


《等差數列的前 n 項和》教學設計

羅偉強 (執教) 楊春萍 (指導)

一、教學設計

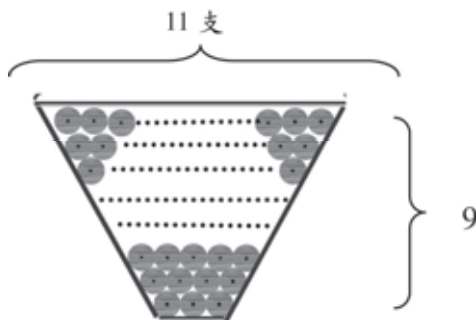
任教老師	羅偉強	學校	海星中學
授課地點	高美士中葡學校	班級	高一理乙
科目	代數	日期及時間	30/04/2011 16:20~17:00
課題	等差數列的前 n 項和		
教學目標	<ol style="list-style-type: none">1. 掌握等差數列的前 n 項和公式及其獲取思路，能較熟練應用等差數列前 n 項和公式求和；2. 讓學生會用等差數列的前 n 項和公式解決一些簡單的與前 n 項和有關的問題；3. 通過生動具體的現實問題，令人著迷的數學史，從而激發學生學習興趣，使全體學生積極參與；4. 培養學生觀察能力、分析能力及合作交流的精神。		
教學重點	等差數列的前 n 項和公式的理解、推導及簡單應用。		
教學難點	<ol style="list-style-type: none">1. 對公式推導過程中歸納出一般規律的理解與領會；2. 靈活應用等差數列前 n 項公式解決一些簡單的有關問題。		
教學方法	通過對歷史有名的高斯求和的介紹，引導學生發現等差數列的第 k 項與倒數第 k 項的和等於首項與末項的和這個規律；並由學生建立等差數列模型，利用相關知識解決一些簡單的問題，對學生進行思維靈活性與廣闊性的訓練，藉此發展學生的思維水平。		

教學內容	教學過程
複習舊知識	<p>I. 複習基本內容</p> <p>(1) 甚麼叫等差數列？</p> <p>如果一個數列 $\{a_n\}$ 從第 2 項起，每一項與它前一項的差等於同一個常數，那麼這個數列就叫做等差數列，其形式化表示為：</p> $a_n - a_{n-1} = d (d \text{ 為常數, } n \geq 2)$ <p>(2) 等差數列 $\{a_n\}$ 的通項公式</p> $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ $a_m = a_n + (m-n) \cdot d$ <p>(3) 若 a, b, c 三數成等差數列，則 $b = \frac{a+c}{2}$ 稱為 a, c 之等差中項</p> <p>(4) 在等差數列 $\{a_n\}$ 中，若 $m+n=p+q$，則 $a_m + a_n = a_p + a_q$</p>
引入新課	<p>II. 小故事—高斯</p> <p>等差數列在現實生活中比較常見，因此等差數列求和就成為我們在實際生活中經常遇到的問題。</p>  <p>早在 200 多年前，歷史上最偉大的數學家之一，被譽為“數學王子”的高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777 ~ 1855 德國數學家、天文學家)，故事就是他十歲時，小學老師出了一道算術題：$1+2+3+\dots+100=?$ 當時，正當其他同學忙於把 100 個數逐項相加時，10 歲的高斯卻用下面的方法迅速算出了正確答案。</p> <p>高斯利用算術級數 (等差級數) 的對稱性，首尾配對，把數目一對對的湊在一起：$(1+100)+(2+99)+\dots+(50+51)$ 這樣的組合有 50 組，所以答案很快的就可以求出是：$101 \times 50 = 5050$</p> <p>“高斯求和”將加法問題轉化成乘法運算，迅速得到結果。</p> <p>同學們，想一想，如果你們是當時的高斯，你會用怎樣的方法解決同樣的一道題呢？</p>

這節課我們一起來學習 << 等差數列的前 n 項和 >>。

III. 延伸問題

問題. 一個堆放鉛筆的倒立梯形架，最下面第一層放 3 支鉛筆，往上每一層都比它下一層多放一支，就這樣一層一層地往上放，最上一層放 11 支鉛筆，求這個倒立梯形架上共放著多少支鉛筆？



