：所求的概率是 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0.6 \times 0.6 = 0.36$

即兩人都擊中目標的概率是 0.36

師：很好!(2) “兩人各進行一次射擊，有一人擊中目標”包括那兩種情況?

生：一種是甲擊中、乙未擊中(事件 $A \cdot \bar{B}$ 發生)，另一種是甲未擊中、乙擊中(事件 $\bar{A} \cdot B$ 發生)。

師：好!請繼續。

生：根據題意，這兩種情況在各射擊一次時不可能同時發生，即事件 $A \cdot \bar{B}$ 與 $\bar{A} \cdot B$ 互斥，根據公式 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 和 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$，所求的概率是 $P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B)$

$=0.6 \times (1-0.6) + (1-0.6) \times 0.6 = 0.24 + 0.24 = 0.48$

即其中恰有一人擊中目標的概率是 0.48

師：很好!第(3)個問呢?

生甲：”兩人各射擊一次，至少有一人擊中目標”的概率

$P = P(A \cdot B) + [P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B)] = 0.36 + 0.48 = 0.84$

生乙：”兩人都未擊中目標”的概率是 $P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$

$=(1-0.6) \times (1-0.6) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$，因此，至少有一人擊中目標的概率

$P = 1 - P(A \cdot B) = 1 - 0.16 = 0.84$

即至少有一人擊中目標的概率是 0.84

師：兩種解法中，乙同學的解法比較簡潔。現在再看以下的例子。

例 2. 已知某些同一類型的高射炮在它們的控制區域內擊中具有某種速度的敵機的概率是 20%，假定有 5 門這種高射炮控制這個區域，求敵機進入這個區域後被擊中的概率。

師：設敵機被各炮擊中的事件分別爲 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，那麼 5 門炮都未擊中敵機的事件 $\bar{C}$ 是什麼?

生：$\bar{C}=\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4 \ \bar{A}_5$

師：這 5 個事件有什麼關係?

生：它們互相獨立。

師：好!請繼續。

生：$P(\bar{C})=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5)=[P(\bar{A}_1)]^5=(1-20\%)^5\approx 0.33$

所以，$P(C)=1-P(\bar{C})=1-0.33=0.67$

即敵機進入這個區域後被擊中的概率是 0.67。

例 3. 假設生男孩的概率是 0.52，王先生共有 2 個孩子，求下列事件的概率。

(a)兩個都是男孩；(b)兩個都是女孩；(c)至少有 1 個女孩；(d)恰好有一男一女。

師：設第一個是男孩爲事件 A，第二個是男孩是事件 B，則 A 與 B 是什麼事件?

生：由於第二個是男孩的概率和第一個是男孩的概率是沒有影響的，因此事件 A 與 B 是獨立事件。

師：好!請繼續做(a)題。

生：兩個都是男孩是事件 $A \cdot B$ 發生，根據相互獨立事件的概率乘法公式，得到 $P(A \cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0.52\times 0.52\approx 0.27$

即兩個都是男孩的概率約是 0.27

師：好!請繼續做(b)題。

生：設第一個是女孩爲事件 C，第二個是女孩是事件 D，則 C 與 D 也是獨立事件，而 A 與 C 是對立事件，所以 P(C)=1-P(A)=1-0.52=0.48，同理，P(D)=0.48

所以，$P(C \cdot D)=P(C)\cdot P(D)=0.48\times 0.48\approx 0.23$

即兩個都是女孩的概約是 0.23

師：很好! 請繼續做(c)題。

生：設至少有一個女孩是事件 E，兩個都是男孩是事件 F，由於事件 E 是事件 F 的對立事件，所以 P(E)=1-P(F) $\approx$ 1-0.27=0.73

即至少有 1 個女孩的概率約是 0.73

師：很好! 請繼續做(d)題。

生：設恰好有一男一女是事件 G，則表示第一個是男孩，第二個是女孩；或第一個是女孩，第二個是男孩，所以，

$P(G)=P(A\cdot D)+P(C\cdot B)=P(A)\cdot P(D)+P(C)\cdot P(B)$

$=0.52\times 0.48+0.48\times 0.52=0.4992$

即恰好有一男一女的概率是 0.4992。

(4.3) 堂上練習----反饋矯正 (10 分鐘)

