談平面幾何邏輯推理的分層次教學

張良全

推理是數學的基本思維方式，也是人們學習和生活中經常使用的思維方式。邏輯推理，就推理的思維方式主要分為分析推理和綜合推理；就推理的邏輯結構又主要可分為演繹推理和歸納推理，其中，綜合推理是初中幾何邏輯推理的主要形式。

由於初中學生的年齡特徵、認知水準，以及邏輯推理的思維方式和邏輯結構的多樣性和複雜性，初中學生學習平面幾何的邏輯推理必須遵循分層遞進的原則，這就決定了平面幾何中邏輯推理的教學也必須分層次進行，以滿足學生的不同學習需求。但現實情況是初中學生的幾何推理能力普遍較差，學生一開始就感覺到幾何難學，這與推理教學的層次性不夠清楚有一定的關係，本文主要就平面幾何中邏輯推理的幾種基本形式的分層次教學談幾點體會，供同行參考。

一、通過概念、公理、定理的教學，對學生進行一步推理訓練

一步推理的主要形式有：一因一果的一步推理；多因一果的一步綜合推理；一因多果的一步綜合推理；多因多果的一步綜合推理，我們可按下面四個層次逐步對學生進行一步推理訓練。特別是初一和初二上學期幾何教學更應注意這一點，以便為以後的多步綜合推理打下堅實的基礎。

第一層次：一因一果的一步推理

人教版七年級《義務教育課程標準實驗教科書(數學)》中的概念、公理、定理的推理形式大多是一因一果的一步推理。

如圖1 兩直線垂直的概念，其推理形式為

$\because \angle AOC=90^\circ$ ，$\therefore AB\perp CD$。

比如圖2，平行線判定公理：“同位角相等，兩直線平行”，其推理形式為

$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore a\parallel b$。

又如圖3，平行線的性質：“兩直線平行，內錯角相等”的推理形式為

∵ $a \parallel b$， ∴ $\angle 1 = \angle 2$。

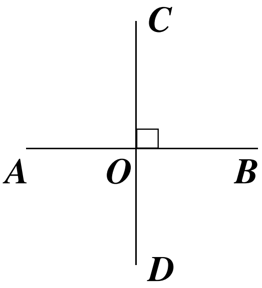

圖1

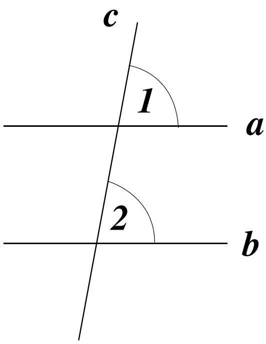

圖2

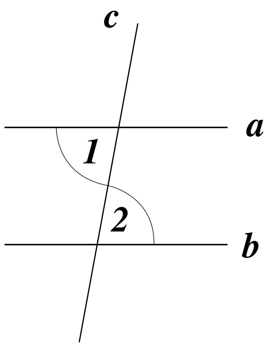

圖3

第二層次：多因一果的一步綜合推理

有的幾何概念、公理、定理的題設不只一個判斷，它的推理形式就是多因一果的一步綜合推理。

比如，補角的性質：“同角的補角相等”，其推理形式為

∵ $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$， $\angle 1 + \angle 3 = 180^0$ ∴ $\angle 2 = \angle 3$。

又如，平行公理的推論：“如果兩條直線都和第三條直線平行，那麼這兩條直線也互相平行”，其推理形式為

∵ $a \parallel c$，$b \parallel c$，

∴ $a \parallel b$。

學生學習一步綜合推理，需對兩個或兩個以上的已知判斷進行綜合思維，才能正確認識結論判斷的合理性。教學時，重點應放在對已知判斷的綜合認識上，使學生明白得出結論的綜合依據。

第三層次：一因多果的一步綜合推理

有的公理或定理，題設只有一個已知判斷，但結論不只一個判斷，它們的推理形式就是一因多果的一步綜合推理。

比如，全等三角形的性質：“全等三角形的對應邊相等，對應角相等”，其推理形式為

∵ $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$，

∴ $AB = A'B'$，$AC = A'C'$，$BC = B'C'$，$\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$。

一因多果的一步綜合推理，也可通過幾個公理或定理的綜合得出。

比如圖4，結合平行線的性質公理和兩個推論可得一因多果的一步綜合推理：

∵ $a \parallel b$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$， $\angle 2 = \angle 3$， $\angle 3 + \angle 4 = 180^0$

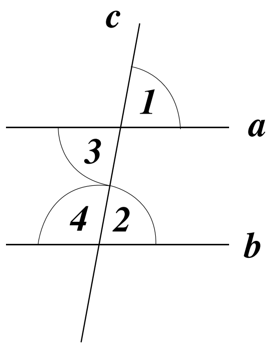

圖 4

第四層次：多因多果的一步綜合推理

此類推理形式通常需要通過幾個公理或定理的結合才能得出。

比如圖5，結合直角三角形的性質定理可得多因多果的一步綜合推理：

在 ΔABC中，

$\because \angle ACB = 90^0$，$\angle B = 30^0$，$AD = DB$，

$\therefore \angle A + \angle B = 90^0$，$AC = \frac{1}{2}AB$，$CD = \frac{1}{2}AB$。