解：運用高斯首尾配對的求和方法等差數列 $3, 4, 5, \dots, 10, 11$ 共有 9 項 $3+4+5+\dots+10+11$ 是奇數項的數列求和問題

$$\begin{aligned} & 3+4+5+\dots+10+11 \\ & = (3+11)+(4+10)+\dots+(6+8)+7 \\ & = 14 \times 4 + 7 = 63 \text{ (支)} \end{aligned}$$

講解新課

同學們，是否一定要計算出該數列是奇數項還是偶數項？有更加簡單的方法解決這個問題呢？

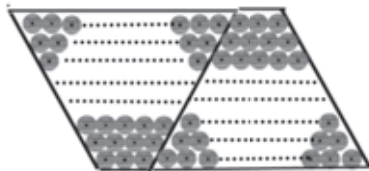
有！！用幾何方法，把這個倒立梯形架倒置，與原圖形補成一個平行四邊形

平行四邊形中，每行的鉛筆數均為 14 支，共有 9 行

這個倒立梯形架上共放的鉛筆總數是 $\frac{(3+11) \cdot 9}{2} = 63$ (支)

我們將幾何法寫成式子：

$$\begin{aligned} s_9 &= 3+4+5+\dots+10+11 \\ s_9 &= 11+10+9+\dots+4+3 \quad (+) \\ \hline 2s_9 &= \underbrace{(3+11)+(4+10)+\dots+(11+3)}_{9 \text{ 組}} \end{aligned}$$



$$\therefore s_9 = \frac{(3+11) \cdot 9}{2} = 63$$

答：這個倒立梯形架上共放著 63 支鉛筆

對齊相加，第二行與第一行恰好是倒序的，實質上就是我們數學中一種求和的重要方法——倒序相加法。

IV. 公式的推導

現在，我們將求和問題一般化，如何求等差數列的前 n 項和？
同學們，從“倒序相加法”受到的啟發，嘗試把公式推導出來：

問題一：已知等差數列 $\{a_n\}$ 的首項 a_1 、末項 a_n 及項數 n ，

如何求該等差數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和 s_n ？

解：由於 $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$$\begin{aligned} \text{利用倒序相加法：} \quad & s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ & s_n = a_n + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 \quad (+) \end{aligned}$$

$$2s_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1)}_{n \text{ 組}}$$

∵ 在等差數列 $\{a_n\}$ 中，若 $m+n=p+q$ 則 $a_m + a_n = a_p + a_q$

$$\therefore (a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = \cdots = (a_n + a_1)$$

$$\therefore 2s_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \text{得 } s_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$\boxed{\text{公式一：} s_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}} \quad [\text{已知條件：首項 } a_1 \text{、末項 } a_n \text{ 及項數 } n]$$

問題二：已知等差數列 $\{a_n\}$ 的首項 a_1 、項數 n 及公差 d ，

如何求該等差數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和 s_n ？

解：利用通項公式 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1) \cdot d] \cdot n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

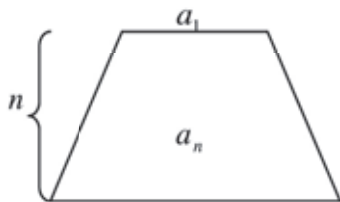
$$\boxed{\text{公式二：} s_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}}$$

[已知條件：首項 a_1 、項數 n 及公差 d]

公式記憶

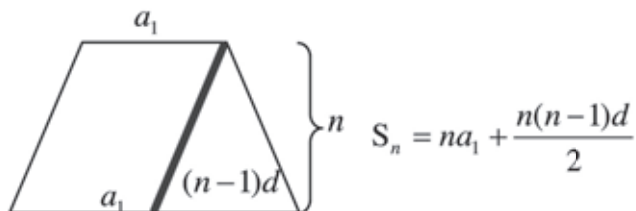
梯形

公式一



$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

分割成一平行四邊形及一三角形
公式二



等差數列的前 n 項和 $s_n = \frac{(a_1+a_n) \cdot n}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$