甲乙丙三人練靶成績，甲五發四中，乙四發三中，丙三發二中。今有一鳥飛近於

三人射程之內，三人同時各發一鎗，求： (a) 甲、乙皆中而丙不中之概率；(b) 此鳥至少中二彈之概率。

參考答案：

(a) 設 A 爲” 甲、乙皆中而丙不中”之事件，則

$P(A)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{5}$ ，即甲、乙皆中而丙不中之概率是 $\frac{1}{5}$ ；

(b) 設 B 爲”此鳥至少中二彈”之事件，則

$$P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

即此鳥至少中二彈之概率是 $\frac{5}{6}$ 。

(4.4) 小結

(i) **相互獨立事件：**事件 A(或 B)是否發生對事件 B(或 A)發生的概率沒有影響，這樣的兩個事件叫做**相互獨立事件**。

(ii) 兩個相互獨立事件 A、B 同時發生，我們將它記作 $A\cdot B$，$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

即**兩個相互獨立事件同時發生的概率，等於每個事件發生的概率的積**。

如果事件 A_1，A_2，…A_n 相互獨立，那麼這 n 個事件同時發生的概率，等於每個事件發生的概率的積，即 $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$

(4.5) 佈置作業---- (略)

5 獨立重複試驗 (第五課節 45 分鐘)

(5.1) 引入課題，證明公式 (15 分鐘)

師：請看下例：

某射手射擊一次，擊中目標的概率是 0.9，他射 4 次恰擊中 3 次的概率是多少?

師：分別記在第 1，2，3，4 次射擊中，這個射手擊中目標爲事件爲 A_1，A_2，A_3，A_4 ，未擊中目標爲事件 $\bar{A}_1$ ，$\bar{A}_2$ ，$\bar{A}_3$ ，$\bar{A}_4$ 。那麼，射擊 4 次，擊中 3 次共有下面四種情況： $A_1A_2A_3\bar{A}_4$ ，$A_1A_2\bar{A}_3A_4$ ，$A_1\bar{A}_2A_3A_4$ ，$\bar{A}_1A_2A_3A_4$ 。

上述每一種情況，都可看成是在 4 個位置上取出 3 個寫上 A，另一個寫上 $\bar{A}$，所以這些情況的種數等於從 4 個元素中取出 3 個的組合數，即 4 種。由於各次射擊是否擊中相互之間沒有影響。根據公式

$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$

前 3 次擊中、第 4 次未擊中的概率 $P(A_1A_2A_3\bar{A}_4)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\bar{A}_4)$

$=0.9\times0.9\times0.9\times(1-0.9)=\ 0.9^3\times(1-0.9)^{4-3}$

同理，$P(A_1\ A_2\ \bar{A_3}\ A_4)=P(A_1\ \bar{A_2}\ A_3\ A_4)=P(\bar{A_1}\ A_2\ A_3\ A_4)=0.9^3\times(1-0.9)^{4-3}$

這就是說，在上面射擊 4 次、擊中 3 次的 4 種情況中，每一種發生的概率都是 $0.9^3\times(1-0.9)^{4-3}$。因爲這 4 種情況彼此互斥，根據公式

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

射擊 4 次、擊中 3 次的概率

$P=P(A_1\ A_2\ A_3\ \bar{A_4})+P(A_1\ A_2\ \bar{A_3}\ A_4)+P(A_1\ \bar{A_2}\ A_3\ A_4)+P(\bar{A_1}\ A_2\ A_3\ A_4)$

$=C_4^3\times0.9^3\times(1-0.9)^{4-3}=4\times0.9^3\times0.1\approx0.29$

在上面的例子中，4 次射擊可以看成是進行 4 次獨立重複試驗。

一般來說，**如果在一次試驗中某事件發生的概率是 P，那麼在 n 次獨立重複試驗中這個事件恰好發生 k 次的概率** $P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

(5.2) 進行新課 (20 分鐘)

例 1. 某氣象站天氣預報準確率爲 80%，計算(結果保留兩個有效數字)：

(a) 5 次預報中恰有 4 次準確的概率；

(b) 5 次預報中至少有 4 次準確的概率。

師：記"預報一次，結果準確"爲事件 A，預報 5 次相當於作 5 次什麼試驗呢?

生：獨立重複試驗。

師：那麼應用什麼公式呢?

生：應用 $P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

師：其中 n，k，p 分別各是多少呢?