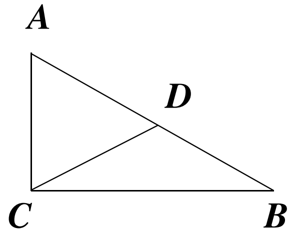

圖 5

學生學習一步綜合推理，關鍵在於推理的邏輯結構的認識，因此，一步綜合推理的教學，應以結論判斷為索引，逐一揭示已知判斷和結論判斷間的邏輯聯繫，使學生對推理的邏輯結構有一個比較清楚的認識。

二、精心安排多步綜合推理教學，逐步提高學生的推理證明能力

多步綜合推理的理解和掌握，是初中學生學好平面幾何邏輯推理的關鍵。教材把多步綜合推理安排在初二學習，根據初二學生的認知能力和多步綜合推理的邏輯結構，多步綜合推理的教學可按以下層次進行。

第一層次：單線索多步推理

學生由一步推理過渡到多步綜合推理的學習，需要一個承前啟後的銜接階段，由於多步綜合推理過程，實質上是對幾條推理線索的逐步綜合的過程，因此單線索多步推理是多步綜合推理的基礎，學生在學習多步綜合推理之前，必須學好單線索多步推理。

比如圖6，$\because \angle 1 = \angle 2$，

$\therefore a \parallel b$，

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ 。

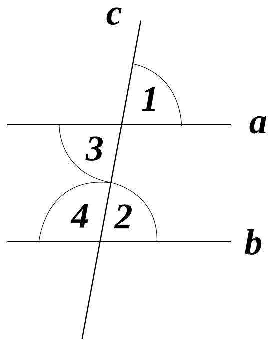

圖6

這是一個單線索兩步推理，它是由兩個一步推理組成，但第二個一步推理的已知判斷通常被省略，由第一個一步推理的結論判斷來替代。

兩步以上的單線索多步推理的邏輯結構與單線索兩步推理基本相同，學生只要掌握了單線索兩步推理，單線索多步推理也就不難掌握，在進行單線索多步推理教學時，可把重點放在培養學生推理必須步步有據的習慣，以免學生在進行邏輯推理時，出現無據推理的錯誤。

第二層次：雙線索綜合推理

由於雙線索綜合推理的推理線索只有兩條，對兩條線索的綜合也就只有一次，因此雙線索綜合推理是多線索綜合推理的最簡單的形式。

比如圖7，∵ $a \parallel b$，

∴$\angle 3=\angle 2$。

又∵$\angle 3=\angle 1$，

∴$\angle 1=\angle 2$。

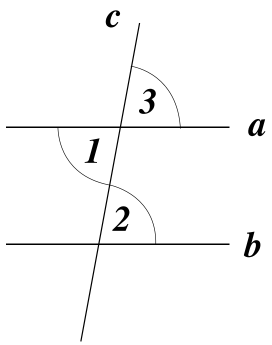

圖7

這一推理的結論$\angle 1=\angle 2$，是由$\angle 3=\angle 2$、$\angle 3=\angle 1$綜合得出，綜合的依據是等量代換。

又如圖8，∵$AB \parallel CD$，

∴$\angle B=\angle C$，

又∵$BC \parallel DE$，

∴$\angle C+\angle D=180^\circ$，

∴$\angle B+\angle D=180^\circ$。

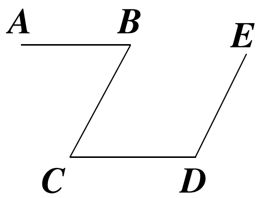

圖8

後一個推理的結論∠B+∠D=180°，是由∠B=∠C、∠C+∠D=180°綜合得出，綜合依據也是等量代換。

學生學習雙線索綜合推理的關鍵環節是對兩條線索的綜合依據的認識，只要把握好這一關鍵環節的教學，初二學生學習線索綜合推理一般都不會有多大困難。

第三層次：多線索綜合推理

由於推理線索和綜合次數的增多，推理過程也就隨之增多，因此，學生在進行多線索綜合推理時，容易出現推理困難，從而挫傷他們學習幾何的興趣。要解決這一問題，可以從條件出發，採用一因一果的一步推理，寫出由條件推出的所有結論，然後篩選與要證明的結論相關的條件和結論，再行拼裝與組合，就容易找到解決問題的突破口。

筆者在多年的平面幾何教學實踐中深切體會到，在多線索綜合推理教學的初期，分解學生學習多線索綜合推理難點的一種有效辦法，是在分析推理線索的同時，按執因索果的思路，用符號語言先寫出推理線索“樹枝圖”，然後綜合“樹枝圖”中“有用”的條件和結論，最後按邏輯順序綜合寫出推理過程。

例如已知：如圖9，在 ΔABC中，$AB=AC$，BD、CE是 ΔABC的角平分線。

求證：$BD=CE$。

樹枝圖：

$AB=AC \Rightarrow \angle ABC=\angle ACB$

$\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB \Rightarrow \angle 1=\angle 2$