在公式中，變量有 a_1, a_n, d, n, s_n 五個，如果已知變量其中三個，可利用方程或方程組求另外兩個變量，即 [知三求二]。

例 . 計算：

(1) $1+2+3+\cdots+n=?$

(2) 在正整數列中，前 n 個奇數的和 s_n 是多少？

解：(1) $\because 1+2+3+\cdots+n$ 是等差數列，

$$\therefore s_n = \frac{(n+1) \cdot n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

(2) \because 數列 $1, 3, 5, \dots, (2n-1)$ 是等差數列，

$$\therefore s_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{(1+2n-1) \cdot n}{2} = n^2$$

同學們，我們嘗試運用已學的等差數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和公式，解決下列的問題：

練習一 . 明仔爸爸有十個附有號碼 (1~10) 的袋子，每袋不少於十個 1 元硬幣，但其中一袋全是假的 1 元硬幣，已知真的 1 元硬幣每個重 1 克，假的 1 元硬幣每個重 2 克，現在有一個祇能秤一次的秤，而且完全不知道是那一袋才是假的，同學們，試用我們剛學到的求和公式，幫明仔爸爸找出那一袋是假的 1 元硬幣？



[明仔建議：如果從每個袋子拿 1 元硬幣出來，幾號袋就照號碼拿 1 元硬幣，如 2 號就拿 2 個 1 元硬幣，十號就拿十個，一起放到秤上，秤出來是 62 克，怎麼辦呢？往後的步驟就要靠聰明的同學們幫幫忙…]

解：依題意，按照明仔的建議

1 號就拿 1 個，2 號就拿 2 個………，10 號就拿 10 個

從十個袋共拿出： $1+2+3+\dots+10$ ，而數列 $1, 2, \dots, 10$ 為等差數列，

$$s_{10} = \frac{(1+10) \cdot 10}{2} = 55 (\text{個})$$

55 個 1 元硬幣共重： $55 \times 1 = 55$ (克)

剛剛明仔將所拿的 1 元硬幣秤出來的重量是 62 克

得 $62 - 55 = 7$ (克)

所以，7 號袋 1 元硬幣全是假的。

練習二. 求等差數列 $-10, -6, -2, 2, \dots$ 前多少項和是 54 ?

解：設在等差數列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = -10, d = -6 - (-10) = 4, s_n = 54$

由等差數列求和公式

$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \Rightarrow 54 = (-10)n + \frac{n(n-1)4}{2}$$

$$\Rightarrow 54 = -10n + 2n^2 - 2n \Rightarrow n^2 - 6n - 27 = 0$$

$$\Rightarrow (n-9)(n+3) = 0 \Rightarrow n=9 \text{ 或 } n=-3$$

(不合題意)

$$\therefore n=9$$

答：數列 $-10, -6, -2, 2, \dots$ 前 9 項和是 54。

總結

V. 小結：

請同學們回想，本堂課你有哪些收穫？

- (1). 認識數學家高斯和“高斯求和”的算法；
- (2). 利用“倒序相加法”推導 << 等差數列的前 n 項和 >> 公式；
- (3). << 等差數列的前 n 項和 >> 公式

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \text{ 和 } s_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} ;$$

- (4). 在求和公式、通項公式中，已知其中三個，通過列方程組，就可求其餘二個，即 [知三求二]。

作業

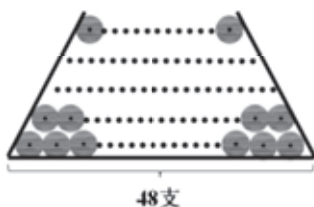
VI. 作業：

一、計算：

(1) $2+4+6+\cdots+2n=$?(2) 求數列 $1,-2,3,-4,\cdots(-1)^{n+1}\cdot n,\cdots$ 的前 n 項和。二、在等差數列 $\{a_n\}$ 中公差為 d ，項數為 n ，第 n 項為 a_n ，前 n 項和為 s_n ，請填寫下表：