生：n=5，k=4，p=80%=0.8

師：好!請繼續。

生：$P_5(4)=C_5^4\times0.8^4\times(1-0.8)^{5-4}=5\times0.8^4\times0.2\approx0.41$。

即 5 次預報中恰有 4 次準確的概率約爲 0.41。

師：很好!那麼 5 次預報中至少有 4 次準確的概率呢?

生：這就是說：5 次預報中恰有 4 次準確的概率與 5 次預報都準確的概率的和，

即 $P=P_5(4)+P_5(5)=C_5^4\times0.8^4\times(1-0.8)^{5-4}+C_5^5\times0.8^5\times(1-0.8)^{5-5}$

$=5\times0.8^4\times0.2+0.8^5\approx0.410+0.328\approx0.74$。

即 5 次預報中至少有 4 次準確的概率約爲 0.74。

師：好!請看例 2。

例 2. 某人計算問題，平均四題可計對三題。今有五題能計對三題者可及格，求此人及格之概率。

師：記“計對一題”爲事件 A，合格相當於作多少次什麼試驗呢?
生：合格相當於 5 次重複試驗中計對 3 題，或 4 題或 5 題。
師：那麼應用什麼公式呢?

生：應用 $P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$

師：其中 n，k，p 分別各是多少呢?

生：n=5，k=3，4，5，p=$\frac{3}{4}$=0.75

師：好!請繼續。
生：P(A)= $P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$

$$=C_5^{\,3}\times 0.75^3\times(1-0.75)^{5-3}+C_5^{\,4}\times 0.75^4\times(1-0.75)^{5-4}+C_5^{\,5}\times 0.75^5\times(1-0.75)^{5-5}$$

$$=\frac{135}{512}+\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{459}{512}$$

即此人合格之概率是 $\frac{459}{512}$ 。

例 3. 若將一粒質地均勻的骰子任意拋擲 4 次，求(a)有 2 次出現”6 點”的概率；(b)有 3 次出現奇數的概率。
師：擲一次出現”6 點”的概率是多少?

生：是 $\frac{1}{6}$

師：那麼不出現”6 點”的概率是多少?

生：是 1-$\frac{1}{6}$=$\frac{5}{6}$

師：記”拋擲 1 次，出現 6 點”爲事件 A，則 P(A)= $\frac{1}{6}$ ，請繼續。

生：本題相當於在 4 次獨立重複試驗中求 A 恰好發生 2 次的概率，因而所求概率是： $P_4(2)=C_4^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^2=\frac{25}{216}$

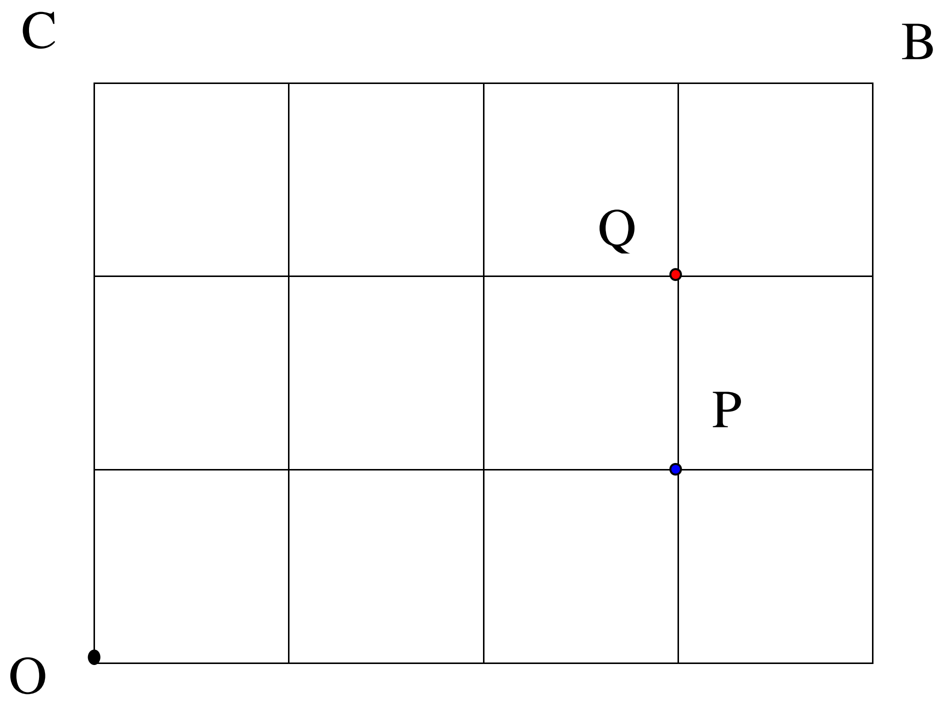
師：很好!第 2 個問呢?