$\angle ABC=\angle ACB$，$\angle 1=\angle 2$，$BC=CB \Rightarrow \Delta BDC\cong\Delta CEB \Rightarrow BD=CE$

推理過程：

$\because AB=AC$(已知)

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$ (等邊對等角)

又$\because \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$(已知)

$\therefore \angle 1=\angle 2$

在 ΔBDC 和 ΔCEB 中，

$$\begin{cases} \angle ACB=\angle ABC\text{(已知)} \\ BC=CB\text{(公共邊)，} \\ \angle 1=\angle 2\text{ (已証)，} \end{cases}$$

$\therefore \Delta BDC\cong\Delta CEB$ (ASA)。

$\therefore BD=CE$ (全等三角形的對應邊相等)。

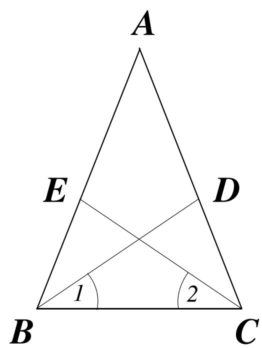

圖9

三、通過歸納推理的教學，使學生學會一些重要的數學思想方法

幾何歸納推理，就是將所研究的幾何問題的各種情況逐一進行推理，然後從各種情況推理的一致性結果中概括出一般性的結論；或者是先將問題的所有情況分成幾類，然後再就各類情況逐一進行推理，最後從各類情況推理的一致性結果中歸納出一般性的結論。

歸納推理的教學，除了學生瞭解歸納推理的結構形式外，還應使學生瞭解：(1)對幾何對象的分類方法；(2)對問題進行分類討論的必要性；(3)把一般性問題轉化為特殊問題的思考方法，對學生進行歸納推理的教學可分以下層次進行。

第一層次：加強幾何圖形分類的教學，奠定歸納推理的基礎

歸納推理，通常需對問題的所有情況進行分類，而分類的方法又大多以幾何圖形的分類為基礎。

比如，三角形以角為標準可分為：鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形。如果以邊為標準則可分為：不等邊三角形、等腰三角形兩類。

又如，同一條弧所對的圓周角，以圓周角的頂點到圓心的距離為標準，可分為：距離小於半徑、距離等於半徑、距離大於半徑三類。如果以圓心和圓周角的位置為標準，又可分為：圓心在圓周角的邊上、圓心在圓周角的內部、圓心在圓周角的外部三類。如果在講圓周角定理之前，學生已瞭解圓周角的分類情況，就會降低學生學習定理證明的難度。

第二層次：通過分類推理教學，使學生瞭解對問題進行分類討論的必要性

有些幾何命題，在沒有畫出圖形時，學生要論證或求解，常常出現解答不全或分類不全的情況，究其原因，除了不夠仔細、考慮問題不周外，與平時分類訓練過少有很大關係。因此，加強分類推理教學，有助於培養學生嚴密、有條理的思維習慣。

如，等腰三角形一條腰上的高與另一腰的夾角為20°，求這個等腰三角形的頂角的度數。

此題需分頂角是鋭角或鈍角兩種情況討論。

又如⊙O的半徑為5㎝，弦AB∥CD，AB=6㎝，CD=8㎝。求AB和CD的距離。

此題需按兩弦在圓心的同側或異側兩種情況討論，雖然兩種情況的推理過程完全相同，但推理結果不同。初中平面幾何中，多解的命題較多，只要平時有意識加強分類推理訓練，善於歸納總結，學生就比較容易掌握分類的思想與方法。

第三層次：通過分類歸納推理教學，使學生學會一般問題轉化為特殊問題的思維方法

辯證法認為，一般性寓於特殊性之中。特殊與一般反映了世界聯繫和發展的客觀規律，它同時也成為人們的思維規律，成為人們認識世界的重要的思維形式。歸納是從特殊到一般的思維活動，是從許多個別事實中概括出一般概念、原理的邏輯方法。

在初中數學歸納推理教學中，“特殊到一般”是數學教學中常用的數學思想方法之一。“特殊到一般”是指從求解特殊問題著手，獲得經驗和線索，再用來解決一般問題的方法。

教科書中的圓周角定理就是採用分類歸納推理證明的，這個定理的證明滲透了“特殊到一般”的思想方法和分類討論的思想。在幾何定理的證明中，對圓周角定理分情況逐一證明肯定命題的正確性，這還是學生第一次接觸。因而教師分析就應從教會學生解決問題的方法上入手，教會學生由圓心O的特殊位置的證明為基礎，進而推到一般情況。同時要向學生滲透證明過程體現了由已知到未知、由特殊到一般的思維規律。

又如，平面內兩兩相交的n條直線，在求其最多有多少個交點時，如果從n＝2、3、4、5的特殊情況出發，獲得一些經驗和思路，那麼對於一般的情況，就容易求解了。這種思維方法，對解答某些一般性問題，不僅有效而且無可替代，教會學生一些重要的思想方法，“注重提高學生的數學思維能力”是新課程的基本理念之一。因此，培養學生的思維能力，提高學生的思維品質，已越來越引起廣大教師的高度關注。