三、一個堆放鉛筆的梯形架，最下面第一層放 48 支鉛筆，往上每一層都比它下一層少放 3 支，就這樣一層一層地往上放，共放 13 層，問：(1). 這個梯形架最上層放著多少支鉛筆？(2) 這個梯形架上共放著多少支鉛筆？

a_1	d	n	a_n	S_n
5	10	10		
	-2	8		104
-38			-10	-360

四、等差數列 $5,4,3,2,\cdots$ 前多少項和是 -30 ?五、等差數列 $\{a_n\}$ 中， $d=4$ ， $a_n=18$ ， $s_n=48$ ，求 n 及 a_1 的值。

二、課後反思

(一) 教學過程分析

師生活動	設計心得
先讓學生回憶等差數列的通項，由學生回答，在老師引導下總結出等差數列的幾個重要性質	複習通項及性質，幫助學生鞏固舊知識，同時為前 n 項和公式的推導作好知識準備。

引導學生從高斯求和的方法入手，總結出倒寫相加法，同時從兩方面入手，完成公式的推導	讓學生從高斯的課例中尋找求和思路，並親自經歷公式推導過程，加深對公式的印象。
引導學生分析兩個公式中的變數個數及各變數的意義，同時讓學生記憶公式	加深對公式的印象
師生共同讀題，分析題目中的已知量，同時選擇合適的公式求和	讓學生學會使用這兩個公式，進一步加學生對公式的印象，特別是兩個公式的使用條件限制
師生共同完成	讓學生嘗試公式的簡單應用及鞏固求和公式

(二) 評價

1. 針對本節課的教學目的和設計理念，我採用啟發引導，學生自主探索和合作交流等教學手段，突破學生思維的障礙，分散教學的難點，使不同層次的學生都會有所收穫；

2. 此堂以高斯故事作為引入，目的是讓學生加深對等差數列前 n 項和公式的認識，讓他們發現每條公式的出現，從而提高學生解題的興趣；

3. 等差數列的前 n 項和的推導與應用，學生的理解及應用會有一定的困難，我採用學生獨立思考、合作交流，盡可能使問題在生生互動中得到解決；對於例題的教學，我採用了模型化表示，使學生對定義的理解更加準確；

4. 對於例題的解答，以日常的例子作例題，從而增加學生的學習興趣，在巡視的過程中對部分學生加以指導，然後通過生生互動使問題得到解決，最後通過多媒體演示使學生加深理解；

5. 以學生為中心及電腦投影指引學生，利用工作紙的問題重複指引學生，使用工作紙的目的 --- 讓學生自己動手做題目，印象會加倍深刻；

6. 另外，作業的佈置使課堂中的探究延伸到課外，可以對學生的學習態度、學習方法施加更深遠的影響。

（三）總結

經過這節課，本校的數學科老師都有一個課後的傾談，他們都各自給予我很多寶貴的意見及建議。1. 心情緊張，教學語言太快且不太清晰，令學生產生不少疑惑，流暢度有待改善；2. 應多巡視學生的情況，令每位學生明白教師對他們的重視性；3. 時間掌握不好，沒有機會讓學生進行總結；讓我可以全面地檢討和反思自己在課堂上的表現，知道有那些地方需要改善，以及課前與楊春萍老師的交流，她給我很多的支持與備課意見，這些寶貴的意見令我在教學專業的路途上向前走進了一大步，大大提升了自己的教學技巧。

三、點評

本節課羅老師做了充分的準備，課題確定後，他經過多方位的構思，選用了小高斯的求和方法，以此拉近了與學生的距離，從而激起了學生的學習熱情，然後順其自然引領學生從實例求鉛筆數量中，導出了倒序求和法，一切看起來都那麼自然有序。一般來講，學生犯愁對繁瑣的公式記憶，對此，羅老師利用學生熟知的幾何圖形三角形和梯形，與公式聯繫在一起記憶，數形結合的數學思想得到了很好的展示。在公式的應用中，羅老師精心選取了一個有趣的例子，放在了本節課的後半段，將學生的熱情再一次激活，收到了事半功倍的效果。整節課充分的利用了有效空間，使課容量達到最大化。從學生的反映來講，效果也很理想。

如果在某些環節，給學生的考慮時間再多一點，學生能再放開一些，不是那麼拘謹，本節課的效果會更好。