生：拋擲一次出現奇數點的概率是 $\frac{1}{2}$，不出現奇數點概率亦是 $\frac{1}{2}$，所以所求概率是： $P_4(3)=C_4^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{4}$

例4. 如下圖所示：有一棋子，從 O 點出發，每次移動 1 格，由擲骰子決定棋子前進之方向，規則如下：

(1) 出現 1 點或 2 點向右；(!) 出現 1 點、2 點以外的點數時向上；

求(a)棋子到達 P 點的概率；(b)棋子到達 Q 點的概率。



師：棋子要到達 P 點，要怎樣做呢?所求的概率是多少呢?

生：必須向右 3 次，向上 1 次，即連擲骰子 4 次，其中恰有 3 次出現 1 點或 2 點，其他點出現 1 次，而向上與向右移動的順序可以是任意的，由於它和擲 4 次骰子，1 或 2 點出現 3 次，其他點出現 1 次這一獨立事件是一致的，故所求的概率是 $C_4^3(\frac{2}{6})^3(1-\frac{2}{6})^1=\frac{8}{81}$

師：好!請繼續。

生：與上題同理，棋子要到達 Q 點，必須向右，向上各 2 次，即連擲骰子 4 次，2 次出現 1 點或 2 點；2 次出現其他點概率與這一獨立事件的概率是一致的。故所求之概率是 $C_4^2(\frac{2}{6})^2(1-\frac{2}{6})^2=\frac{8}{27}$

(5.3) 堂上練習----反饋矯正（10 分鐘）

一個人的血型爲 O、A、B、AB 型的概率分別爲 0.46，0.40，0.11，0.03，現任意挑選 5 人，求下列事件的概率：(結果取小數點後面三個數字)

(a)兩人爲 O 型，其他三人分別爲其他三種血型；

(b)三人爲 O 型，兩人爲 A 型；

(c)沒有一人爲 AB 型。

參考答案：

(a) 設 A_1 是"兩人爲 O 型，其他三人分別是其他三種血型"的事件，

$$P(A_1) = C_5^2 \times (0.46)^2 \times P_3^3 \times 0.40 \times 0.11 \times 0.03 \approx 0.017$$

(b) 設 A_2 是"三人爲 O 型，二人是 A 型"的事件，

$$P(A_2) = C_5^3 \times (0.46)^3 \times (0.40)^2 \approx 0.156$$

(c) 設 A_3 是"沒有一人爲 AB 型"的事件，

$$P(A_3) = (1-0.03)^5 \approx 0.859$$

(5.4) 小結：如果在一次試驗中某事件發生的概率是 P，那麼在 n 次獨立重複試驗中這個事件恰好發生 k 次的概率是 $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$

(5.5) 佈置作業---- (略)

6. 應用舉例 (第五課節 45 分鐘)

例 1. 六合彩共有 49 個號碼(1 至 49)，攪珠開 7 個號碼，最後開的是特別號碼。

頭獎：中 6 個號碼
二獎：中 5 個號碼和特別號碼
三獎：中 5 個號碼
四獎：中 4 個號碼和特別號碼
五獎：中 4 個號碼
六獎：中 3 個號碼和特別號碼
七獎：中 3 個號碼
分別求中頭獎，中二獎和中三獎的概率。

師：從 49 個號碼中隨機攪出 6 個號碼組成一個頭獎數組，而且與這 6 個數碼的順序無關，所以中頭獎的概率是 $\dfrac{1}{C_{49}^6} = \dfrac{1}{13983816} \approx 0.000000072$

中二獎的概率是 $\dfrac{C_6^5 \times C_1^1}{C_{36}^7} = \dfrac{6}{13983816} = \dfrac{1}{2330636} \approx 0.000000429$

中三獎的概率是 $\dfrac{C_6^5 \times C_{42}^1}{C_{36}^7} = \dfrac{252}{13983816} = \dfrac{3}{166474} \approx 0.000018021$

例 2. 假設 9 支球隊參加亞洲地區 2004 年奧運會足球預選賽，把 9 支球隊任意地分爲 3 組，試求中、韓兩隊恰好分在同一組的概率。

師：9 支球隊分爲 3 組，每組 3 隊，可看作 3 個空位，中國隊先佔其中的一個位置，這組還剩 2 個位置，這時韓國隊在餘下的 8 個位置中可任選其一，有 8 種選取法，但要與中國隊在同一組，只有兩個位置可選，故 $p=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

即中、韓兩隊恰好分在同一組的概率是$\frac{1}{4}$ 。

例 3. 在慈善園遊會某一攤位中有幸運大抽獎，袋中有黑、白球各 8 個，凡抽獎者，每人交 10 元抽獎費，然後一次從袋中摸出 5 個球，中獎情況如下:

摸到	彩金
5 個白球	200 元的大獎
4 個白球	20 元的中獎
3 個白球	5 元的紀念品一份
其他	多謝你! 祝你好運紙條一張

問: 按抽 1000 次統計，可收入多少?

師: 抽到 5 個白球的概率$P_1 = \frac{C_8^5}{C_{16}^5} \approx 0.0128$;

抽到 4 個白球的概率$P_2 = \frac{C_8^4 \times C_8^1}{C_{16}^5} \approx 0.1282$;

抽到 3 個白球的概率$P_3 = \frac{C_8^3 \times C_8^2}{C_{16}^5} \approx 0.3590$;

按照 1000 次抽獎來計算，攤位應收入爲 10000 元，而要支付的彩金(包括紀念品)是: 約 13 人獲 200 元，128 人獲 20 元，359 人獲紀念品，所以共計 13×200+128×20+359×5=6955(元)。

即每 1000 次抽獎，攤位約可得 3000(元)。

例 4. 某機構發行獎券 1000 張，每張 10 元。中獎者只有一名，他可獲得價值 5000 元的獎品一份。

(a) 求買獎券者的期望回報。

(b) 求買獎券者的贏面期望值。這場遊戲對買獎券者有利嗎?

生: (a) 因爲獎券有 1000 張，中獎者只有 1 名。所以中獎的概率是$\frac{1}{1000}$

買獎券者的期望回報=獎金×中獎概率=$5000\times\frac{1}{1000}=5$(元)

(b) 贏面期望值=期望回報－所付代價=5－10=－5(元)

所以這場遊戲對買獎券者不利。

例 5.6 張正面向下的撲克牌，只有 2 張 A，現在隨意翻看 2 張牌，

(a)兩張牌中至少有一張是 A。

(b)兩張牌中沒有一張是 A。

那一個機會較大?

(a)兩張牌中至少有一張是 A。

指所開的牌中有 1 張是 A，另 1 張不是 A；或所開的兩張牌都是 A，

所以$p = \frac{c_2^1 \times c_4^1}{c_6^2} + \frac{c_2^2}{c_6^2} = \frac{3}{5}$

(c) 由於兩張牌中沒有一張是 A，所以 $p=\frac{c_4^2}{c_6^2}=\frac{2}{5}$

生乙：(另解) 因爲(b)與(a)是對立事件，所以 $p=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

故兩張牌中至少有一張是 A 的概率較大。

小結：概率的難點是對概念的理解，及解決相應應用題的思考方法。思考時要善於將稍爲複雜的問題進行分解，解決某些問題時還要學會用逆向思考的方法。若發現能力不足，應再溫習好排列和組合的知識。

總結：

(1) 概率統計的思想已滲入到日常社會生活的各個領域。例如：天氣的預測，吸煙與置癌關係，博彩的賠率，人口調查等；一些保險公司甚至會根據一些意外發生的概率、死亡的概率等，計算客戶所應繳納的保險費用等，所以概率概念非常重要。

(2) 很多學生喜歡”考驗”自己的眼光和運氣而參與某些賭博遊戲，由於這些遊戲都涉及教學原理------概率；於是借助一些撲克遊戲嘗試講解概率的概念及其運算方法，既可幫助他們複習已學過的數學知識-------排列和組合，又可使學生更易掌握概率的知識，並能運用於日常生活中。